Metodika 17
Vol. 9, br. 2, 2008, str. 328-336
Stručni rad
Primljeno: 10.05.2008.

KONSTRUIRANJE I IZMJENA MATEMATIČKIH ZADATAKA U RAZVIJANJU UČENIKOVE INICIJATIVE I POTPUNOG SUDJELOVANJA

Mirela Măcelaru

Isusovačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek

Sažetak – *Članak daje kritički prikaz aktivnosti koju je autorica izvela s manjom grupom učenika srednje škole. Njegova svrha je istražiti načine kojima nastavnik može izmijeniti početni zadatak kako bi se razvijala učenikova inicijativa i sudjelovanje u razmišljanju. Opisuje se rad grupe na matematičkom zadatku za vrijeme kojeg je nastavnik bio samo sudionik diskusije povremeno pomažući učenicima. Pokazalo se da su u opisanom slučaju učenici pokazali inicijativu aktivnim sudjelovanjem u diskusiji te usmjeravanjem rasprave na načine koje su smatrali primjerenima za zadatak koji se nalazio pred njima. To pokazuje da učenici pozdravljaju takav pristup učenju.*

Ključne riječi: *diskusija, učenikova inicijativa, promjena zadataka*

UVOD

Ovaj rad prikazuje i kritički promišlja matematičku aktivnost koju sam izvela s manjom grupom učenika srednje škole. Bio je to proces izrade i kasnije izmjene početnog zadatka u svrhu istraživanja načina na koji učenici misle i upotrebljavaju svoje matematičke vještine kao što su: zaključivanje i generalizacija, zamišljanje i izražavanje zamišljenog, davanje potankosti i pretpostavljanje. Bilo je to također istraživanje načina razvijanja učeničke inicijative za vrijeme rada na matematičkim zadatcima.

DRUŠTVENA SREDINA

Istraživanje koje se kasnije navodi u tekstu provedeno je na manjoj grupi učenika u neformalnom okruženju (izvan škole). Učenici su bili različitih sposobnosti, neki su navikli na dobivanje više uputa u školi, a neki su poticani na rad u ozračju u kojem mogu slobodno donositi zaključke. Njihov odnos s nastavnicom (sa mnom) bio je pozitivan; nisam osjetila da su me doživjeli kao prijetnju budući da nisam njihov ocjenjivač (možda su zato i slobodno govorili ono što misle). Također, budući da je bilo riječi o maloj grupi učenika, imali su priliku zajedno diskutirati, i nakon nekog vremena pitanja i odgovori su se razmjenjivali među učenicima, ali ne nužno između učenika i nastavnice (mene); dakle, i ja sam bila samo sudionik. Sve je to bio dio atmosfere.

Postoji nekoliko specifičnih etičkih razmišljanja koja su vezi s opisanim zadatkom. Sakupljeni podatci su kvalitativni – oni uključuju izvatke iz diskusija i među učenicima i moje bilješke s terena. Roditelji su bili obaviješteni o postupku i dobiven je njihov pristanak da se podatci koriste u istraživanju. Također sam učenicima objasnila da zadatci ne služe za ocjenjivanje te je zajamčena njihova anonimnost. Naravno, da je ovaj zadatak bio izveden u formalnom okruženju, u razredu, do nekih od gore navedenih situacija uopće ne bi ni došlo, budući da nastavnik smije zadavati zadatke u svrhu provjere znanja.

RAD NA ZADATKU

Naravno da nastojim da učenici s kojima radim započnu svaki zadatak s pitanjem: Što znam? Što želim? Nadam se da će njihova buduća inicijativa biti olakšana procesom *scaffolding-fading*[1] . Učenje je postupan proces i sastoji se od neprekidnog nadograđivanja i modificiranja onoga što se prethodno dogodilo.

Može se sagledati kao okvir *vidi-iskusi-svladaj* (vidi Mason, 1999): vidimo koncept, iskusimo ideju upotrebom prethodno svladanih vještina i svladavamo uporabom novostečenih vještina u različitim kontekstima. To je okvir koji smo primijenili u našem slučaju kako bismo započeli aktivnosti.

U početnim zadatcima od učenika se očekivalo da svladaju pravila (sinus, kosinus) koja su prethodno upoznali rješavajući jednostavne primjere (vidi Dodatak 1, primjere 1 i 2), koje sam namjeravala izmijeniti u kasnijoj fazi rada s istom grupom učenika. Dakle, krenuli su od onoga što su već znali. Također sam uvela vježbu za pamćenje (mnemotehniku) koju sam pronašla na internetu. Rekla sam učenicima da im izraz *I'm sorry I ate chocolate* može pomoći da lakše zapamte da imamo „ jednu stranicu: pravilo za sinus i jedan kut: pravilo za kosinus" ili, na engleskom „*1 Side Sine and 1 Angle Cosine*". Ako primijenimo mnemotehniku imamo: ***I*(1)*'m* *S*(ide)*o* *S*(ine)*orry* *I*(1) *A*(ngle)*te* *C*(osine)*hocolate*.**[2] Učenici su na ovu moju primjedbu reagirali pozitivno. Sesija je započela uz element zaba-

1 Scaffolding – uputa koja vodi učenika k samostalnoj i samoregulirajućoj kompetenciji vještina, i kako se povećava učenikovo znanje i kompetencija učenja, učitelj postupno reducira osiguranu pomoć (*fading*) (*Wood, Bruner i Ross*,1976).

2 Ovu je mnemotehniku nemoguće primijeniti na hrvatskom jeziku pa bi trebalo pronaći neki drugi način za pomoć pamćenju (op. prev.)

ve, što je učenike opustilo i počeli su otvorenije razgovarati. Neki od njih i danas pišu kao podsjetnik u svoje bilježnice: 1SS1AC.

Moja pitanja učenicima, dok smo radili na prvim vježbama (Dodatak 1.1 i 1.2), bila su većinom zatvorenog tipa: Kakav je ovo trokut? Je li to uopće bitno? Što mi možete reći o kosinusu općenito (definicija) i o odnosu s pravokutnim trokutom? To su također bila pitanja kojima se ponavljaju činjenice koje učenici već znaju.

Iz ove vrste pitanja i moje uloge kao osobe koja postavlja pitanja (suprotno od slušanja i diskutiranja) uslijedio je daljnji razvoj (vidi Dodatak1.6). Ova se aktivnost (Dodatak 1.6) odnosi na drugu razinu (razinu analize) van Hieleovih razina razmišljanja (Mason i Johnston-Wilder, 2004, str. 59).[3] Kao što van Hiele objašnjava, „…na ovoj razini za učenike pojmovi mogu postojati izdvojeni iz situacija u kojima su nastali. Ovi pojmovi egzistiraju u mreži povezanih pojmova... Rasprave se mogu razriješiti vraćanjem na definiciju…“ (ibid.).

U sljedećem koraku učenici su nastavili s formulom sinusa. To može biti prepoznato kao *procept*.[4] Svaka trigonometrijska formula uključuje proces dijeljenja duljine dviju stranica i produkt, i broj koji predstavlja omjer tih dviju duljina. Učenici su u ovom slučaju imali mogućnost vidjeti te odnose u novom trokutu, i …“fleksibilnost da uoče kako se povećavanjem kuta… povećava i sinus… i da daju značenje pojedinim slučajevima… fleksibilnost da se prošire na slučaj kada se kut povećava na više od 90° ili postaje negativan“ (Gray i Tall, 1992, str.7).

Da bi se započeo zadatak i da bi se učenici više uključili, prezentirane su razne varijante istog zadatka. Učenici su poticani da više govore i diskutiraju postavljanjem analitičkog tipa pitanja kao što su: Što je jednako? Što je različito? Što znate o trokutima i zbroju kutova? To pokazuje kako učenici povezuju ranije znanje s trenutnom temom. Pitanja predstavljaju način istraživanja koji pojašnjava. Ovdje je svrha bila da se učenici potaknu na razgovor, kako bi se razvio uzorak komunikacije. Budući da ovo nije provođeno u formalnom okruženju, s učenicima koji obično rade skupa, prvo je trebalo stvoriti ozračje povjerenja i otvorenosti. Htjela sam za vrijeme rada na zadatku objediniti različite aspekte aktivnosti učenika (uvježbavanje/ svladavanje formula, pretpostavljanje/diskutiranje, generaliziranje/primjenu). Kako bi se pokrenula diskusija, učenicima je dana mogućnost da izaberu kako će rješavati zadatak (kojom će se metodom koristiti) ili kako će uopće postaviti problem (izabrati prikaz koji može biti simboličan ili slika), što je značilo prilagođavanje zadatka za tu svrhu. Neke od mogućih varijanti koje sam prezentirala su: zadatak riječima, situacije iz stvarnog života, zagonetka (vidi uzorke u Dodatku 1.7).

---

[3] Ostale razine koje van Hiele definira su: vizualizacija, apstrakcija, informalno zaključivanje i formalno zaključivanje.

[4] Procept – sagledavanje simbola kao proces i kao pojam (koncept) definirali su *Gray i Tall (1994).*

Ustanovljeno je da uporaba zadatka riječima učenike potiče da razmišljaju o tome kako ga pretvoriti u „formalnu“ matematiku, bilo formulom, izrazom ili grafom. Na primjer, kada sam zadala takav tip zadatka (vidi Dodatak 1.3), učenici su prvo jasno u dva stupca pisali dane podatke: (a) Što znamo? (b) Što tražimo? Zatim su skicirali situaciju i nepoznanicu označili sa x. Nadam se da je to kod nekih od njih bila posljedica procesa *scaffolding-fading* (vidi bilješku 1), budući da je to uobičajen način pristupanja zadatku. Na pitanje: Što bismo sljedeće trebali napraviti? Kako ćemo spojiti (a) i (b)? svi učenici su nacrtali sliku. Iako su se slike pomalo razlikovale, bilo je jasno kakva je situacija (u ovoj su fazi jedni s drugima uspoređivali skice). Primijetila sam kako jedan od učenika komentira sliku drugog: *To nije precizno zato što tvoj kut izgleda kao da je veći od 21°.* Vrijedi napomenuti da je drugi učenik odgovorio: *Nema veze, to je samo slika.* Možda se o tome moglo i dalje raspravljati – koliki bi mogao biti najveći mogući kut u nekoj sličnoj situaciji i zašto i kakav bi to učinak imalo na rezultate. Razmišljala sam o tome bih li se trebala uključiti u njihovu diskusiju. Međutim, odlučila sam ih ostaviti da opravdaju svoje izbore jedni drugima, iako je moguće da tako mogućnost za diskusiju osigurana zadatkom nije pretvorena u *priliku* za učenje koju bi trebalo iskoristiti (o ovome, vidi Mason i Johnson-Wilder, 2004, str. 45).

Učenici su uvidjeli da predstavljena situacija ima veze s istaknutim trokutom, kao što to pokazuje jedna od učeničkih reakcija: *Moramo napraviti nešto s trokutom*. Moguće je da to otkriva odmak od enaktivnog (manipulacije pravila za sinus i kosinus), preko ikoničkog (uviđanje povezanosti za određenu situaciju) i kasnije, do simboličkog (izražavanja problema uz pomoć formalnih definicija sa značenjem). Učenici su svojim riječima izrazili koja je nepoznata udaljenost u odnosu na početnu udaljenost i što im treba da bi ju riješili. U početnim zadacima (Dodatak 1.1 i 1.2) samo su se bavili formulom; a sada su trebali zastati i razmisliti o situaciji.

Osjetila sam da učenike treba potaknuti da razmisle o odgovarajućoj metodi za rješavanje zadanog problema. Međutim, pitanje je sada prešlo od uvježbavanja u analizu. „Kako ćete riješiti trokut ako su zadani razni podatci – stranice, kutovi, visina, simetrale kuta…, dajte nekoliko primjera sa skicama.“ Moja je uloga bila ona *uvoditelja*, dok sam pokušavala uključiti učenike u proces odabira. To je sve zahtijevalo neko vrijeme, ali im je dalo priliku da rade tempom koji njima odgovara, da izaberu elemente i metode koje će dati kao odgovor i da na kraju shvate matematiku kao „konstruktivni pothvat“ (Mason i Johnston-Wilder 2004, str.48). To je također pridonijelo razvoju osjećaja autorstva. Treba napomenuti da u formalnom okruženju, zbog nedostatka vremena i ograničenja kurikuluma, takav pristup nije uvijek moguć. Pretpostavljam, međutim, da bi se mogao rabiti u domaćim zadaćama, iako bi se kasnije trebao prokomentirati u razredu.

Sagledavajući moguće metode za rješavanje problema koji im je zadan učenici su odabrali onaj koji je primijenjen u ovom slučaju. Upitala sam ih: „Što obično napravimo kada nam je ponuđen izbor?“ „Opravdamo svoj izbor“, bio je njihov odgovor. U odgovoru je prepoznatljiv element *fading*. Da bi došlo do diskusije, mislila sam da bi bilo korisno upotrijebiti analitička pitanja kao što su: „Što bismo ovdje mogli promijeniti, a da udaljenost *x* ostane jednaka?“ To im je dalo mogućnost da istraže doseg dopuštene promjene za opisani zadatak. Dakle, učenici su se više uključili *postavljanjem pitanja* i *diskutiranjem* (vidi izvadak konverzacije u Dodatku 2.1).

Još jedan način kojim se može postići veća uključenost jest da se potakne učenike da uoče detalje u velikoj slici. To se odnosi na ono što Tahta (1981) naziva *unutarnjmi* zadatakom, dok koriste matematičku sposobnost specijaliziranja. Primijetili smo da je pravilo kosinusa generalizacija Pitagorinog poučka i diskutirali kako se do toga došlo. Kako bi se učenici u potpunosti uključili u razmišljanje, zadatak je još više otvoren njihovim uključivanjem u *autentičnu aktivnost* (vidi Dodatak 1.4). Kao što je Papy (2004, str.109) rekao: „Svi koncepti počinju u svakodnevnim situacijama bliskim svim učenicima.“ Tahtinom (1981) terminologijom bio bi to *meta-zadatak*.

Ono što je drukčije u novoj formulaciji zadatka je što je postavljeno pitanje *istraživačka analiza*. Ovdje su učenici trebali neke upute pa sam ih morala potaknuti jasno im objasnivši situaciju: „Ako imamo udaljenost između točaka A i B , što još trebamo znati ako želimo izračunati udaljenost AC u sljedećoj situaciji: na primjer, stojimo na ovoj strani rijeke na mjestu A i možemo djelovati samo na ovoj strani, mjeriti, itd…“ Možda im je bila potrebna moja pomoć u ovom primjeru budući da im je pitanje pre-dvosmisleno. Dakle, prvo smo razmišljali o tome što treba napraviti/znati kako bi se riješio ovaj problem, i tada smo osmislili zadatak (vidi Dodatak 1.5) da bismo ga riješili. Dalje su nastavili raditi samostalno. Ja na to gledam kao na izradu uzorka za ideje Vigotskog o zoni proksimalnog razvoja (ZPR)[5]. Nakon dobivenih uputa učenici su dalje individualno istraživali. Osim toga, ovdje je usvojen i novi okvir: *manipulacija-shvaćanje smisla-artikulacija.* Na početku su učenici manipulirali objektom (u ovom slučaju trokutom), zatim su razumjeli smisao osnovne strukture, tj. odnos između elemenata različitih trokuta, i na kraju su, na temelju onoga što su shvatili, ta pravila upotrijebili kako bi se riješili novi, kompliciraniji problemi. U tom pogledu Goos (2004, str.104) je primijetio da je „matematičko razmišljanje čin stvaranja smisla i počiva na procesima specijalizacije i generalizacije, predviđanja i opravdavanja“.

Ponekad, zadajući takve zadatke i pokušavajući potaknuti učenikovu inicijativu, učenici vide/rade stvari koje se teško mogu predvidjeti. Kao što pokazuje jedan od razgovora koji smo vodili (vidi Dodatak 2.2), diskusija se može udaljiti od početne teme. Međutim, cijenila sam inicijativu kojom su se učenici služili da bi shvatili. Pokazalo se da su učenici iskreno zainteresirani za matematiku i da žele shvatiti.

[5] ZPR – razlika između onoga što učenik može napraviti bez pomoći i onoga što može napraviti uz pomoć, definirao Vygotski (1978)

Nadalje, učenikova se inicijativa najbolje potiče „time da učenici izmišljaju primjere pitanja" (Mason i Johnston-Wilder, 2004, str.43). Primjer u Dodatku 2.3 predstavlja takav slučaj, primjer koji je jedan učenik sam stvorio (kako ga naziva Mason, 2004), koji predstavlja jasni dokaz zanimanja, razumijevanja i inicijative.

Što se tiče moje reakcije, primijetila sam da sam im povremeno željela dati rješenja i savjete prije nego što su sami shvatili što trebaju učiniti. Bez sumnje, utjecala sam na učenike da razmišljaju na specifičan način, budući da je u vrijeme provođenja ovog istraživanja s njima obrađivana tema o pravilima sinusa i kosinusa. Pitala sam se bi li zadatak u Dodatku 1.3 riješili s istom lakoćom da je prezentiran nešto kasnije, u drugom kontekstu, koji nije uključivao prethodnu prezentaciju pravila sinusa i kosinusa. Također sam sebi postavljala pitanja o motivaciji – primijetila sam da je jedan učenik nakon diskusije i nakon što je završio s računanjem počeo crtati brod sa svim svojim detaljima (dok je čekao da ostali završe). Morala sam razmisliti o tome bih li trebala čekati da svi dođu do krajnjeg rezultata (i onima koji su ranije završili u međuvremenu zadati još neki, zahtjevniji zadatak) ili prekinuti nakon što se došlo do zaključka i ostaviti računanje za kasnije ili za domaću zadaću. Također sam shvatila da se učenici pri izražavanju vlastitog mišljenja osjećaju ugodno ako je ozračje koje stvorim unutar grupe učenika poticajno, prijateljsko i komunikativno. Penner (1984) točno primjećuje da se „kod učenja radi o uspostavljanju uspješnog socijalnog odnosa s učenicima". Uz to, Murray (1991) naglašava da „entuzijazam, jasnoća i izražajnost pomažu učenicima da nauče – treba ih navesti da obraćaju pažnju. Nastavnikov entuzijazam je u skladu s dobrim poučavanjem. Nastavnikov entuzijazam motivira učenike da dublje istražuju predmet i izvan učionice".

ZAKLJUČAK

Imajući na umu svrhu razvijanja učenikove inicijative, pokušalo se proces izmjene početnog zadatka kao istraživanje načina na koje učenici razmišljaju i koriste se svojim vještinama kao što su: zaključivanje i generalizacija, zamišljanje i izražavanje zamišljenog, davanje potankosti, predviđanje i uvjeravanje samih sebe i drugih. Pokazalo se da učenici pozitivno reagiraju na ovu vrstu aktivnosti, što je bilo vidljivo iz njihova sudjelovanja u aktivnosti, učenja rezultata te rada na zadatcima. Njihovo sudjelovanje u diskusiji poboljšalo se jer se odgovori na njihova pitanja i ideje nisu odgađali, nego su, naprotiv, odmah dobivali objašnjenja. Učenikova inicijativa se očitovala u dijalozima koje su vodili i u kojima je nastavnica bila samo promatrač, budući da je njezino sudjelovanje ograničeno na poticanje i pitanja koja ih vode kroz zadatak.

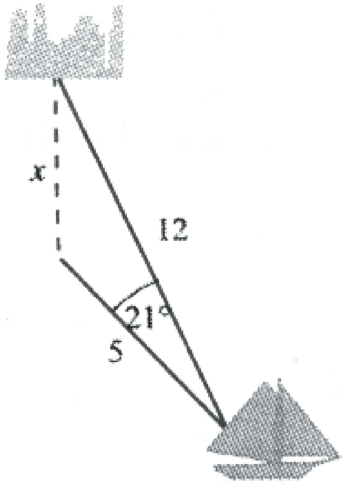
Bitno je naglasiti da je opisana situacija imala određene prednosti jer rad u neformalnom okruženju nije nametao pritisak da se držimo zadane lekcije. Ovaj se problem često susreće, ali se zbog nedostatka vremena ne uspijeva istražiti za vrijeme nastave. Jedan od načina na koji se to može riješiti jest da se, kada se pojavi prilika, skrene s teme, jednostavno ignorira ostatak lekcije i krene smjerom kojim ide diskusija. Još jedan način je predvidjeti trenutke i mjesta za koristan matematički dijalog i iskoristiti ih kao uvod određenoj lekciji, ili dopustiti učenicima da to sami naprave.

DODATAK 1:

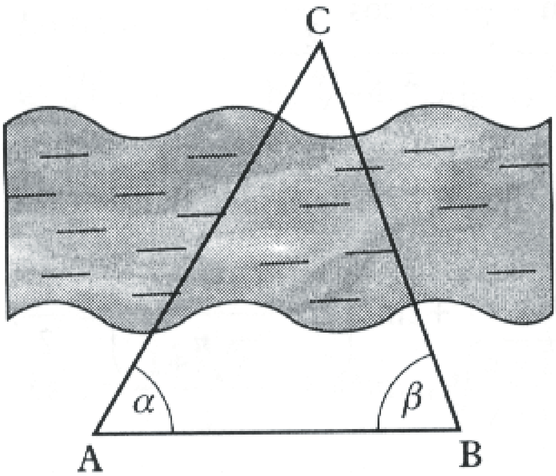
1. Riješi trokut ako je a = 40 cm, b = 37 cm, i $\gamma = 18°$
2. Riješi trokut ako je a = 17 cm, b = 10 cm, c = 9 cm
3. Brod plovi prema luci koja je udaljena 12 km. Nakon 5km kapetan primjećuje da je skrenuo s kursa za 21°. Koliko je tada brod bio udaljen od luke? (Vidi sliku 1)
4. Kako bi izračunao/la udaljenost do nepristupačnog objekta?
5. Izračunaj udaljenost između A i C na drugoj strani rijeke, ako znamo udaljenost između točaka na istoj obali rijeke.

   |AB| = 300 m. Kutovi gledani s A i B su 52°18', 103°40'

   (Vidi sliku 2)



Slika 1.



Slika 2.

6. Izračunaj stranice *a* i *b* ako je c = 10 cm, v_c = 5 cm, α = 62°10'

   Učenik: *Sada možemo izračunati sinus*.

   Nastavnik: *Kako?*

   Učenik: *Imamo pravokutni trokut*.
7. Zagonetka: http://www.geocities.com/mathematicsplus/resources.html

DODATAK 2:

1. Učenik: *Možemo promijeniti kut otklanjanja, ali tada…još nešto?*

   Nastavnik: *Što?*

   U: *Ako je kut različit, tada brod mora ploviti duže ili kraće od 5km.*

   N: *Recimo da se kut promijeni na 30°. Što bi se tada dogodilo?*

   U: *Promjene od 5km.*

   N: *Kako? Misliš li da bi brod plovio duže ili kraće? Možeš li to proučiti? Možeš li mi to reći bez računanja?*

2. Duljine stranica trokuta „su u omjeru“ 2: 4: 8. Pronađi najmanji kut ovog trokuta.

   Učenik: *Nemamo konkretne duljine; možemo li dobiti točan rezultat?*

   Nastavnik: *Zašto to pitaš?*

   U: *Sve je nepoznato.*

   N: *Koja je mjerna jedinica za kut?*

   U: *Stupanj.*

   N: *Razmisli o ovome: sinus kuta je 0,5. 0,5 od kojih jedinica?*

   S: *Ništa, samo broj*.

   Drugi učenik: *Možda ako imamo neke jedinice s lijeve i desne strane jednadžbe možemo ih skratiti i ostat ćemo bez jedinica*.

   Ovdje jedna učenica pokušava primijeniti nešto što je vjerojatno naučila ranije, možda se prisjeća zadatka gdje se to pojavilo i pokušava shvatiti što treba učiniti.

   N: *Možeš li dati primjer?*

   U: $2\sin\gamma=2b\sin\gamma$.

   N: *Što bi ovdje nazvala jedinicama?*

   U: *Sinγ*.

   N: *Aha, dakle prekrižiš ih s obje strane i dobivaš b=1?*

   U: *Da.*

   N: *Dobro razmišljaš. Možeš li samo objasniti zašto je sinγ jedinica?*

   U: Dobro, nije jedinica, možda izraz…. ili nepoznanica?

   Ideja je bila dobra, jedino je jezik bio neprikladan.

   Učenica$_1$ (nakon grupne usporedbe dvije i dvije strane): *Ali mislila sam da to ne smijemo raditi.*

N: *Raditi što?*

U_1: *Razbiti omjer u dva dijela.*

U_2: *Zašto misliš tako? Mijenja li to omjer za ove duljine?*

U_1: *Možda.*

N: *Misliš li da to možeš provjeriti? Izaberi brojeve (proizvoljne) i pokušaj. Funkcionira li? Možeš li iz ovog primjera zaključiti da uvijek vrijedi? Što je važno za neki omjer?*

Učenica zaključuje: Za omjer ne trebamo mjerne jedinice (ako uspoređujemo „iste“ stvari.

3. Ispitaj udaljenosti koje su prešli igrači/lopte ili optimalne kutove za određene igre.

LITERATURA: vidi popis literature u inačici članka na engleskom jeziku.