POVIJESNA RUBRIKA

Abraham de Moivre

FRANKA MIRIAM BRÜCKLER*

Who made the spider parallels design,
Sure as Demoivre, without rule or line?
(Alexander Pope, *An Essay on Man*)

Čovjek po kome je nazvana uz Eulerovu najpoznatija formula iz teorije kompleksnih brojeva rođen je 26. svibnja 1667. u gradiću Vitry-le-François (između Pariza i Nancyja). Studirao je logiku, no čini se da studij nikad nije završio. Tokom studija upoznao se s nekim matematičkim tekstovima, među inim i s Huygensovim *De ratiociniis in ludo aleae* u kojem je obrađena teorija igara na sreću tj. osnove vjerojatnosti. Zanimljivo je naime da iako je de Moivre najpoznatiji po formuli za kompleksne brojeve, njegovi glavni doprinosi matematici tiču se teorije vjerojatnosti.

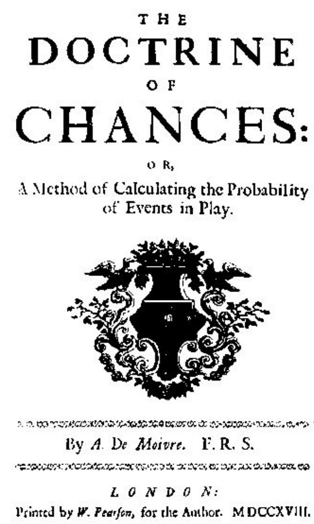
Kako je de Moivre bio protestant, nakon edikta iz Nantesa (1685.) bio je neko vrijeme u zatvoru, a nakon tog se odselio u Englesku gdje je proživio ostatak života. Nakon dolaska u London za život je zarađivao kao privatni učitelj matematike te je učenike podučavao u njihovim domovima, ali i u londonskim kafićima. Prema nekim izvorima, za život je zarađivao i dajući savjete kockarima. Pri dolasku u Englesku je naime već bio kompetentan matematičar koji je bio upoznat s većinom standardne matematičke literature. No, nakon što je vidio Newtonovu *Principiu* uvidio je da se radi o bitno zahtjevnijem djelu od onih koje je ranije proučavao, te je nabavio kopiju knjige, rastavio je na listove kako bi stalno mogao sa sobom nositi par listova i tako je putujući da obiđe svoje učenike proučio i to znamenito djelo. Prvi znanstveni de Moivreov rad objavljen je 1695. i bavi se teorijom fluksija (Newtonova verzija derivacija). Dvije godine kasnije postao je član znanstvenog društva *Royal*

*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

Society. Upoznao se i sprijateljio s Edmundom Halleyem i sir Isaacom Newtonom. Tako je 1710. postao i članom komisije koja je trebala razriješiti svađu Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkrivanju infinitezimalnog računa – *Royal Society* ga je na to mjesto imenovalo upravo zbog njegova prijateljstva s Newtonom.

Ipak, zanimljivo je da je imenovan kao član komisije tako uglednog društva, a da pritom nije bio zaposlen na nekom sveučilištu. De Moivre se naime nadao dobiti poziciju profesora matematike, no kao što je u Francuskoj bio diskriminiran zbog svoje protestantske vjere, u Engleskoj je bio diskriminiran jer je Francuz. Tako je de Moivre cijeli život proveo prilično siromašan i bez stalnog zaposlenja.

Kao što je rečeno, glavni de Moivreovi doprinosi vezani su za teoriju vjerojatnosti. Njegovo glavno djelo je *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* (latinska verzija objavljena je 1711., a engleska 1718.).


THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.

By *A. De Moivre.* F. R. S.

LONDON:
Printed by *W. Pearson*, for the Author. MDCCXVIII.

Slika 1. *Doctrine of Chances* iz 1718.

Kao i mnogi matematičari onog doba, tako se i de Moivre našao u sukobu oko originalnosti svojih ideja s drugim matematičarom. Bio je to manje poznati Pierre Rémond de Montmort koji je 1708. objavio donekle slično djelo *Essay d'analyse sur les jeux de hazard.* Za razliku od sukoba Newton-Leibniz, čini se da je ovaj sukob završio prijateljski.

The Doctrine of Chance je iznimno važno djelo za teoriju vjerojatnosti te je doživilo i više kasnijih proširenih izdanja. U toj se knjizi među inim može naći definicija statističke neovisnosti događaja te niz zanimljivih zadataka vezanih za razne igre. Jedan od zadataka (u izdanju iz 1738.) bio je:

Zadatak 1. *Dan je niz različitih slova a, b, c, d, e, f, etc., i biraju se nasumično. Treba naći vjerojatnost da će se neka od njih pojaviti na istom mjestu u redoslijedu kako su i u abecedi, a da su pritom druga na krivim mjestima. U zadatku iza ovog traže se iste vjerojatnosti, ali ako je dopušteno ponavljanje slova.*

Za slučaj samo tri slova, recimo a, b i c, varijanta gornjeg zadatka bila bi: koja je vjerojatnost da se pri slučajnom rasporedu rasporede tako da a bude prvo, a b i c zamijene mjesta. Imamo 3!=6 mogućih načina (permutacija) da poredamo ta tri slova. Od tih šest načina samo jedan (acb) zadovoljava navedene uvjete te je vjerojatnost takvog rasporeda $\frac{1}{6} \approx 16,67\%$. Ako bismo imali četiri slova a, b, c i d (uz zabranjeno ponavljanje slova) i želimo vjerojatnost da točno tri budu na pravim mjestima, ta je vjerojatnost 0 – ako su tri na pravim mjestima, onda je i četvrto. Za slučaj pet slova a, b, c, d, e vjerojatnost da dva budu na točnom mjestu (recimo, a i b), a ostala tri ispremiješana (nijedno na svom mjestu) je, ako nisu dozvoljena ponavljanja, $\frac{2}{120} \approx 1,67\%$. U tom slučaju naime imamo $5! = 120$ mogućih rasporeda. Od tih nam odgovaraju samo dva: abdec i abecd (u svim drugim koji počinju s ab bar jedno od ostalih slova je na svom mjestu: abcde, abced, abdce, abedc).

Najpoznatiji je svakako tzv. „gamblers' ruin problem" (problem kockareve propasti), koji se pojavio u trećem izdanju 1756. Radi se o sljedećem zadatku:

Zadatak 2. *Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos (recimo 1 novčanu jedinicu) i što jedan dobije drugi gubi (primjerice, bacaju novčić i ako padne pismo, dobiva prvi, a ako padne glava, dobiva drugi). Vjerojatnost da prvi dobije u nekom krugu neka je p, a vjerojatnost da drugi dobije je q (pritom je $p + q = 1$ jer sigurno jedan od njih dvoje dobiva). Igra se igra sve dok jedan od njih ne ostane bez novaca (ruiniran je). Ako prvi kockar na raspolaganju ima n novčanih jedinica za ulaganje, a drugi njih m, koja je vjerojatnost da će prvi biti ruiniran?*

Tim zadatkom se za neke vrijednosti $n = m$ bavio Huygens, a poopćili su ga Jacob Bernoulli i de Moivre. Upravo de Moivre je (1712.) dao prvo objavljeno rješenje tog problema. Tražena vjerojatnost iznosi

$$p_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}.$$

Za slučaj kad je $p = q = 50\%$ (recimo, o pobjedi odlučuje bacanje novčića) formula je

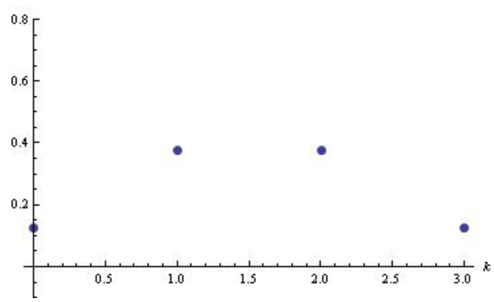
$$p_A = \frac{n}{n+m}.$$

Spomenuto treće izdanje *Doctrine of Chance*[1] je ono koje je najvažnije za teoriju vjerojatnosti i u kojem je normalna distribucija vjerojatnosti opisana kao granični slučaj binomne za velik broj pokusa. Tu se po prvi put u povijesti pojavljuje integral gustoće vjerojatnosti normalne distribucije. Te je rezultate kasnije poboljšao Laplace. Ideja približavanja binomne razdiobe normalnoj opisana je primjerice u članku [1]. Tu je ideju dobio promatrajući binomni teorem (kojim se vezano za infinitezimalni račun bavio i Newton):

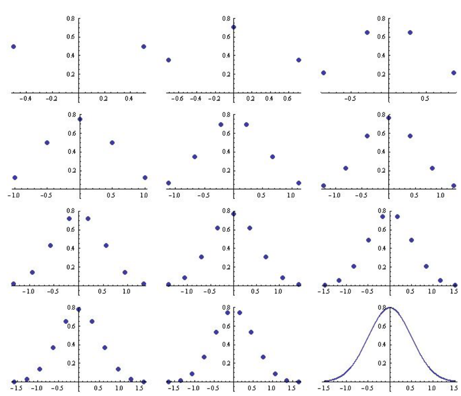
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

[1] Treće izdanje *Doctrine of Chances* može se naći na internetu: *http://www.ibiblio.org/chance/*.

Tu je s $\binom{n}{k}$ označen binomni koeficijent $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. De Moivre je znao Pascalovu formulu (vidi i [2]) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ i da je suma svih binomnih koeficijenata u formuli za $(1+x)^n$ uvijek 2^n. To se lako vidi uvrštavanjem $x = 1$ u formulu za $(1+x)^n$. Primjerice, za $n = 3$ imamo $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ pa je suma koeficijenata $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$. Stoga, ako sve koeficijente „normaliziramo" dijeljenjem s 2^n, zbroj takvih normaliziranih koeficijenata bit će 1. Nadalje, de Moivre je uočio da ako te binomne koeficijente množimo s $\sqrt{n}$ i crtamo tako modificirane koeficijente (tj. crtamo točke $\left(k, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ u koordinatnom sustavu), onda pomakom i skaliranjem apscisa dobivamo nizove točaka koji sve više sliče jednoj te istoj krivulji. Primjerice, za $n = 3$ su binomni koeficijenti redom: za $k = 0$ koeficijent 1, za $k = 1$ koeficijent 3, za $k = 2$ koeficijent 3 i za $k = 3$ koeficijent 1. Normaliziramo dijeljenjem s $2^n = 2^3 = 8$ te dobivamo normalizirane koeficijente: za $k = 0$ koeficijent $\frac{1}{8}$, za $k = 1$ koeficijent $\frac{3}{8}$, za $k = 2$ koeficijent $\frac{3}{8}$ i za $k = 3$ koeficijent $\frac{1}{8}$. Množimo ih sa $\sqrt{n} = \sqrt{3}$ i dobivamo: za $k = 0$ i $k = 3$ koeficijent $\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0,216506$, a za $k = 1$ koeficijent i za $k = 2$ koeficijent $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,649519$. Ako bismo crtali ovisnost takvih koeficijenata o k dobili bismo graf na slici 2.



Slika 2. Normalizirani i s $\sqrt{3}$ skalirani binomni koeficijenti za $n = 3$.



Slika 3. Normalna distribucija kao limes binomnih. Na slikama su za $n = 1, \ldots, 11$ ucrtane točke $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$. Zadnji graf je graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x^2}$.

Ukoliko sad sve točke ponaknemo za $\frac{n}{2}$ ulijevo (za opisani primjer: sve apscise smanjimo za $1,5$) dobit ćemo raspored točaka simetričan obzirom na os ordinata. Ako još sve apscise podijelimo s $\sqrt{n}$, imati ćemo točke s koordinatama $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ i pri crtanju ćemo dobiti grafove kao na slici 3. Slučaj za $n = 3$ nakon pomaka i skaliranja apscisa na toj je slici treći u prvom redu. Na toj je slici kao zadnji graf ucrtana zvonolika krivulja, graf funkcije[2] $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ zadane s $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$. Sa slika je vidljivo da nizovi točaka s povećanjem n postaju sve sličniji tom grafu.

De Moivre se bavio i statistikama smrtnosti, a postavio je i temelje teorije penzija te je 1724. objavio *Annuities on lives*. U tom djelu koristi podatke do kojih je došao Halley, a izveo je formule za iznose penzija temeljem postuliranog zakona smrtnosti i pretpostavke konstantnosti kamata. Tu je primjerice opisao i pravednu podjelu penzije među nasljednicima.

U *Miscellanea Analytica* (1730.) koristio je formulu koja je danas poznata kao Stirlingova. De Moivre ju je upotrijebio u izvodu aproksimacije normalne razdiobe binomnim. **Stirlingova formula** je formula koja aproksimira vrijednost $n!$ (n faktorijela tj. broja $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$) za velike n:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Usporedimo rezultate računanja tih izraza:

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
1	1	0,9
2	2	1,9
3	6	5,8
4	24	23,5
5	120	118,0
6	720	710,1
7	5040	4980,4
8	40320	39902,4
9	362880	359536,9
10	3628800	3598685,6
11	39916800	39615625,1

itd. Stirlingova (bolje bi bilo reći: de Moivre-Stirlingova) formula često se koristi u vjerojatnosti jer se tu često moraju računati $n!$. Kako za n veće od 10 broj $n!$ postaje ogroman (primjerice, $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$) i, što je još gore po računanje, da bismo našli $n!$ prvo moramo naći $(n-1)!$ (jer $n! = n \cdot (n-1)!$), egzaktno računanje $n!$ za velike n zahtijeva jako puno vremena. U puno situacija nije nam nužno imati egzaktnu vrijednost $n!$, nego aproksimativnu pa je Stirlingova formula način kako da smanjimo račun s velikim brojevima, a pritom ne izgubimo puno na točnosti rezultata.

De Moivre je Stirlingovu otkrio do na konstantu tj. znao je da za neku konstantu C i velike n vrijedi $n! \approx C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, a James Stirling je utvrdio da je ta konstanta

[2] Ta je funkcija f funkcija gustoće vjerojantosti s parametrima $\mu = 1$ i $\sigma = \frac{1}{2}$.

$C = \sqrt{2\pi}$. U drugom izdanju *Miscellanea Analytica* de Moivre priznao je Stirlingu doprinos za poboljšanje te formule.

Znamenita **de Moivreova formula**

$$(\cos x + i \sin x)^n = cos(nx) + i \sin(nx)$$

prvi put se u tom obliku pojavila u članku kojeg je de Moivre objavio 1722., no sličnu formulu koristio je već u jednom članku iz 1707. De Moivre ju je izveo za prirodne brojeve n, dok ju je u punoj općenitosti izveo Euler. Ova formula omogućuje jednostavno potenciranje kompleksnih brojeva ako su zadani u trigonometrijskom obliku. Podsjetimo se: kompleksni broj je broj oblika $x+iy$, gdje su x i y realni brojevi, a i je tzv. imaginarna jedinica, čije osnovno svojstvo je $i^2 = -1$. Kompleksne brojeve možemo zamisliti kao točke (x, y) u koordinatnoj ravnini. Uz takvu interpretaciju, koordinatnu ravninu zovemo kompleksnom ravninom. Kompleksni broj $x+iy$ može se zapisati i u trigonometrijskom obliku $r(\cos\phi + i \sin\phi)$, gdje je $r = \sqrt{x^2+y^2}$ apsolutna vrijednost tog kompleksnog broja, a $\phi \in [0, 2\pi\rangle$ je tzv. argument tog broja, određen relacijom $\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}$ tj. $\cos\phi = \frac{x}{r}$ i $\sin\phi = \frac{y}{r}$. U kompleksnoj ravnini, r je udaljenost točke (x, y) do ishodišta, a ϕ je kut koji spojnica ishodišta s tom točkom zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa.

De Moivre je svoju formulu koristio u raznim djelima. Tako je primjerice u jednom članku iz 1739. dan sljedeći primjer.

Primjer 1. *Potrebno je naći sva tri kubna korijena broja* $81 + \sqrt{-2700}$*, kojeg bismo danas zapisali kao* $81+30\sqrt{3}i$ *(oznaku i za imaginarnu jedinicu uveo je Euler). Prvi korak bio je zapisati taj kompleksan broj u trigonometrijskom obliku. Apsolutna vrijednost mu je* $r = \sqrt{81^2 + 2700} = 21\sqrt{21}$*, a argument je dan s* $\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{2700}}{81}$ *pa je* ϕ *približno* $32,68°$*. Nakon tog je de Moivre računao vrijednost izrazâ*

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi+360°k}{3} + \sin\frac{\phi+360°k}{3}\right)$$

za $k = 0, 1, 2$ *(vidimo da je bio svjestan da kompleksan broj ima n n-tih korijena od kojih samo prvi dobivamo iz de Moivreove formule za eksponent* $1/n$*). Kako je* $\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{21\sqrt{21}} = \sqrt{21}$ *i* $\frac{\phi}{3} \approx 10,89°$ *pomoću tablica dobio je sva tri kubna korijena od* $81+\sqrt{-2700}$*:* $\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$*,* $-3+2\sqrt{3}i$ *te* $-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$*.*

De Moivre je morao primijetiti da tri kubna korijena kompleksnog broja mogu ispasti „razumnog" oblika s „jednostavnim" korijenima u izrazu iako argument ϕ polaznog broja nije neki od (za sinuse i kosinuse) „zgodnih" kuteva poput $30°$, $45°$, $60°$, $90°, \ldots$, no čini se da nije bio svijestan da se ne radi o slučaju. On kaže da je „fikcija" tj. nemoguće naći kubne korijene kompleksnog broja bez trigonometrijskih tablica. Tu je za opći slučaj naravno u pravu, jer je prvo potrebno koristiti arkus-tangens za određivanje ϕ, a zatim naći kosinus i sinus od $\phi/3$. Ipak, upravo prethodno opisani de Moivreov primjer pokazuje da u nekim slučajevima tablice (ili u današnje vrijeme: kalkulator) nisu nužne.

Primjer 2. *U primjeru smo imali* $r = 21\sqrt{21}$ *i* $\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{2700}}{81} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$*. Kako je* $\cos\phi = \frac{x}{r}$ *imamo* $\cos\phi = \frac{9\sqrt{21}}{49}$*. Trebamo* $\cos\frac{\phi}{3}$*. Poznata je formula za kosinus trostrukog kuta:*

$$\cos\phi = 4\cos^3\frac{\phi}{3} - 3\cos\frac{\phi}{3}$$

pa ako je $X = \cos\frac{\phi}{3}$ *dobivamo jednadžbu*

$$\frac{9\sqrt{21}}{49} = 4X^3 - 3X$$

odnosno

$$196X^3 - 147X - 9\sqrt{21} = 0.$$

Supstitucija $Y = \frac{X}{9\sqrt{21}}$ *omogućuje da dobijemo ekvivalentnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima*

$$333396Y^3 - 147Y - 1 = 0.$$

Za takve jednadžbe vrijedi: Ako imaju „lijepa" tj. racionalna rješenja $\frac{p}{q}$*, onda* p *dijeli slobodni član* (-1)*, a* q *dijeli vodeći koeficijent* $(333396 = 3^5 \cdot 2^2 \cdot 7^3)$*. U obzir kao rješenja stoga dolaze razlomci* $Y = \pm\frac{1}{3^i 2^j 7^k}$ *s* $i = 0, \ldots, 5$*,* $j = 0, 1, 2$ *i* $k = 0, 1, 2, 3$*. Isprobavanjem se nađu rješenja* $Y_1 = \frac{1}{2}$*,* $Y_2 = -\frac{1}{3}$ *i* $Y_2 = -\frac{1}{6}$ *pa su rješenja polazne jednadžbe* $X_1 = \cos\frac{\phi_1}{3} = \frac{9\sqrt{21}}{2}$*,* $X_2 = \cos\frac{\phi_2}{3} = -3\sqrt{21}$ *i* $X_3 = \cos\frac{\phi_3}{3} = -\frac{3\sqrt{21}}{2}$*. Odgovarajuće sinuse možemo naći preko relacije* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$*, uzimajući u obzir u kom kvadrantu kompleksne ravnine se odgovarajuća točka nalazi, ili pak analognim postupkom preko formule za sinus trostrukog kuta. U svakom slučaju dobit ćemo točno* $\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$*,* $-3 + 2\sqrt{3}i$ *te* $-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ *kao kubne korijene od* $81 + \sqrt{-2700}$*.*

Kako smo već rekli, usprkos znanstvenim sposobnostima, de Moivre se morao prehranjivati privatnom podukom te je umro u siromaštvu. Među ljudima koji su mu bezuspješno probali naći sveučilišnu poziciju bili su kako njegovi utjecajni prijatelji Halley i Newton, tako i Leibniz kojem je Johann Bernoulli na de Moivreovu zamolbu pisao o siromašnom životu de Moivrea. De Moivre se nikad nije oženio.

Poznata je anegdota da je predvidio dan svoje smrti tako što je utvrdio da svaki dan spava po 15 minuta dulje te je sumacijom odgovarajućeg aritmetičkog niza izračunao da će umrijeti na dan kad prespava puna 24 sata (i bio je u pravu). Umro je u Londonu 27. studenog 1754.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Pierre-Simon de Laplace*, Osječki matematički list, **5**(2005), br. 2., 133–140.

[2] F. M. Brückler, *Blaise Pascal*, Osječki matematički list, **6**(2002), br. 2., 119–123.

[3] A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley-IEEE, 2003.

[4] *Mac Tutor History of Mathematics Archives: Abraham de Moivre*, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/De_Moivre.html`

[5] *The Doctrine of Chance*, `http://www.mathpages.com/home/kmath642/kmath642.htm`

[6] *Wikipedia: Abraham de Moivre*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre

[7] http://press.princeton.edu/books/maor/sidebar_e.pdf

[8] http://livetoad.org/Courses/Documents/57ae/Notes/stirling_formula.pdf

Slike su preuzete s web-stranica Mac Tutor History of Mathematics Archives.