Stručni rad
Prihvaćeno 15. 12. 2004.

ANA SLIEPČEVIĆ
JASNA KOS -MODOR

Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini

Some Planimetric Constructions in the H-plane

ABSTRACT

On the Klein's model of the hyperbolic plane we can define the central collineation between absolute and H-circle. Using that central collineation it's possible to make the elementary geometric constructions in the H-plane by the instruments of the euclidean geometry. Two problems have been solved in this way.

Key words: hyperbolic geometry, hyperbolic circle, central collineation

MSC 2000: 51 M 10, 51 M 15

Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini

SAŽETAK

Na Kleinovom modelu hiperboličke ravnine uspostavja se centralna kolineacija između apsolute i H-kružnice. Pokazuje se kako je moguće uz pomoć ove centralne kolineacije, sredstvima euklidske geometrije izvoditi elementarne geometrijske konstrukcije u H-ravnini. U tom su smislu riješena dva zadatka.

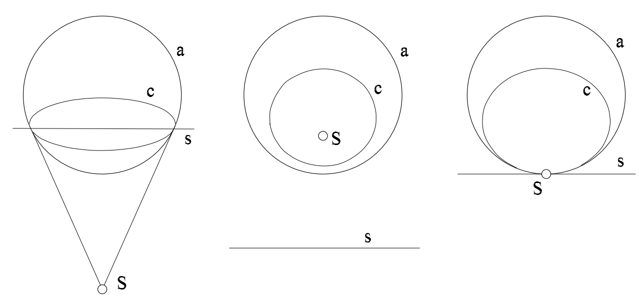
Ključne riječi: hiperbolička geometrija, hiperbolička kružnica, centralna kolineacija

U hiperboličkoj su ravnini planimetrijske konstrukcije neizvedive zbog nepostojanja "hiperboličkog ravnala" i "hiperboličkog šestara", pa su često pri objašnjavanju prisutne jedino skice. Mnogi zadaci postaju konstruktibilni tek na nekom od euklidskih modela H-ravnine. U tom je smislu najpogodniji Kleinov model i to onaj s euklidskom kružnicom kao apsolutom.

Neka je kružnicom *a* zadana apsolutna konika Kleinovog modela hiperboličke ravnine. Točke unutar apsolute zovemo pravim, one izvan apsolute nepravim ili idealnim, a točke na apsoluti graničnim točkama H-ravnine. Za dva pravca koji se sijeku u pravoj točki kaže se da su ukršteni. Ako im je sjecište na apsoluti, pravci su paralelni, a ako se sijeku izvan apsolute, kaže se da su hiperparalelni.

U euklidskoj se ravnini smatra da je točka geometrijski točno konstruirana ukoliko je određena kao sjecište dvaju pravaca, pravca s kružnicom ili kao sjecište dviju kružnica. Kako se ovdje radi o euklidskom modelu hiperboličke geometrije, za očekivati je da se i u njemu mogu elementarne geometrijske konstrukcije izvoditi ravnalom i šestarom. Pokazuje se da je to često doista moguće, uz napomenu da su konstrukcije znatno složenije od analognih konstrukcija u euklidskoj ravnini.

Hiperboličkom kružnicom u ovom modelu zovemo svaku onu koniku koja dodiruje apsolutu u dvije realne ili dvije konjugirano imaginarne točke ili su ta dva dirališta pala zajedno. Konika koja dira apsolutu u dvije različite realne točke zove se *hipercikl*, konika koja dira apsolutu u paru konjugirano imaginarnih točaka zove se *cikl*, a ako imaginarna ili realna apsolutna dirališta padnu u istu točku, hiperbolička se kružnica zove *horicikl* [3], (Slika 1).



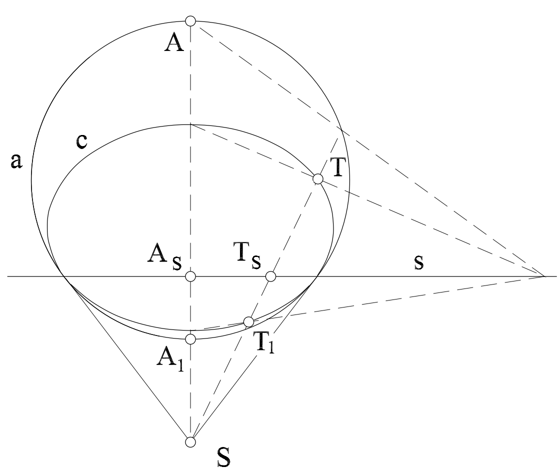
Slika 1

Spojnica *s* apsolutnih dirališta H-kružnice zove se *os* H-kružnice, a apsolutni pol *S* te spojnice njezino je *središte*. Središte hipercikla je neprava točka, a os mu je pravi pravac, središte cikla je prava točka, a os je nepravi pravac. Horicikl ima središte na apsoluti, a os mu je izotropni pravac (tangenta apsolute).

Zbog egzistencije triju vrsta kružnica, u H-ravnini će mnoge geometrijske činjenice biti kompleksnije nego u euklidskoj ravnini, dok će mogućnosti zadavanja nekih geometrijskih figura biti ograničene ili čak neostvarive logikom euklidske ravnine (npr. konstrukcija pravilnih poligona). Kao što je poznato, kružnicu je u euklidskoj ravnini moguće jednoznačno zadati čak na pet načina: trima različitim realnim točkama, jednom jednostrukom i jednom dvostruko brojenom točkom, jednom realnom i parom konjugirano imaginarnih točaka, središtem i točkom, središtem i tangentom. Za razliku od toga hiperboličku kružnicu moguće je jednoznačno zadati na sljedeće načine: točkom i središtem, točkom i osi, tangentom i središtem, tangentom i osi. Trima su točkama, kao i trima tangentama, općenito određene čak četiri H-kružnice! [1], [2].

Bez uvođenja metrike, moguće je na ovom modelu rješavati jednostavne položajne planimetrijske zadatke u vezi s H-kružnicom. U tu je svrhu potrebno uspostaviti jednostavnu linearnu transformaciju, primjerice centralnu kolineaciju ravnine, koja ostavlja apsolutu fiksnom u cjelini.

Neka je zadana involutorna centralna kolineacija H-ravnine kojoj su središte S i os s pol i polara u odnosu na apsolutu, a sjecišta bilo kojeg pravca kroz pol s apsolutom par pridruženih točaka A, A_1 (Slika 2.). Očigledno ova transformacija preslikava apsolutu samu u sebe [3]. Nije teško zaključiti da se svaka H-kružnica sa središtem u središtu takve centralne kolineacije također preslikava sama u sebe, odnosno sve se kružnice koncentričnog pramena H-kružnica s istim središtem S (i istom osi) preslikavaju same u sebe. Pri tome vrijedi: $(SA_s, A_1A) = (ST_s, T_1T) = -1$. Ova se transformacija u hiperboličkoj ravnini zove *osna simetrija*, a točke A_1, A, odnosno T_1, T simetrične su u odnosu na os s.



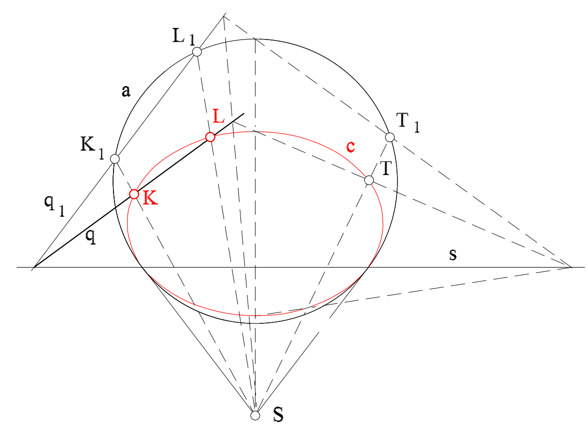
Slika 2

Riješimo ovdje neke elementarne planimetrijske zadatke u vezi s H-kružnicom.

Zadatak 1.
Konstruiraj hipercikl c sa središtem u točki S koji prolazi pravom točkom T, te odredi njegova sjecišta K i L s pravcem q (Slika 3).

Rješenje.

- Središtem S i točkom T jednoznačno je zadan hipercikl c.
- Ranije spomenutom involutornom centralnom kolineacijom taj se hipercikl preslikava sam u sebe. No, valja uočiti da postoji i takva centralna kolineacija, koja ovaj hipercikl preslikava u apsolutu. Ta je kolineacija zadana s istom osi s i središtem S, te parom pridruženih točaka T, $T_1 = ST \cap a$. Hipercikl c konstruira se pomoću ove centralne kolineacije kao kolinearna slika apsolute.
- Kada se ovom kolineacijom preslika i zadani pravac q, njegova će slika q_1 sjeći apsolutu a u dvije točke K_1 i L_1 koje su pridružene traženim sjecištima K i L pravca q s hiperciklom c.



Slika 3

Zadatak 2.
Zadana je os s i jedna tangenta t cikla c. Konstruiraj one tangente cikla koje prolaze zadanom točkom Q (Slika 4.).

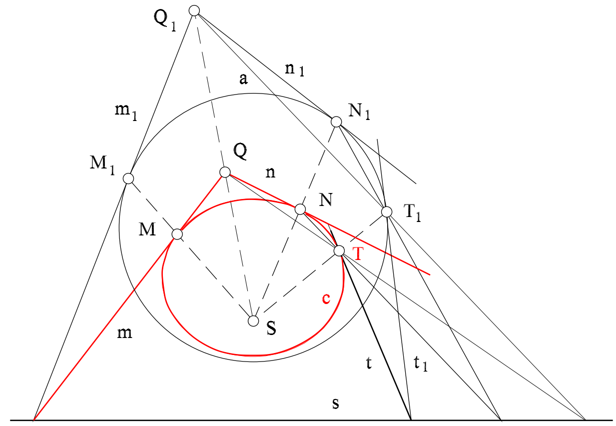
Rješenje.

- Cikl je jednoznačno određen svojom osi s i tangentom t.
- Pol S pravca s u odnosu na apsolutu je središte zadanoga cikla.

- U centralnoj kolineaciji sa središtem S i osi s, kojom se zadani cikl preslikava u apsolutu, zadanoj će tangenti t cikla biti pridružena tangenta t_1 apsolute koja prolazi sjecištem pravca t s osi kolineacije s. Njenom diralištu T_1 s apsolutom pridruženo je diralište T cikla s tangentom t.

- Pomoću točke T konstruiraju se ostale točke zadanoga cikla kao kolinearne slike apsolutnih točaka.

- Spomenutom se kolineacijom zadana točka Q preslikava u točku Q_1, a tangentama m_1, n_1 apsolute koje prolaze točkom Q_1 kolinearno su tada pridružene tražene tangente m, n cikla c.



Slika 4

Literatura

[1] BABIĆ, I., *Neke kolineacije H-ravnine*, (prihvaćeno za tisak u KoG-u)

[2] SLIEPČEVIĆ, A., BABIĆ, I., *Charakteristische Dreieckpunkte in der projektiv erweiterten hyperbolischen Ebene*, (predano za tisak)

[3] RAJČIĆ, L., *Obrada osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima*, Glasnik MFA 5, (1950), 57-120.

Ana Sliepčević
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: anas@grad.hr

Jasna Kos-Modor
Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Pierottijeva 6, 10000 Zagreb
e-mail: jasna.kos-modor@rgn.hr