Neke primjene funkcija pod i strop

Ivana Kuzmanović*

Sažetak. *U radu su navedena neka svojstva funkcija pod i strop, te je ilustrirana njihova primjena.*

Ključne riječi: *cjelobrojne funkcije, funkcije pod i strop*

Some applications of floor and ceiling functions

Abstract. *In this paper some properties of floor and ceiling functions are given, and their application is illustrated.*

Key words: *integer functions, floor and ceiling functions*

Osnovna svojstva funkcija pod i strop

Funkcija $\lfloor\ \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x naziva se funkcija pod (eng. *floor*) ili najveće cijelo. Tako je primjerice $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Slično, funkcija $\lceil\ \rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ koja realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj koji nije manji od x naziva se funkcija strop (eng. *ceiling*) ili najmanje cijelo. Tako je primjerice $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 4 \rceil = 4$, $\lceil -\pi \rceil = -3$.

Iz definicije je očigledno

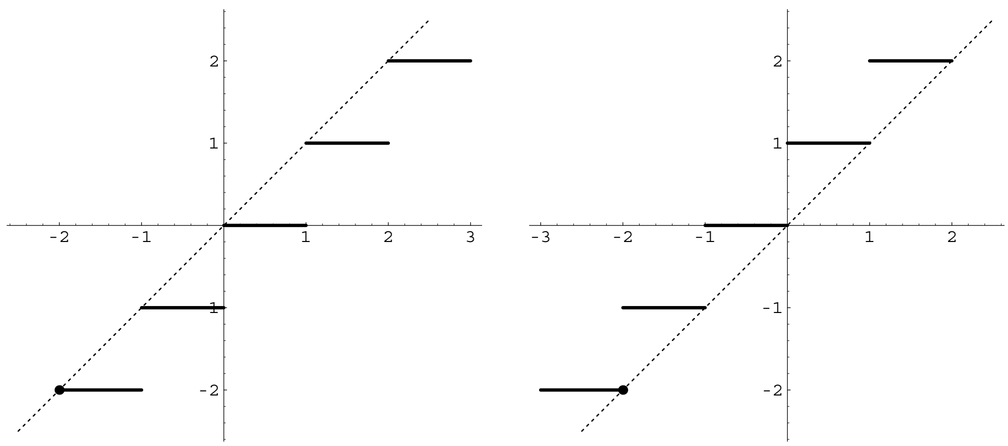
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \ \text{ i } \ x \le \lceil x \rceil < x + 1,$$

$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \ \text{ i } \ \lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil.$$

Dakako, za cjelobrojne argumente vrijednosti tih dviju funkcija su jednake

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z} \iff \lceil x \rceil = x.$$

*Odjel za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail:ikuzmano@mathos.hr



Slika 1. Grafovi funkcija pod i strop

Funkcije pod i strop možemo vrlo lako izraziti jednu pomoću druge koristeći jednakosti

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor &= -\lceil -x\rceil\\ \lceil x\rceil &= -\lfloor -x\rfloor\end{aligned}$$

Neka je n cijeli i x realan broj. Iz definicija funkcija pod i strop izravno slijedi

$$\begin{aligned}\lfloor x\rfloor = n &\iff n \le x < n+1\\ \lfloor x\rfloor = n &\iff x-1 < n \le x\\ \lceil x\rceil = n &\iff n-1 < x \le n\\ \lceil x\rceil = n &\iff x \le n < x+1\end{aligned}$$

Također vrijedi i

$$\begin{aligned}\lfloor x+n\rfloor &= \lfloor x\rfloor + n\\ \lceil x+n\rceil &= \lceil x\rceil + n\end{aligned}$$

što slijedi iz nejednakosti

$$\lfloor x\rfloor + n \le x+n < \lfloor x\rfloor + n + 1$$

$$\lceil x\rceil + n - 1 < x+n \le \lceil x\rceil + n$$

i cjelobrojnosti od $\lfloor x\rfloor + n$ i $\lceil x\rceil + n$.

Međutim, ovakvo svojstvo ne vrijedi za množenje, tj. općenito je $\lfloor nx\rfloor \neq n\lfloor x\rfloor$. Primjerice, ako je $n = 2$ i $x = \frac{1}{2}$, tada je $\lfloor nx\rfloor = \lfloor 1\rfloor = 1$, ali $n\lfloor x\rfloor = 2\lfloor \frac{1}{2}\rfloor = 0$.

Također, općenito za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x+y\rfloor \neq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$. Primjerice, za $x = 0.3$ i $y = 0.7$ je $\lfloor x+y\rfloor = 1$, dok je $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor = 0$.

Neke primjene funkcija pod i strop

Primjer 1. *Broj cijelih brojeva u intervalu* $[x, y\rangle$. *Za cijeli broj* n *je* $n \in [x, y\rangle$ *ako i samo ako je* $x \leq n < y$, *a kako je*

$$x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n \quad i \quad n < y \Leftrightarrow n < \lceil y \rceil$$

to ako i samo ako je $\lceil x \rceil \leq n < \lceil y \rceil$, *pa cijelih brojeva u intervalu* $[x, y\rangle$ *ima* $\lceil y \rceil - \lceil x \rceil$.

Primjer 2. *Broj znamenaka u binarnom zapisu. Cijeli broj* n *ima* m *znamenaka u binarnom zapisu ako i samo ako je*

$$2^{m-1} \leq n < 2^m,$$

a to je ako i samo ako je

$$m - 1 \leq \log_2 n < m,$$

što je ako i samo ako je

$$m - 1 = \lfloor log_2 n \rfloor.$$

Dakle, cijeli broj n *u binarnom zapisu ima* $m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ *znamenaka.*

Osim ovih jednostavnih primjena, sljedeća lema i teorem dat će nam čitav spektar problema teorije brojeva koji se učinkovito rješavaju primjenom funkcije pod.

Lema 1. *Neka su* $n, k \in \mathbb{N}$. *Tada je broj svih višekratnika* $v \leq n$ *broja* k *jednak* $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Dokaz. Neka je $n = qk + r$, gdje su $q, r \in \mathbb{N}_0$ i $r < k$. Tada su traženi višekratnici broja k: $k, 2k, 3k, \ldots, qk$, tj. ukupno ih ima q. S druge strane je

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qk + r}{k} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{k} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor = q,$$

čime je tvrdnja leme dokazana. □

Primjer 3. *Odrediti broj višekratnika od* 7 *među brojevima*

$$567, 568, 569, \ldots, 1233, 1234.$$

Rješenje: Višekratnika od 7 manjih ili jednakih 1234 ima

$$\left\lfloor \frac{1234}{7} \right\rfloor = 176.$$

Od tog broja treba oduzeti broj višekratnika od 7 manjih od 567, tj. broj

$$\left\lfloor \frac{566}{7} \right\rfloor = 80,$$

pa je traženi broj višekratnika $176 - 80 = 96$.

Primjer 4. *Odrediti broj peteroznamenkastih brojeva koji su djeljivi sa* 6*, a nisu djeljivi s* 30*.*

Rješenje: Treba odrediti broj višekratnika od 6 koji nisu višekratnici od 30 među brojevima $10000, 10001, \ldots, 99999$. Broj višekratnika od 6 u danom nizu je

$$\left\lfloor \frac{99999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{6} \right\rfloor = 15000.$$

Svaki višekratnik od 30 je ujedno i višekratnik od 6, pa od broja višekratnika od 6 u danom nizu treba oduzeti broj višekratnika od 30 u danom nizu, tj. broj

$$\left\lfloor \frac{99999}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9999}{30} \right\rfloor = 3000.$$

Sada je traženi broj $15000 - 3000 = 12000$.

Teorem 1. *Neka je n prirodan broj, p prost broj i s prirodan broj takav da je $p^s \le n < p^{s+1}$, te a najveći prirodan broj za koji vrijedi $p^a | n!$. Tada je*

$$a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor.$$

Dokaz: Prema Lemi 1, broj višekratnika od p koji se pojavljuju kao faktori produkta $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, od p^2 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, od p^3 jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor, \ldots,$ od p^s jednak je $\left\lfloor \frac{n}{p^s} \right\rfloor$. Uočimo da za $k \ge s+1$ nema višekratnika od p^k koji nisu veći od n jer za takve k vrijedi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n}{p^{s+1}} \right\rfloor = 0$, što zajedno s $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \ge 0$ daje $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Sada je očigledno da je suma iz tvrdnje teorema traženi eksponent jer je svaki faktor produkta $n!$ koji je višekratnik od p^m, a nije višekratnik od p^{m+1}, brojen na navedeni način točno m puta i to kao višekratnik od $p, p^2, p^3, \ldots, p^m$. $\square$

Primjer 5. *Odrediti eksponent broja 3 u rastavu broja* $100!$ *na produkt prostih faktora.*

Rješenje: Prema Teoremu 1, traženi eksponent jednak je

$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3^4} \right\rfloor = 33 + 11 + 3 + 1 = 48.$$

Primjer 6. *Rastaviti broj* $10!$ *na produkt prostih faktora.*

Rješenje: Treba odrediti eksponente prostih faktora $p \le 10$ u rastavu broja $10!$ na produkt prostih faktora. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor = 5 + 2 + 1 = 8,\\
&\left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^2} \right\rfloor = 3 + 1 = 4,\\
&\left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor = 2,\\
&\left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1.
\end{aligned}$$

Stoga, $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Primjer 7. *Dokazati da je* $\dfrac{2008!}{7^{330} \cdot 11^{190}}$ *prirodan broj.*

Rješenje: Neka je a najveći eksponent broja 7 i b najveći eksponent broja 11 tako da su 7^a i 11^b djelitelji od 2008!. Tada je

$$\begin{aligned} a &= \left\lfloor \frac{2008}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{7^3} \right\rfloor = 286 + 40 + 5 = 331, \\ b &= \left\lfloor \frac{2008}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{11^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{11^3} \right\rfloor = 182 + 16 + 1 = 199, \end{aligned}$$

pa broj $7^{330} \cdot 11^{190}$ dijeli broj 2008!, te je zadani broj zaista prirodan.

Primjer 8. *S koliko nula završava broj* 2008!*?*

Rješenje: Prirodan broj završava s onoliko nula kolika je najveća potencija broja 10 koja dijeli taj broj. Kako je $10 = 2 \cdot 5$ i 2 je faktor s najvećim eksponentom u rastavu broja 2008! na produkt prostih faktora, broj 2008! završava s onoliko nula koliki je eksponent broja 5 u rastavu tog broja na produkt prostih faktora. Prema tome, broj 2008! završava s

$$\left\lfloor \frac{2008}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2008}{5^4} \right\rfloor = 401 + 80 + 16 + 3 = 500$$

nula.

Primjer 9. *S koliko nula završava* $\binom{180}{90}$ *?*

Rješenje: Kako je $\binom{180}{90} = \frac{180!}{90!90!}$, od kratnosti faktora 5 u brojniku, moramo oduzeti njegovu kratnost u nazivniku

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{180}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{180}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{180}{5^3} \right\rfloor = 36 + 7 + 1 = 44 \\ &\left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{90}{5^2} \right\rfloor = 18 + 3 = 21, \end{aligned}$$

pa $\binom{180}{90}$ završava s $44 - 2 \cdot 21 = 2$ nule.

Primjer 10. *Dokazati da* $n!$ *nije djeljiv s* 2^n.

Rješenje: Neka je $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Tada je eksponent najveće potencije od 2 koja dijeli $n!$ jednak

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^k} = n\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < n,$$

pa 2^n ne dijeli $n!$.

Primjer 11. *Dokazati da je za prirodne brojeve* m *i* n*, broj* $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ *prirodan broj.*

Rješenje: Neka su r i s takvi da je $p^r \leq n < p^{r+1}$, $p^s \leq m < p^{s+1}$. Tada je $mn < p^{r+s+2}$. Dovoljno je pokazati da je

$$S = \sum_{i=1}^{r+s+1} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \geq 0$$

za sve proste brojeve p.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=s+1}^{s+r} \left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{mn}{p^{r+s+1}} \right\rfloor - n \sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^{r} \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{mn}{p^{r+s+1}} \right\rfloor \\
&\geq \sum_{i=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) + \sum_{i=1}^{r} \left(\left\lfloor \frac{np^s}{p^{s+i}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{mn}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) \geq \sum_{i=1}^{s} \left(n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor \right) = 0.
\end{aligned}$$

Zadaci

Zadatak 1. *Odredite eksponent broja* 17 *u rastavu broja* 1000! *na produkt prostih faktora.*

Zadatak 2. *Rastavite na produkt prostih faktora brojeve* 15!, 20!, 25! *i* 30!.

Zadatak 3. *S koliko nula završavaju brojevi* 300!, 456!, 1200 *i* 2000!*?*

Zadatak 4. *S kojom je najvećom potencijom broja* 12 *djeljiv broj* 100!*?*

Zadatak 5. *Koji eksponent ima prost broj* p *u rastavu broja* p^n! *na produkt prostih faktora?*

Zadatak 6. *Dokažite da je* $\dfrac{200!}{3^{60} \cdot 5^{40} \cdot 7^{20}}$ *prirodan broj!*

Literatura

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, D. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, USA, 1994.

[2] L. Čeliković, *Antje funkcija*, Društvo mladih matematičara "Pitagora", Beli Manastir, 1990.

[3] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić, *Elementarna teorija brojeva*, Element, Zagreb, 1994.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika* 2, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] N. Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 1992.