

Originäre wissenschaftliche Arbeit

Angenommen am 22.12.2005.

LÁSZLÓ VÖRÖS

# Reguläre Körper und mehrdimensionale Würfel

## Regular Bodies and Hypercubes

### ABSTRACT

The paper gives useful connections between regular bodies, bodies originated from them and the 2D and 3D projections of multidimensional cubes. The problem of graphic representation has been solved with AutoCAD and AutoLisp programs which we developed .

**Key words:** multidimensional axonometry, zonotopes, Minkowski sum

**MSC 2000:** 51M20, 68U07

## Pravilna tijela i hiperkocke

### SAŽETAK

U članku su dane korisne veze između pravilnih tijela i tijela nastalih pomoću njih sa 2D i 3D projekcijama višedimenzionalnih kocki. Problemi grafičke prezentacije riješeni su pomoću AutoCADa i Autolisp programa koje smo razvili.

**Ključne riječi:** višedimenzionalna aksonometrija, zonotopi, Minkowskijev zbroj

## Die Fragen:

- Was ist der Durchschnitt der fünf Würfel, die in ein Dodekaeder einschreibbar sind (Abb. 1.)?
- Welche dreidimensionale Gitterkonstruktion ergibt einen Grundriss, der gleich ist der Titelblattfigur des *Journal for Geometry and Graphics* (Abb. 2.)?



Abbildung 1.



Abbildung 2.

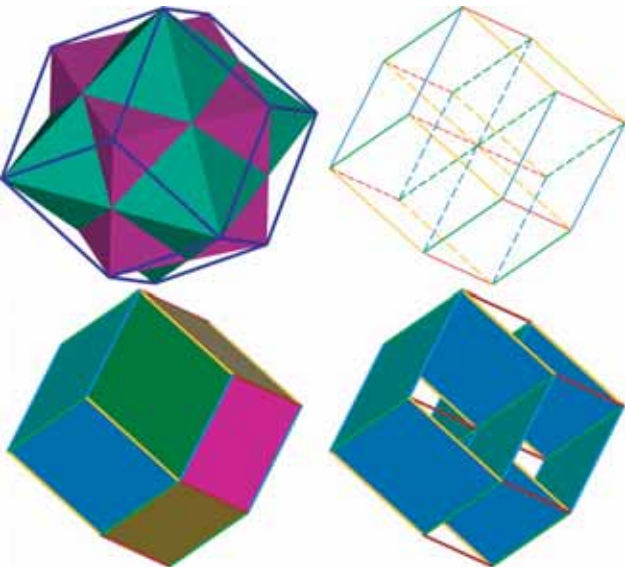


Abbildung 3.

## Antworten und eine weitere Frage:

Falls die Kanten der zueinander dualen Hexa- und Oktaeder einander halbieren, ergeben die 12-12 Kanten die Diagonalen von 12 kongruenten Rauten, die ein Rhombendodekaeder begrenzen. Das ist die Hülle des dreidimensionalen Gitters der Projektion eines vierdimensionalen Würfels. Die inneren Ecken fallen in der Mitte zusammen (Abb. 3.).

Wenn die Kanten der zueinander dualen Dodeka- und Iko-  
saeder einander halbieren, ergeben die 30-30 Kanten die  
Diagonalen von 30 kongruenten Rauten, und diese begren-  
zen einen halbrekulären Körper (Abb. 4.). Die Diagona-  
len der Rauten verhalten sich nach dem goldenen Schnitt.  
Wenn wir dem oben erwähnten Dodekaeder in bekannter  
Weise fünf Würfel einschreiben, ergibt deren Durchschnitt  
einen Körper ähnlich dem obigen Triakontaeder (Abb. 5.).  
Sie verhalten sich nach dem goldenen Schnitt (Abb. 6.).  
Verschieben wir die Kanten, die verschiedene räumliche  
Stellungen haben, in die Eckpunkte, so erhalten wir das  
3D Modell eines 6D Würfels (Abb. 7.).

Die Kanten dieser 3D Gitter haben alle dieselbe Länge,  
und benachbarte Kanten treffen sich unter gleichen Win-

keln - ähnlich wie bei der isogonal-isometrischen Axo-  
nometrie. Die Titelblattfigur des *Journal for Geometry  
and Graphics* (Abb. 2.) kann offenbar als zweidimensio-  
nales Bild eines vierdimensionalen Würfels verstanden  
werden, besser gesagt, als dessen dreidimensionales Git-  
ter, wenn wir die dargestellten Überdeckungen der Kan-  
ten in Betracht ziehen. Aus den Richtungen der Bilder von  
vier nichtparallelen Kanten können zwei-zwei kongruente  
Monge-Bilder des 3D Raumgitters gebaut werden, so dass  
wir voraussetzen, dass die Kanten mit gleichen Längen zur  
ersten Bildebene unter demselben frei gewählten Winkel  
geneigt sind (Abb. 8.).



Abbildung 4.



Abbildung 5.

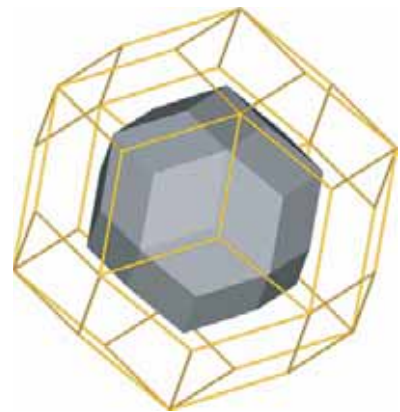


Abbildung 6.

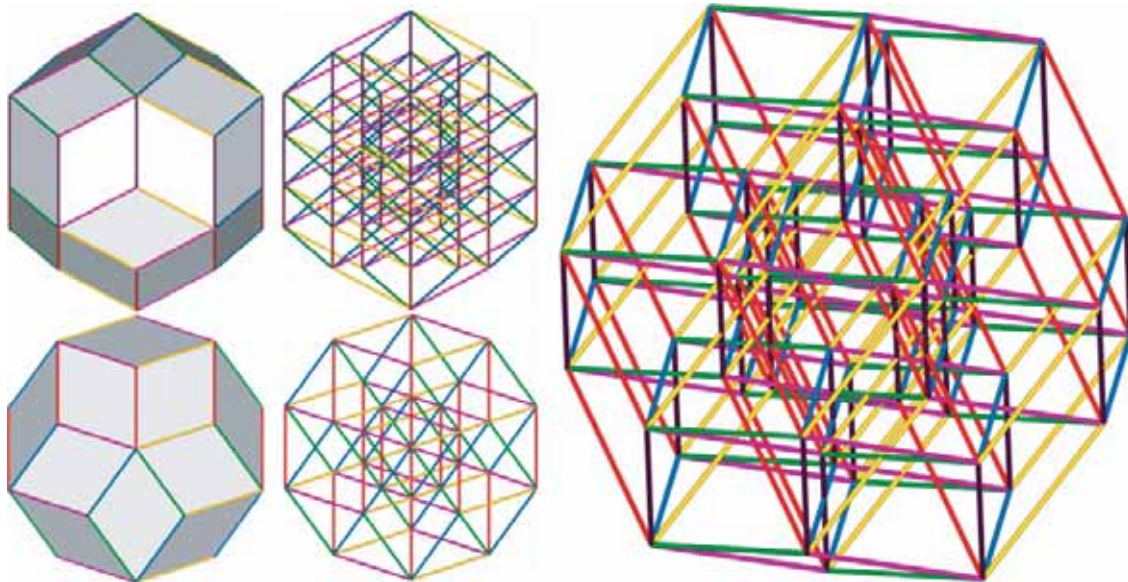


Abbildung 7.

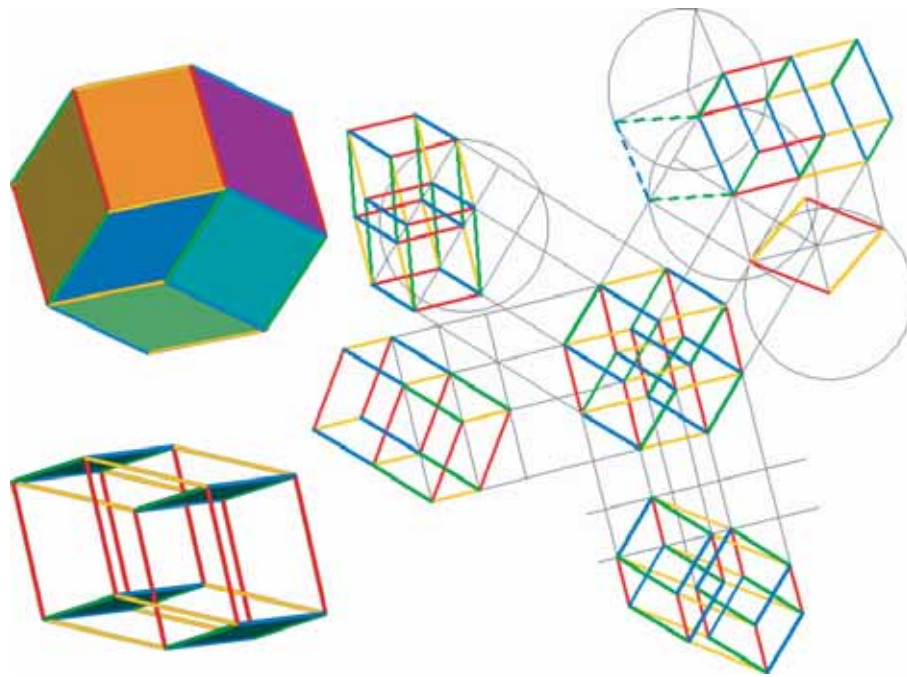


Abbildung 8.

Auf Grund dieser Voraussetzungen kann ein  $k$ -dimensionaler Würfel in einem 2D Bild dargestellt werden, das ähnlich zur isogonal-isometrischen Axonometrie die folgenden Eigenschaften hat: Die Bilder benachbarter Kanten schließen gleiche Winkel ein, alle Bildkanten haben dieselbe Länge, die Bildkontur zeigt ein reguläres Polygon, dessen Seitenanzahl mindestens  $k$  ist oder  $2k$ , sofern

die Anzahl der deckungsgleichen Bildpunkte möglichst reduziert wird. Die Achsenbilder sind also parallel zu den Seiten eines  $k$ -seitigen Polygons oder zu den Diagonalen eines  $2k$ -seitigen Polygons. Um das 3D Bild zu konstruieren, müssen die Kanten unter gleichem Winkel gegenüber der Bildebene geneigt werden (Abb. 9.).

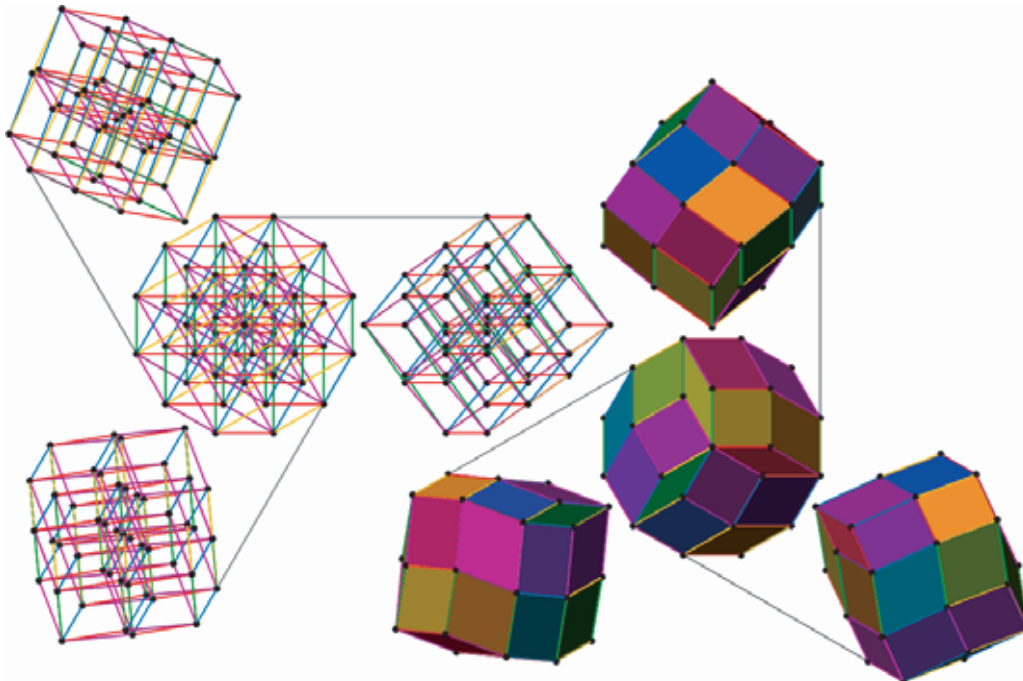


Abbildung 9.



Im dreidimensionalen Fall ergibt das Verfahren mit einem  $k$ -seitigen Polygon ein besonders schönes und statisch gut behandelbares Raumgitter. Seine Ecken sind in verschiedenen Höhenstufe platziert, wobei das einheitliche Höhenintervall regulierbar ist durch den Kantenwinkel zur horizontalen Ebene. In dem dargestellten 8D Beispiel sind die horizontalen und vertikalen Ausdehnungen des Modells ausgeglichen; die Gesetzmäßigkeiten der Modellkonstruktion sind leicht ablesbar (Abb. 10.).

Die Frage, inwieweit (nicht nur auf Grund der Analogien) diese zwei- und dreidimensionalen Bilder als durch mehrdimensionale Parallelprojektionen entstandene isogonal-isometrische Axonometrien angesehen werden können, ist noch offen, da die Gültigkeit des Satzes von K. Pohlke

in mehrdimensionalen euklidischen Räumen beschränkt ist [2], [5], siehe auch den Satz am Ende dieser Arbeit.

Die Kanten können natürlich auch mit beliebigen Längen und Winkeln gewählt werden, und mittels entsprechender Verschiebungen sind die dreidimensionalen "axonometrischen Gitter" der mehrdimensionalen Würfel zu konstruieren. Eine Möglichkeit zur Darstellung von mehr oder weniger regulären 3D Modellen besteht darin, die Kanten der platonischen und archimedischen oder der von diesen auf verschiedenen Weisen hergeleiteten Körper zu wählen. Ich habe deswegen zum Beispiel die Verbindung des Ikosaeders und des Würfels studiert und die folgenden Körper bekommen (Abb. 11-14.).

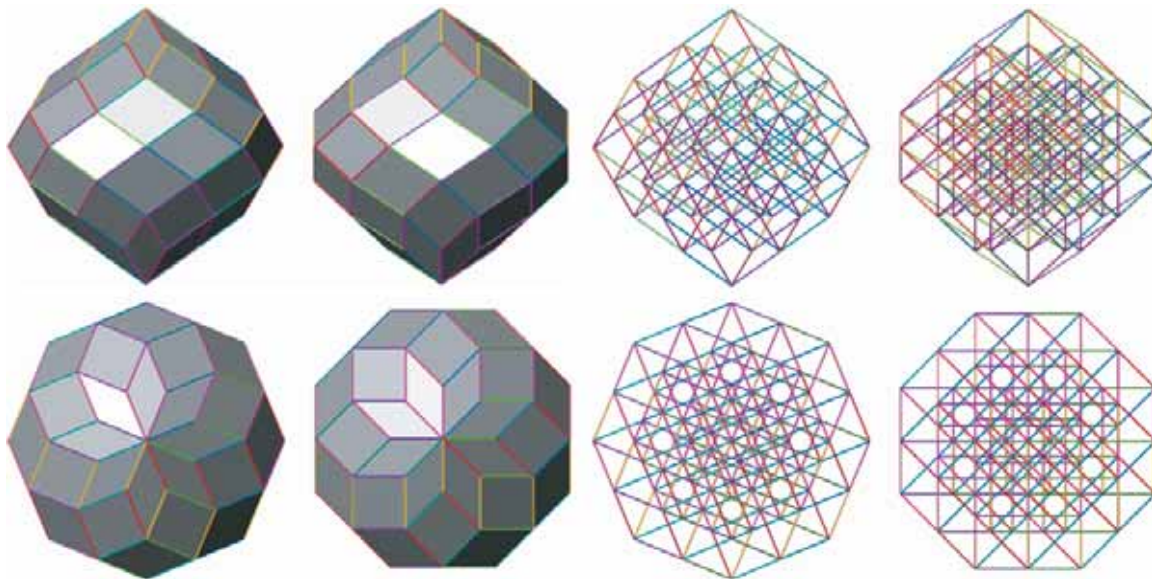


Abbildung 10.

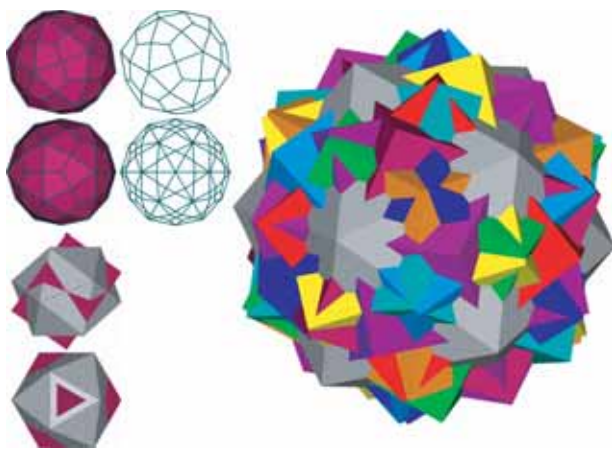


Abbildung 11.

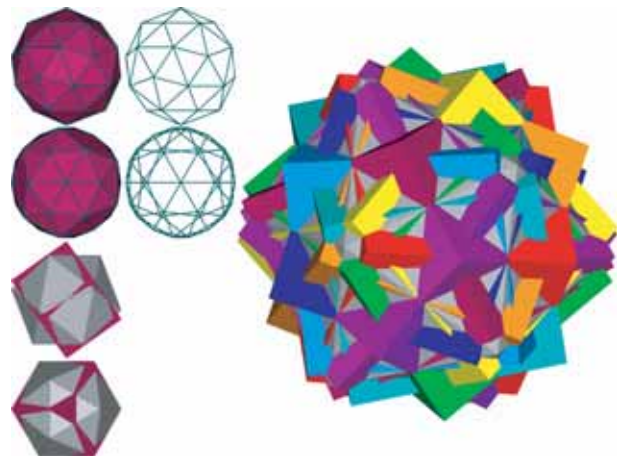


Abbildung 12.



Abbildung 13.



Abbildung 14.

Zwei von diesen sind schon vorgekommen als Körper, die gleichmäßig die Symmetrieeigenschaften des Dodekaeders und des Ikosaeders bewahren [3]. Im Interesse einer schnellen Konstruktion der 3D Modelle höherdimensionaler Würfel und um die diesbezüglichen darstellerischen Möglichkeiten von AutoCAD auszunutzen, habe ich ein Programm in Autolisp geschrieben. Die verschiedene Stellungen besitzenden Kanten dieser Körper bestimmen bereits Würfel von derart hoher Dimension, dass ein herkömmlicher PC deren 3D Modell mit allen Kanten und Seiten gar nicht mehr darstellen kann.

Ein 3D Modell der  $k$ -dimensionalen Würfel kann aber auch auf folgende Art erzeugt werden: Wenn die Kanten je einen Vektor bedeuten, zeigen die zu derselben Ecke gehörenden  $j$  Vektoren auf Punkte derselben Ebene und sie bestimmen je eine Ecke, die mit Kanten verbunden und der ein

Polygon umschrieben ist. Diese werden mit den weiteren  $(k - j)$  Vektoren verschoben. Die Gesamtheit der so herstellbaren ebenen Netzen bildet das Modell. Nehmen wir also die in einer gewählten Ecke zusammentreffenden Kanten, von diesen die möglichen Kantengruppen, die zur gleichen Ebenen gehören, und bilden wir nach allen Ebenen die Summe der zwei Gruppen der Kantenvektoren, die von der gegebenen Ebene nach verschiedenen Seiten ausragen. Verschieben wir die um eine Ecke herstellbaren Polygonen mit den zu diesen gehörenden zwei-zwei Summenvektoren, bekommen wir die Hülle des 3D Modells eines höherdimensionalen Würfels. So können wir zum Beispiel aus den Kanten des gemeinsamen Teils eines Oktaeders und eines 3D Würfels die Hülle des 3D Modells eines 6D Würfels herstellen (Abb. 15.).

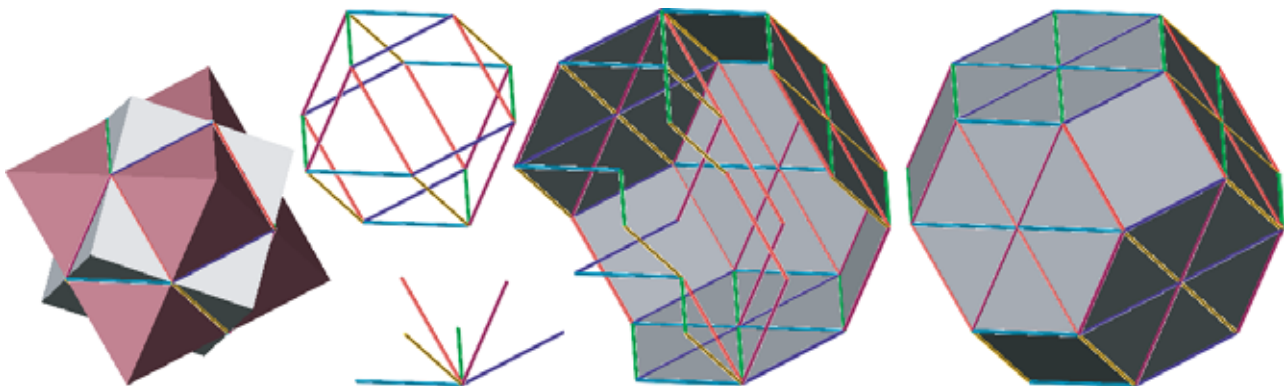


Abbildung 15.



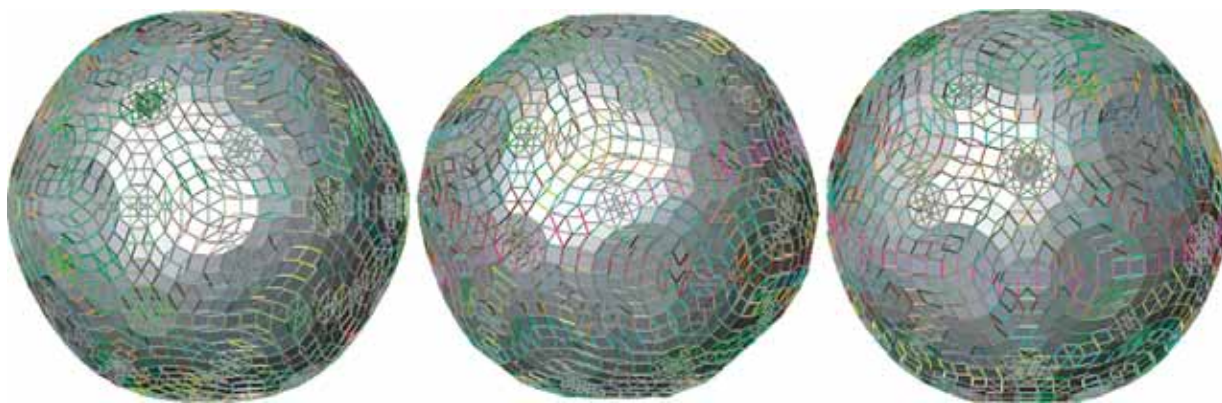


Abbildung 16: Grundriß, Aufriß, Kreuzriß

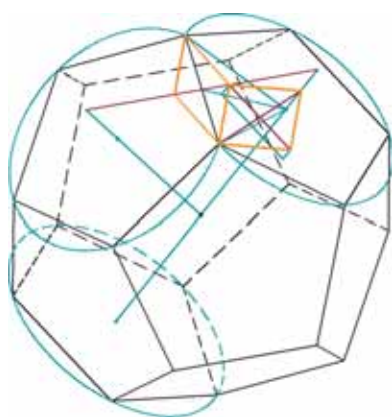


Abbildung 17.

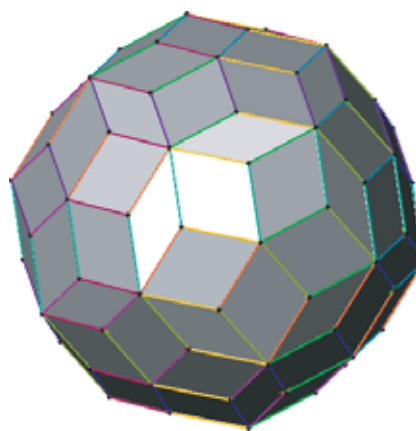


Abbildung 18.

Die Kanten des Pentakisdodekaeders (Abb. 11.) zum Beispiel bestimmen das gleichkantige 3D Modell des 45D Würfels. Dessen Hülle ist bereits durch mein Programm herstellbar und besteht aus 270 Vierecken, 190 Sechsecken, 15 Achtecken und 6 Zehnecken (Abb. 16.).

Aus den oben erwähnten Eigenschaften kann vermutet werden, dass zentralsymmetrische dreidimensionale Körper, die von Polygonen mit geraden Seitenanzahl begrenzt sind, selbst 3D Projektionen mehrdimensionaler Würfel sein können, wie auch die am Anfang erwähnten Rombendodekaeder und Triakontaeder. Dies gilt auch für den Körper in der Abbildung 15., der ein raumfüllendes Polyeder ist. Die Kombination aus einem Triakontaeder und ein Deltoid-Hexekontaeder [3] kann auch nach der Abbildung 17. konstruiert werden. Dieses Polyeder ist die Hülle eines gleichkantigen 3D Modells des 10D Würfels (Abb. 18.).

Zusammenfassend können wir den folgenden Satz formulieren, der mit dem Begriff des Zonotopes (des  $n$ -dimensionalen Zonoeders) verbunden ist, also mit der Minkowski-Summe von  $n$  Strecken, und eben mit den linearen Abbildungen des  $n$ -Würfels auf den zwei- oder dreidimensionalen Raum (siehe [6] und [8]).

**Satz:**

*Wenn  $n$  Strecken, die von einem Punkt  $O$  ausgehen, axonometrische 2D oder 3D Projektion (oder allgemein  $k$ -Projektion,  $2 \leq k < n$ ) der Eckenfigur eines  $n$ -dimensionalen Würfels sein können, dann ist die Minkowski-Summe der Strecken ein zwei- oder dreidimensionales ( $k$ -dimensionales) axonometrisches Bild des  $n$ -Würfels.*

Wie kurz aufgeführt, sollen wir hier die  $n$  Strecken als Vektoren auffassen und die möglichen Verschiebungen auf die  $n$  Strecken anwenden.

Formal ist die *Minkowski-Summe* von zwei Punktmengen  $A$  und  $B$  in einem euklidischen  $k$ -Raum wie folgt definiert: Wir nehmen einen beliebigen Aufpunkt  $O$  an und bilden mit  $X \in A$  und  $Y \in B$  die Vektorsumme  $\vec{OX} + \vec{OY} = \vec{OZ}$ . Die so gewonnenen Punkte  $Z$  beschreiben die Punktmenge  $C$ , d.h. die Minkowski-Summe  $C := A + B$ , bis auf eine Translation.

Nun haben wir in dieser Arbeit vorausgesetzt und benutzt, dass eine isogonal-isometrische Axonometrie eines  $n$ -Würfels, bei welcher die  $n$  gleichen Strecken und ihre "entgegengesetzten" eine entsprechende "gleichwinklige Sternfigur" bilden (Abb. 2.), in einem  $k$ -Raum (jetzt  $k = 2, 3$ ) realisierbar ist. Der genauere Satz und sein Beweis wären interessant (ist mir aber bisher nicht bekannt)!

## Literatur

- [1] BOLTYANSKI, V., MARTINI, H., SOLTAN, P.S., *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer, 1977.
- [2] BRAUNER, H., *Zum Satz von K. Pohlke in  $n$ -dimensionalen euklidischen Räumen*, Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., Band 195, Heft 8-10 (1986)
- [3] GÉVAY, G., *Icosahedral Morphology*, in: *Fivefold Symmetry*, edited by István Hargittai, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992 & reprinted in: Sándor Kabai, *Mathematical Graphics - The Icosahedron*, Uniconstant, 2005.
- [4] MIYAZAKI, K., *Adventure in Multidimensional Space: The Art and Geometry of Polygons, Polyhedra and Polytopes*, Wiley, New York, 1986.
- [5] STACHEL, H., *Mehrdimensionale Axonometrie*, Proceedings of the Congress of Geometry, Thessaloniki, 159-168 (1987)
- [6] <http://home.inreach.com/rtowle/Zonohedra.html>
- [7] <http://icai.voros.pmmf.hu>
- [8] <http://www.decatour.de/personal/zono/index.html>

**László Vörös**

e-mail: vorosl@witch.pmmf.hu

Universität Pécs

M. Pollack Technische Fakultät