INFO-1033 UDK: 519.85:519.712:007
Primljeno / Received: 2008-03-18 Izvorni znanstveni rad / Original Scientific Paper

OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA I EVOLUCIJSKI ALGORITMI

PORTFOLIO OPTIMIZATION AND EVOLUTION ALGORITHMS

Brano Markić

Ekonomski fakultet, Sveučilište u Mostaru, Mostar, Bosna i Hercegovina

Faculty of Economy, University of Mostar, Bosnia and Herzegovina

Sažetak

Optimizacija portfolija vrijednosnih papira je složen i izazovan zadatak. Za njegovo rješenje potrebna su znanja iz više znanstvenih disciplina. Posebno se mogu naglasiti i izdvojiti ekonomska znanja o financijskim tržištima, modeliranju i optimizaciji. Dva su istodobna cilja: maksimizirati prinose portfolija i minimizirati rizik ulaganja. Zato je nužno promatrati i analizirati financijska tržište i na temelju podataka o prinosima vrijednosnih papira selektirati portfolijo koji će osigurati investitorima zadovoljavajuće prinose i prihvatljive rizike. Takav istraživački zadatak se matematički rješava kvadratnim programiranjem. U radu je analiziran i prikazan drugačiji pristup optimizaciji portfolija vrijednosnih papira uporabom genetičkog algoritma. Razvijeno i implementirano je posebno softversko rješenje koje investitoru predlaže portfolijo, a potom i relativni udjel svakog vrijednosnog papira u portfoliju.

Abstract

Portfolio optimization of securities is very complex and challenging task where is needed integrated knowledge of different scientific disciplines for successful solution. Especially may be extracted and stressed economic knowledge which tends to maximize portfolio returns and minimize investment risk at the same time. It is necessary to monitor and analyze financial market and based on data about securities returns to select the portfolio which ensures satisfactory return and acceptable risk. In mathematical sense the problem may be solved by quadratic programming. In these paper is presented another approach to portfolio optimization problem using natural methods in form of genetic algorithm. It is developed and implemented especially software solution that proposes to investor weights of each one security in portfolio.

1. UVOD

Teorija financijski rizik uvijek povezuje s prosječnim kvadratnim odstupanjem prinosa od njihova prosjeka. Ta mjera se naziva varijanca. Veće vrijednosti varijance ili njezina drugog korijena (standardne devijacije) indikator su većeg rizika, a manja standardna devijacija znači i manji rizik ulaganja. Rizik i standardna devijacija su izravno proporcionalni. Zato je složenost problema optimalnog portfolija posljedica ekonomske logike koja manji rizik uvijek povezuje s manjim prinosima, manjom dobiti ili profitabilnosti. Postavlja se zato više pitanja. Kako maksimizirati prinos portfolija za unaprijed prihvaćeni rizik izražen standardnom devijacijom prinosa vrijednosnih papira u portfoliju? Kako minimizirati rizik za unaprijed određen prinos portfolija? Koji je najbolji i najprihvatljiviji odnos između rizika i očekivanog povrata portfolija? Iz takvih pitanja slijede dva kvantitativna cilja: minimizacija rizika i maksimizacija prinosa portfolija. Odgovoriti na postavljena pitanja i pronaći rješenja jedino je moguće ako se prikaže i analizira matematički model koji izračunava očekivani povrat i standardnu devijaciju portfolija kao mjeru rizika ulaganja u vrijednosne papire.

2. OPTIMIZACIJA PORFOLIJA

Portfolijo vrijednosnih papira čine vrijednosni papiri čiji je prosječni povrat R_1, R_2, R_3,…,R_n i njihovi udjeli u portfoliju w_1, w_2, w_3,…, w_n respektivno. Očekivani povrat portfolija (R_p) je:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= E(R_i - ER_i)^2 = E\left[w_1(R_1 - \mu_1) + w_2(R_2 - \mu_2)\right]^2 \\ &= w_1^2 E(R_1 - \mu_1)^2 + w_2^2 E(R_2 - \mu_2)^2 + 2w_1 w_2 E\left[(R_1 - \mu_1)(R_2 - \mu_2)\right] \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_{12} \qquad (2)\end{aligned}$$

gdje je

σ_p^2 = varijanca portfolija

σ_1^2 = varijanca prvog vrijednosnog papira

σ_2^2 = varijanca drugog vrijednosnog papira

w_1 = relativni udjel prvog vrijednosnog papira u portfoliju

w_2 = relativni udjel prvog vrijednosnog papira u portfoliju ($w_2 = 1 - w_1$)

Nakon deriviranja (2) po w_1 dobivamo:

gdje je:
R_p = povrat portfolija n vrijednosnih papira
wi = udjel i-tog vrijednosnog papira u portfoliju ().

($\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$).

Ri = očekivani prinos i-tog vrijednosnog papira u portfoliju.

Izračunati povrat portfolija nije složen zadatak. Međutim, izračunati standardnu devijaciju porfolija je složeniji postupak jer ona nije aritmetička sredina standardnih devijacija vrijednosnih papira u portfoliju. Bez sofisticirane analize se takav pogrešan zaključak može prihvatiti ispravnim rješenjem. Kako se onda izračunava standardna devijacija portfolija (kako se određuje rizik ulaganja u portfolijo)? Prvo ćemo analizirati najjednostavniji portfolijo, a njega čine samo dva vrijednosna papira s prosječnim povratima R_1 i R_2, relativnim udjelima u portfoliju w_1 i w_2 i standardnim devijacijama σ_1 i σ_2. Varijanca portfolija je očekivana vrijednost:

Nakon deriviranja (2) po w_1 dobivamo:

$$\frac{\partial(\sigma_p^2)}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2(1 - w_1)\sigma_2^2 + 2(1 - w_1)\sigma_{12} = 0 \qquad (3)$$

Rješavanjem jednadžbe (3) po w_1 dobivamo:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \qquad (4)$$

Koeficijent korelacije p između dva vrijednosna papira se izračunava kao omjer njihovih kovarijanci

((σ_{12})) i standardnih devijacija σ_1 i σ_2 tj. $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. Zato jednadžba (4) se može zapisati:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \qquad (5)$$

Na temelju jednadžbe (5) slijedi da će varijanca biti najmanja za p=-1 a najveća za p=+1.

Navedene zaključke ćemo ilustrirati jednim primjerom. Pretpostavimo da je varijanca prvog vrijednosnog papira $\sigma_1^2 = (0.7)^2$, varijanca drugog $\sigma_2^2 = (0.4)^2$, a koeficijent korelacije povrata ta dva vrijednosna papira je pozitivan i iznosi p=0.5.

Relativni udjel prvog vrijednosnog papira koji minimizira varijancu (minimizira rizik) je:

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{(0.4)^2 - 0.5(0.7)(0.4)}{(0.7)^2 + (0.4)^2 - 2(0.5)(0.7)(0.4)} = \frac{0.16 - 0.14}{0.65 - 0.28} = \frac{0.02}{0.37} = 0.05$$

Ako vrijednost za udjel prvog vrijednosnog papira uvrstimo u jednadžbu (2) onda je varijanca portfolija:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\rho\sigma_1\sigma_2 = \\ &= 0.05^2(0.7)^2 + 0.95^2(0.4)^2 + 2(0.05)(0.95)(0.5)(0.7)(0.4) = \\ &= 0.0012 + 0.1444 + 0.0133 = 0{,}1589 \end{aligned}$$

Varijanca portfolija je 15,89% dok je varijanca prvog vrijednosnog papira 70% a drugog 40%.

Glavni ulazni podaci u Markowitz-u modelu optimizacije portfolija su očekivani prinosi i varijanca očekivanih prinosa vrijednosnih papira. U realnoj situaciji investitorima stoje na raspolaganju ulaganja u više od dva vrijednosna papira. Potrebno je donijeti odluku koja istodobno ima dva cilja. Prvi je minimizacija rizika portfolija a drugi maksimizacija prinosa portfolija.

Investitor raspolaže podacima o očekivanom povratu svakog vrijednosnog papira u portfoliju Ri i varijancama prinosa σ_i^2 na temelju kojih se može izračunati matrica kovarijanci σ_{ij} (ili koeficijenata korelacije p_{ij}). Ta Markowitzova teorija o strukturi portfolija je ključna točka suvremene teorije portfolija.

U matematičkom obliku ciljevi su:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i R_i \geqslant E$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i \geqslant 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Takav model temeljen na varijanci i očekivanim prinosima vrijednosnih papira u portfoliju nije praktičan za uporabu. Naime, investitorima je na raspolaganju veći broj različitih vrijednosnih papira, a iznos novca za ulaganja je ograničen. Zato je bitan prvi korak kojim se selektiraju vrijednosni papiri u portfoliju na temelju njihova povrata.

U radu se promatraju povrati vrijednosnih papira na tržištu u posljednjih četrdeset perioda (period može biti dan, tjedan, mjesec). Biramo deset vrijednosnih papira s najvećim povratima.. Potom slijedi drugi korak u kojem se implementira genetički algoritam za izračunavanje udjela vrijednosnih papira u portfoliju. Genetički algoritam rješava problem optimizacije portfolija tako što u svakoj generacije jedinki čuva najbolja rješenja, najpovoljniji odnos između povrata i rizika portfolija.

3. GENETIČKI ALGORITAM I OPTIMIZACIJA PORTFOLIJA

Logika genetičkog algoritma se temelji na ideji opstanka najprilagođenijih i najsnažnijih jedinki u populaciji. Zato su potrebne samo tri operacije selekcija, križanje, mutacija i funkcija dobrote (fitness function). Ona ocjenjuje sve jedinke populacije (kromosomi) u generaciji i među njima selektira najbolje. Najbolje jedinke sa svojim genetskim materijalom imaju najveću vjerojatnost izbora za križanje i tako se reproducira nova generacija (jedinke populacije) jedinki s najboljim genetskim materijalom (genima).

Četiri su ključna svojstva genetičkog algoritma [2]:

1. Parametri i njihovo kodiranje

Parametri su objekti optimizacije genetičkih algoritama. Osnovni cilj optimizacije je pronaći najbolju kombinaciju parametara za postavljeni problem. Parametri se najčešće prikazuju (kodiraju) binarnim znamenkama (kao string binarnih znamenki 0 i 1). Kodirati se parametri mogu i u dekadnom brojevnom sustavu.

2. Paralelizam

Genetički algoritmi simultano analiziraju točke distribuirane u različitim dijelovima prostora mogućih rješenja. Za razliku od njih standardni algoritmi optimizacije promatraju (analiziraju) u jednom trenutku samo jednu točku u prostoru mogućih rješenja. Takav je primjer algoritam linearnog programiranja koji se nizom slijednih koraka (iteracija) poboljšava funkcija cilja pomjerajući se od jedne k drugoj točki u nekom lokalnom području.

3. Funkcija cilja

Bitna komponenta genetičkog algoritma je određeni oblik funkcije cilja ili funkcije dobrote (fitness function). Ona je ključ selekcije jedinki u rješenju problema jer je svaka jedinka populacije potencijalno rješenje.

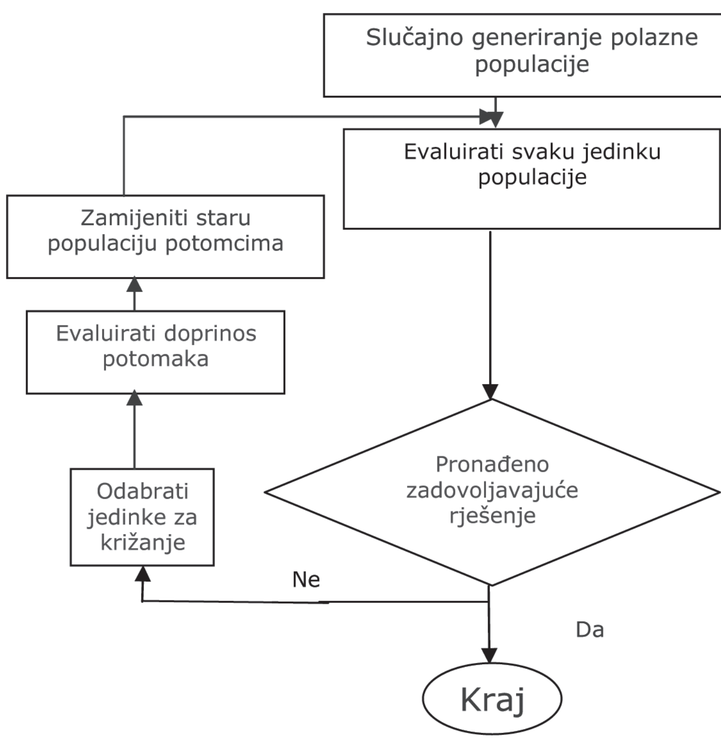
4. Pravila izbora i evaluacije

Istraživanje prostora rješenja se temelji na stohastici. Tako genetički algoritam izbjegava opasnost "zarobljavanja" u lokalne ekstreme. Jedinke populacije u jednoj generaciji određuju kandidate (jedinke) za sljedeće generacije.

Osnovne korake genetičkog algoritma čini sljedeći niz:

1.Generirati polaznu generaciju
2. Evaluirati svaku jedinku populacije i njezin doprinos funkciji dobrote (fitness function)
3. Ponavljati:

- Odabrati jedinke za križanje (roditelje) iz populacije
- Spariti roditelje i dobiti potomke
- Evaluirati doprinos potomaka funkciji dobrote
- Zamijeniti staru populaciju potomcima
- Sve dok se ne pronađe zadovoljavajuće rješenje [6].



Slika 1. Genetički algoritam

3.1. Optimizacija portfolija genetičkim algoritmom – eksperimentalni rezultati

Korake genetičkog algoritma ćemo prikazati u softverskom obliku u procesu optimizacije portfolija vrijednosnih papira. Vrijednosne papire u porfolijo je moguće odabrati na različite načine. U radu se vrijednosni papiri biraju na temelju analize povrata deset vrijednosnih papira koji u posljednju godinu dana (mjesečni prosjeci) imaju najveće prinose. Ti vrijednosni papiri čine portfolijo.

Prvi je korak generirati populaciju udjela u portfoliju sastavljenom od deset vrijednosnih papira. To osigurava sljedeća procedura u Visual Basicu .Net:

```
Public Sub populacija()
    Dim j As Integer, i%,
    Dim b As Single
    Dim z(99) As Single
    Erase v()
    For i = 0 To 99
        For j = 0 To 9
            Randomize
            b = Round(Rnd(), 6)
            v(i, j) = b 'udjel vrijednosnice j u portfoliu
        Next j
    Next i
    For i = 0 To 99
        z(i) = 0
        For j = 0 To 9
            z(i) = Round(z(i) + v(i, j), 6)
        Next j
    Next i
    Erase w()
        Grid1(0).Cols = 10
        Grid1(0).Rows = 100
        Grid1(0).ColWidth(-1) = 6 * Me.TextWidth("H")
    For i = 0 To 99
    For j = 0 To 9
    w(i, j) = Round(v(i, j) / z(i), 4) 'udjel vrijednosnice j u portfoliu preracunat
    Grid1(0).Row = i
    Grid1(0).Col = j
    Grid1(0).TextMatrix(i, j) = w(i, j)
    Next j
    Next i

    End Sub
```

Generira se tablica koja predstavlja populaciju jedinki (kromosoma) a svaki redak je jedinka u kojoj vrijednosti reprezentiraju udjele deset odabranih vrijednosnih papira (Tablica 1.).

Start population of weights (v(i,j)) w(i,j)									
0,064	0,0402	0,2642	0,0905	0,0371	0,2734	0,0628	0,12	0,0249	0,0229
0,1632	0,1117	0,0185	0,1026	0,1498	0,0081	0,1339	0,0039	0,1465	0,1619
0,0838	0,025	0,0123	0,2396	0,0728	0,058	0,1708	0,0216	0,1433	0,1725
0,0884	0,1218	0,1309	0,0246	0,0859	0,09	0,117	0,1452	0,1303	0,0658
0,1601	0,0226	0,1059	0,1853	0,1618	0,1182	0,0341	0,0714	0,0737	0,0668
0,0785	0,0229	0,1898	0,0237	0,1363	0,1844	0,1816	0,0484	0,062	0,0724
0,0448	0,1452	0,2063	0,1765	0,1126	0,0398	0,0493	0,1318	0,0376	0,056
0,1016	0,1394	0,0261	0,0752	0,0286	0,1685	0,078	0,1596	0,1551	0,0679
0,0003	0,1089	0,0211	0,0466	0,2079	0,0479	0,1179	0,0799	0,194	0,1754
0,1458	0,0596	0,1299	0,1073	0,0961	0,1295	0,0294	0,0717	0,1331	0,0977
0,1407	0,0493	0,0324	0,1274	0,1335	0,0708	0,1357	0,1532	0,0116	0,1454
0,1096	0,1496	0,152	0,1446	0,1668	0,0391	0,0692	0,1012	0,0052	0,0628
0,0569	0,1253	0,141	0,1528	0,1174	0,0026	0,0672	0,0356	0,1891	0,1121
0,0954	0,1637	0,0858	0,101	0,1471	0,1356	0,0784	0,1231	0,0348	0,0352
0,1418	0,1738	0,026	0,1314	0,0101	0,1272	0,0226	0,0897	0,1868	0,0905
0,1213	0,1004	0,1632	0,1056	0,0054	0,1278	0,1647	0,0066	0,1716	0,0333
0,0946	0,147	0,174	0,1792	0,0285	0,1123	0,0939	0,014	0,0206	0,1359
0,1483	0,0396	0,0665	0,0315	0,1366	0,1207	0,1225	0,117	0,1336	0,0838
0,1108	0,1357	0,0132	0,1057	0,1031	0,1587	0,1237	0,1333	0,1045	0,0112

Tablica 1. Početna populacija udjela vrijednosnih papira u portfoliju

Nakon generiranja 100 jedinki (tj. sto različitih portfolija) potrebno je izračunati povrate 100 portfolija. Model podataka portfolija sadrži podatke o dnevnim promjenama cijena vrijednosnih papira na temelju kojih se izračunavaju mjesečni prosjeci. Tablica 2. prikazuje prosječne povrate 10 vrijednosnih papira u posljednjih četrdeset mjeseci (stupci tablice su vrijednosni papiri, jedan redak je portfolijo i čuva informaciju o prosječnom povratu svakog vrijednosnog papira u portfoliju).

Percent of stock returns in the last 40 periods

-0,0941	0,0164	-0,0358	0,001	0,0938	0,1747	-0,0526	0,302	0,0636	0,2706
0,2681	0,1393	0,2785	0,0713	0,1562	0,2295	0,3696	0,3385	0,3578	0,2406
0,1137	0,3988	-0,076	-0,0746	0,0338	0,3392	0,1252	0,3791	0,1262	0,3273
-0,0099	-0,0785	0,2118	0,0565	-0,0301	0,1059	-0,0872	0,3162	0,2271	0,3508
0,2544	0,1876	0,0495	0,1986	0,3909	0,3636	0,3898	0,1978	-0,0421	0,0942
0,0291	-0,0887	0,0481	0,2569	0,3663	0,0487	0,3135	0,052	0,332	0,2247
0,1919	0,3225	-0,0726	0,3413	0,2582	0,0005	0,3889	0,0962	0,2008	0,1761
-0,0235	0,115	-0,0762	0,2937	0,3886	0,2095	0,2731	-0,0281	0,3002	0,2605
0,388	-0,0509	0,0277	0,2251	0,1778	0,1537	0,3176	0,2702	-0,0766	0,399
0,2605	0,0299	0,0038	0,2042	0,3305	-0,0117	0,248	0,2391	0,0491	-0,0126
-0,0893	0,395	0,274	0,3602	0,275	-0,0206	0,1136	0,1878	0,3781	0,0369
-0,0344	0,1831	0,3632	0,294	0,1816	0,1978	-0,0439	0,2298	0,3558	0,3556
0,0666	0,2711	0,2389	0,3103	0,0152	0,1127	0,2777	0,128	0,3844	0,1628
0,2788	0,2953	-0,0043	0,1134	0,1976	0,3521	0,0111	0,1355	0,0525	0,1493
0,159	0,1991	-0,0358	0,2314	0,0866	0,0193	0,3192	0,3448	0,3361	0,1259
0,0593	0,0705	-0,0537	0,0588	0,0954	0,0816	0,1789	0,1888	0,3472	0,0262

Tablica 2. Prosječni povrati vrijednosnih papira u portfoliju u posljednjih četrdeset mjeseci

Na temelju prosječnih povrata izračunavaju se kovarijance za deset vrijednosnih papira u portfoliju. Kovarijanca prinose vrijednosnih papira se izračunava na temelju (7):

$$\mathrm{cov}(k, j) = \frac{\sum_{k=0}^{9} \sum_{j=0}^{9} \sum_{i=0}^{39} (rD(i, j) - r(j)) * (rD(i, k) - r(k))}{10} \tag{7}$$

pri čemu je:

rD(i,j) - polje prosječnih mjesečnih povrata j-tog vrijednosnog papira u svakom od 40 mjeseci

r(j) – prosječni povrat j–tog vrijednosnog papira za cijelo razdoblje i izračunava se u sljedećoj logičkoj strukturi petlje:

```
For j = 0 To 9
z = 0
For i = 0 To 39
z = z + rD(i, j)
Next i
r(j) = Round(z / 40, 6)
Next j
```

Izračunavanje kovarijace prihoda portfolija omogućuje sljedeća procedura:

```
Public Sub Kovarijanca_Click()
Dim k As Integer, i%, j%
For k = 0 To 9
For j = 0 To 9
cov(k, j) = 0
For i = 0 To 39
cov(k, j) = cov(k, j) + (rD(i, j) - r(j)) * (rD(i, k) - r(k))
Next i
cov(k, j) = Round(cov(k, j) / 10, 6)
Next j
Next k
End Sub
```

Aktiviranjem procedure Kovarijanca_Click() dobivaju se kovarijance povrata vrijednosnih papira.

Za podatke iz Tablice 2 matrica kovarijanci je dana u sljedećoj tablici:

0,093672	0,007631	-0,014833	-0,012194	0,004366	-0,024599	0,010429	-0,013394	-0,017952	-0,012038
0,007631	0,104239	0,00735	-0,007723	-0,008936	0,011402	0,003521	-0,019804	0,011658	0,001674
-0,014833	0,00735	0,093192	0,024098	-0,014167	0,000542	-0,01465	0,004076	0,016292	0,004215
-0,012194	-0,007723	0,024098	0,074273	0,007374	-0,025407	0,009913	-0,012886	0,011153	-0,001486
0,004366	-0,008936	-0,014167	0,007374	0,088707	-0,005922	0,02179	-0,024068	-0,005372	-0,018018
-0,024599	0,011402	0,000542	-0,025407	-0,005922	0,091636	0,005627	0,023473	-0,014813	0,015065
0,010429	0,003521	-0,01465	0,009913	0,02179	0,005627	0,095139	0,005942	0,016501	-0,008499
-0,013394	-0,019804	0,004076	-0,012886	-0,024068	0,023473	0,005942	0,08216	-0,00901	0,006583
-0,017952	0,011658	0,016292	0,011153	-0,005372	-0,014813	0,016501	-0,00901	0,089737	-0,000631
-0,012038	0,001674	0,004215	-0,001486	-0,018018	0,015065	-0,008499	0,006583	-0,000631	0,056401

Tablica 3. Matrica kovarijanci povrata vrijednosnih papira

Kovarijanca pokazuje koliko se varijacije prinosa dva vrijednosna papira „slažu" u posljednjih četrdeset perioda.

3.1.1 Operacije selekcije i križanja

Nakon generiranja udjela vrijednosnih papira u portfoliju (početne populacije, izračunavanja prosječnih povrata, kovarijanci portfolija potrebno je odabrati jedinke populacije za križanje.

Odabir jedinki za križanje se obavlja slučajno generiranim brojevima tako da jedinke koje doprinose više funkciji dobrote imaju veću vjerojatnost izbora za križanje (roulette wheel). Prvo se ozračunavaju vrijednosti funkcije dobrote za svaku jedinku populacije $F(x_i)$, i=1,2,..n. Potom se zbroje vrijednosti fukcije dobrote svih jedinki populacije .

Jedinke	Normiranje vrijednosti jedinke		Kumulativna vjerojatnost
x_1	0.20	q_1	0.20
x_2	0.30	q_2	0.50
x_3	0.16	q_3	0.66
x_4	0.14	q_4	0.80
x_5	0.20	q_5	1.00

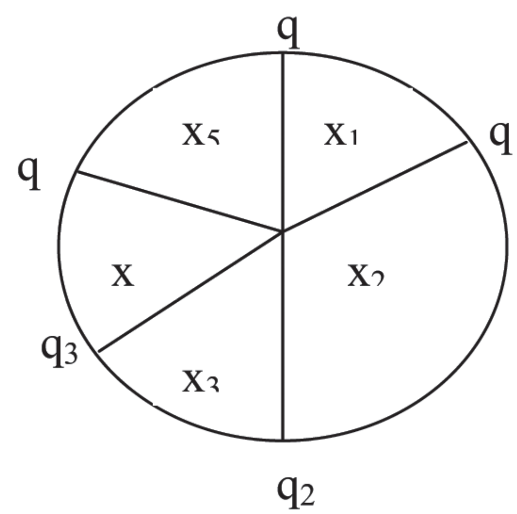
$$F_p = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) .$$

Treći korak je normiranje vrijednosti jedinke u odnosu na cijelu populaciju:

$$p_i = \frac{F(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i)}$$

Iz ***n*** vjerojatnosti dobiva se i ***n*** kumulativnih vrijednosti .

$$q_i = \sum_{j=1}^{i} p_i \ .$$



Operacija selekcije se obavlja tako što se generira slučajni broj $t \in [0,1]$ i odabere jedinka x_i za koju je:

$$x_1 \ ako \ \ je \ t < q_1 \, ; \ q_{i-1} < t \le q_i \qquad \text{i = 1, 2, ..., n.}$$

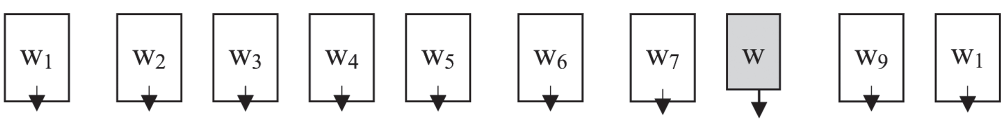
Programsko rješenje opisane operacije selekcije u genetičkom je sljedeća procedura:

```
Public Sub IzborZaKrizanje()
Dim k As Integer, % j, %t, %r
Dim u As Single
Dim vl As Single
j = 0
Do While j < 100
u = Tex(j)
        k = 0
            Do While k < 100
                vl = zbrojPost(k)
                    If  vl  >  u
Then
CrossoverChromosom(j) = k
                    Exit Do
                    End If
                k = k + 1
            Loop
j = j + 1
Loop
End Sub
```

Rezultat operacije selekcije je međupopulacija iz koje križanjem roditelja (dvije jedinke) generiraju dva potomka koji nose genetski materijal roditelja. U radu se primjenjuje jednotočkasto križanje. Zato je potrebno generirati slučajno točku križanja kromosoma. Zamijena desnih dijelova kromozoma tvori potomke za sljedeću populaciju. Ilustraciju križanja kromosoma predočava sljedeća slika:

Zato što zbroj udjela u portfoliju mora biti 1, potrebno je normalizirati rezultat križanja što prikazuje sljedeća slika:

Točka križanja



0,1449	0,1001	0,0791	0,1007	0,036	0,0748	0,0725	0,1206	0,1316	0,1399
0,1225	0,1788	0,0098	0,0812	0,1181	0,1251	0,1707	0,034	0,0088	0,1509

0,1449	0,1001	0,0791	0,1007	0,036	0,0748	0,0725	0,034	0,0088	0,1509
0,1225	0,1788	0,0098	0,0812	0,1181	0,1251	0,1707	0,1206	0,1316	0,1399

Slika 2. Rezultat križanja jedinki populacije

0,161	0,1112	0,0879	0,033	0,04	0,0831	0,0805	0,113	0,1075	0,1828
0,1085	0,0494	0,0087	0,1193	0,1046	0,1108	0,1512	0,1068	0,1166	0,1239

Slika 3. Normalizacija udjela portfolija nakon križanja

Prinos portfolija je određen funkcijom

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

a rizik ulaganja izrazom. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$.

Funkcija dobrote

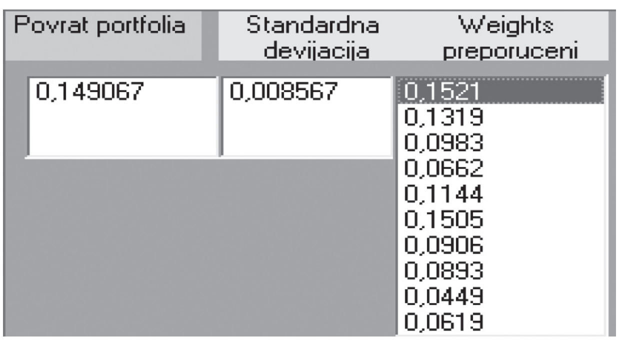
$$f = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i R_i}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \right\rangle$$

[1] nastoji maksimizirati odnos između očekivanih prinosa portfolija i rizika.

Nakon 100 generacija porfolija vrijednosnih papira pri čemu se u svakoj generaciji pronalaze jedinke s najboljim odnosom između očekivanog povrata i rizika portfolija bira se najbolji (efikasan) portfolijo.

Izračunavanje varijance svakog portfolija (ukupno sto portfolija) u populaciji omogućuju sljedeće logičke strukture petlje:

```
For k = 0 To 99
        SDp(k) = 0
        For i = 0 To 9
        For j = 0 To 9
        SDp(k) = SDp(k) + w(k, i) * w(k, j) * cov(i, j)
        Next j
Next i
        SDp(k) = Round(SDp(k), 6)
        List3.AddItem (SDp(k))
Next k
```



Slika 4. Optimalni udjeli, očekivani povrat i rizik portfolija

Rezultat primjene genetičkog algoritma prikazuje sljedeća slika:

Vidljiv je očekivani povrat od 14.9%, rizik (standardna devijacija portfolija) 0.85% te udjeli

vrijednosnih papira w_1=15.21%; w_2=13.19%; w_3=9.83%; w_4=6.62%; w_5=11.44%; w_6=15.05%; w_7=9.06%; w_8=8.93%; w_9=4.49% i w_{10}=6.19%.

Postignut je cilj optimizacije odnosa između povrata i rizika portfolija vrijednosnih papira kroz niz generacijskih ciklusa (200 generacijskih ciklusa). Svojstva početne populacije jedinki (relativni udjeli deset vrijednosnih papira u portfoliju) u procesu selekcije, križanja i mutacije omogućuju kreiranje jedinke koja u nizu od dvjesto generacija (broj generacija se može povećati što je jednostavno u prikazanom softverskom rješenju) daje najbolji odnos povrat / rizik portfolija.

4. ZAKLJUČAK

Optimizacija portfolija vrijednosnih papira složen je teorijski i aplikativni zadatak. U teorijskom smislu je složen zato što istodobno nastoji postići dva cilja: maksimizirati očekivane prinose i minimizirati rizik ulaganja u portfolijo. Iz ta dva istodobna cilja slijedi i aplikativna složenost posebno kada broj vrijednosnih papira u portfoliju nije malen. Genetički algoritam se pokazao izvrsnom metodom koja svojim operacijama selekcije, križanja i mutacije u nizu generacija selektira najbolje kromosome i približava se efikasnom portfoliju (generaciji koja sadrži jedinku s relativnim udjelima koji reprezentiraju najbolji odnos povrat/rizik). U radu je prezentiran i originalni računalni program prisan u Visual Basic .Net-u. Razvojni alat Visual Studio .Net je pokazao zadovoljavajuću razvojnu i aplikabilnu moć.

U radu je mutacija postavljena na 5%, a vjerojatnost križanja na 1. Eksperimentalni rezultati za populaciju od sto jedinki nakon 200 generacija je pokazao zadovoljavajuća rješenja. Rješenje se u potpunosti temelji na postuku traženja i optimiranja inspiriranim biološkom evolucijom.

LITERATURA

1. Chi-Ming Lin, Mitsuo Gen (2007) *An Effective Decision-Based Genetic Algorithm Approach to Multiobjective Portfolio Optimization Problem*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 5, 201 – 210.
2. Goldberg, D.E. (1999). *Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning*, Addison-Wesley, Redwood City, CA.

3. Kin Keung Lai, Lean Yu, Shouyang Wang, and Chengxiong Zhou (2006), *A Double-Stage Genetic Optimization Algorithm for Portfolio Selection*, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong,
4. M. Ehrgott, K. Klamroth and C. Schwehm, (2004), *An MCDM approach to portfolio optimization*, European Journal of Operational Research, **155**, 752 - 770.
5. Markić, B.; & Tomić, D, (2002), *The linear programming model solving using the genetic algorithms*, The 3th INTERNATIONAL DAAM SYMPOSIUM "Intelligent Manufacturing &Automation: Learning from Nature 23-25 October 2002.
6. Markić, B. & Tomić, D., (2003), *Genetic algorithm for economic modeling*,
7. Chapter 33, DAAAM International Scientific Book 2003, B.Katalinic (Ed.), str. 381-392, Published by DAAAM International, ISBN: 3-901509-36-4, ISSN 1726-9687, Vienna, Austria 2003.

DRUŠTVO I TEHNOLOGIJA 2008.
SOCIETY AND TECHNOLOGY 2008.
XV. MEĐUNARODNI ZNANSTVENI SKUP
XV. INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENC