Stručni rad
Prihvaćeno 28. 11. 2005.

Ivanka Babić

Neke kolineacije H-ravnine

Some collineations of H-plane

ABSTRACT

On the Klein's model of the hyperbolic plane the harmonic homology is defined. This collineation maps absolute points of the h-plane onto absolute points, real points onto real points and ideal points onto ideal points. It is called line symmetry if the center of collineation is ideal point and point symmetry if the center is real point, because described mappings have equal properties as the analogues mappings in the Euclidean plane. By using point and line symmetries, symmetric images of the lines, points and triangles, bisectors of the angles and perpendicular bisectors of the segments are constructed. At the end one complicated metric problem is solved.

Key words: hyperbolic plane, Klein's model of the hyperbolic plane, central involutory collineation

MSC 2000: 51 M 10, 51 M 15

Neke kolineacije H-ravnine

SAŽETAK

Na Kleinovom modelu hiperboličke ravnine definirana je centralna involutorna kolineacija, koja preslikava granične točke H-ravnine u granične, prave točke u prave, a idealne u idealne. Zovemo ju osna simetrija ukoliko je centar idealna točka, a centralna simetrija ako je centar prava točka, jer imaju sva svojstva istoimenih kolineacija euklidske ravnine. Pomoću osne i centralne simetrije konstruirane su osno-simetrične i centralno-simetrične slike pravaca, točaka i trokuta, simetrale kutova i dužina. Na kraju je riješen jedan složeniji metrički zadatak.

Ključne riječi: hiperbolička ravnina, Kleinov model H-ravnine, centralna involutorna kolineacija.

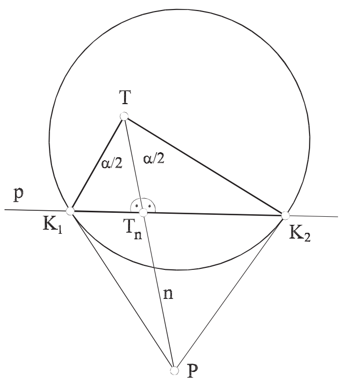
Transformaciju u realnoj projektivnoj ravnini, koja preslikava pravce u pravce, a točke u točke, zovemo *kolineacijom* ravnine. Kolineacija je *perspektivna* ili *centralna* ako postoji pravac na kojemu su sve točke fiksne i jedna istaknuta fiksna točka, koja je izvan ili na fiksnom pravcu. Fiksni pravac zove se *os*, a fiksna točka *centar* ili *središte* centralne kolineacije. *Zrake kolineacije* su pravci koji prolaze centrom kolineacije i na njima se nalaze parovi kolinearno pridruženih točaka. Prema odabiru osi i središta sve se centralne kolineacije dijele na: *homologije* i *elacije*. Homologije su centralne kolineacije u ravnini kod kojih središte ne pripada osi, dok kod elacija središte leži na osi. U homologije ubrajamo *centralne simetrije, osne simetrije, homotetije, perspektivne afinosti u užem smislu, perspektivne kolineacije u užem smislu*, dok u elacije ubrajamo: *translacije, elacije u užem smislu* i *posmike*.

Kolineacije u *H-ravnini* analogno su definirane kao u realnoj projektivnoj ravnini. Posebno su zanimljive centralne kolineacije. Budući da u H-ravnini postoje tri vrste točaka i pravaca, to postoji i više vrsta centralnih kolineacija. U skupu svih centralnih kolineacija H-ravnine posebno se ističu one koje preslikavaju granične (apsolutne) točke u granične (apsolutne). To su *involutorne centralne kolineacije* i one preslikavaju prave točke u prave, a idealne u idealne. Zovu se općenito *zrcaljenja* u koja ubrajamo **osne simetrije** ako je centar neprava točka, a os pravi pravac H-ravnine, odnosno **centralne simetrije H-ravnine** ako je centar u pravoj točki H-ravnine, a os je idealni pravac, jer imaju sva svojstva istoimenih kolineacija euklidske ravnine. (Duljina dužine i veličina kuta dvaju pravaca invarijante su ovakvih transformacija kao i u euklidskom slučaju.), [2]. Korisne su kod rješavanja metričkih zadaća u H-ravnini.

Za konstruktivno rješavanje zadataka vezanih uz preslikavanja točaka H-ravnine na sebe, najpogodniji je Kleinov model H-ravnine, jer su u njemu *H-pravac* i *H-točka* prikazani pravcem i točkom u euklidskom smislu. U tom je modelu apsolutna konika zadana euklidskom kružnicom. Njene točke su *granične točke* H-ravnine. Točke unutar apsolute zovemo *pravim*, a izvan apsolute *nepravim* ili *idealnim točkama* H-ravnine.

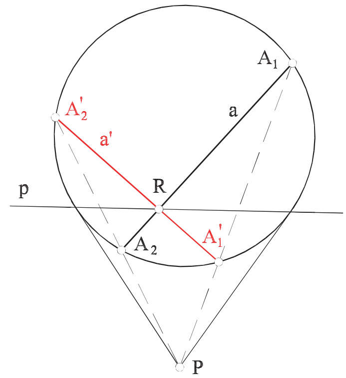
Dvije točke bilo koje vrste u H-ravnini određuju jedan i samo jedan pravac, koji zovemo *pravi*, *idealni bez graničnih točaka* ili *idealni s jednom graničnom točkom*, već prema tome da li apsolutnu koniku siječe realno, imaginarno ili ju tangira.

Svakom točkom izvan pravog pravca prolaze dvije paralele sa zadanim pravcem H-ravnine. Figura koju čini pravi pravac i njegove dvije paralele zove se *dvokrajnik*. To je trokut TK_1K_2 kojemu su dva vrha granične točke ili *krajevi*. Poznato je, da je u dvokrajniku simetrala kuta α pri pravom vrhu T okomita na spojnicu graničnih vrhova t.j. stranicu K_1K_2 (Slika 1). Kut $\alpha/2$ pri pravom vrhu zove se *kut paralelnosti*, a visina TT_n određuje udaljenost točke T od stranice K_1K_2 i zove se *distanca paralelnosti*.

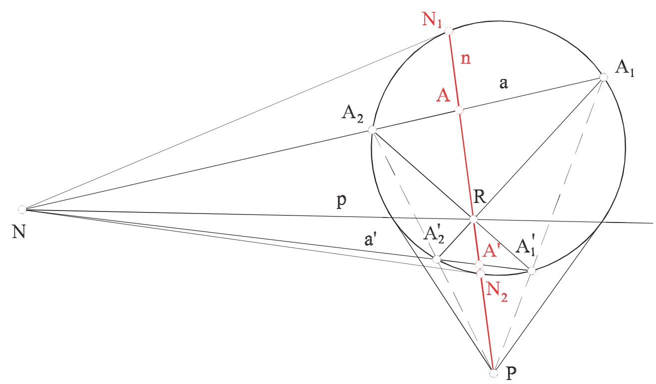


Slika 1

H-okomitost pravaca definirana je apsolutnim polaritetom t.j. pravci su okomiti, ako svaki od njih prolazi apsolutnim polom drugog. Svake dvije apsolutno konjugirane polare bez obzira da li se sijeku u pravoj, graničnoj ili idealnoj točki, međusobno su okomite.



Slika 2a



Slika 2b

1 Osna i centralna simetrija u H-ravnini

Kolineacija H-ravnine kojoj su centar P i os p pol i polara u odnosu na apsolutnu koniku, a par pridruženih točaka sjecišta zrake i apsolute je **centralna involutorna kolineacija**, koja preslikava apsolutu na sebe tako da njene točke mijenjaju mjesta. Svaku točku (pol) i pridruženu polaru možemo shvatiti kao centar i os jedne centralne involutorne kolineacije.

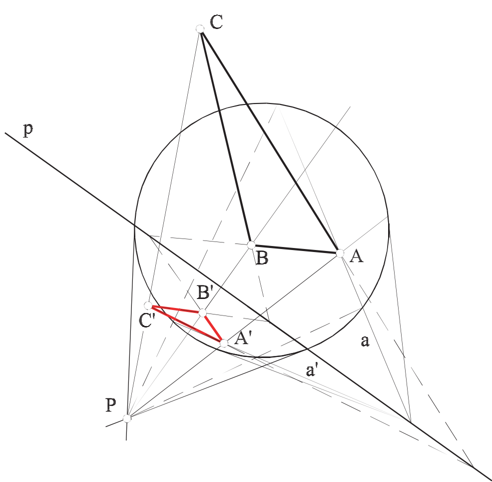
Neka je centar kolineacije idealna točka P. Svaka zraka točkom P okomita je na os p kolineacije. Ako sjecišta zrake s apsolutom označimo N_1, N_2, a sjecište s osi p s R, tada vrijedi : $(PRN_1N_2) = -1$ (Slika 2b). Na svakoj zraci parovi točaka N_1, N_2 i P, R određuju hiperboličku involuciju, kojoj su točke P i R dvostruke točke. Isto tako za svaki par pridruženih toaka A, A' na zraci n centralne involutorne kolineacije (Slika 2b) vrijedi $(PRAA') = -1$. Slijedi da je $AR = A'R$, t.j. parovi pridruženih točaka stoje simetrično obzirom na os kolineacije, a kako je zraka kolineacije okomita na os, ova je kolineacija analogon osnoj simetriji u euklidskoj ravnini.

Centralna involutorna kolineacija preslikava prave točke u prave, granične u granične, a idealne u idealne, prave pravce preslikava u prave, idealne u idealne, a idealne s jednom graničnom točkom u idealne s jednom graničnom točkom. Pri tom je preslikavanju dvoomjer četiriju elemenata (točaka ili pravaca) invarijantan, a kako je metrika u Kleinovom modelu definirana dvoomjerom $[d = 1/2\ln(ABN_2N_1); \varphi = i/2\ln(p_1p_2t_2t_1)]$, znači da ta kolineacija čuva duljinu dužine i veličinu kuta dvaju pravaca [2]. Centralnu involutornu kolineaciju ((**P**,**p**)) zadanu centrom P i njenom polarom kao osi p, zovemo **zrcalenje** i to: **osna simetrija** u slučaju da je centar idealna točka odnosno **centralna simetrija** kada je centar prava točka.

Neka je zadana **osna simetrija** $\boldsymbol{(P,p)}$ i neki pravac a s graničnim točkama A_1, A_2 (Slika 2a). Osno-simetrična slika toga pravca je pravac a' koji prolazi graničnim točkama A'_1, A'_2 koje su centralno-involutorno kolinearno pridružene krajevima A_1, A_2. Pravci a i a' sijeku se u točki R na osi kolineacije p. To sjecište može biti prava, granična ili idealna točka. Ukoliko je to idealna točka, kažemo da su pravci a i a' razilazni ili hiperparalelni.

Osno-simetrična slika A' zadane točke A u osnoj simetriji (P, p) može se odrediti na dva načina: a) kao sjecište zrake i zrcalne slike bilo kojeg pravca položenog kroz A; b) pomoću pravca a točkom A koji je okomit na zraku n točke A (Slika 2b). Slika a' pravca a siječe zraku u točki A', a zraka n je zajednička normala pravaca a i a'. Na tom se principu temelji konstrukcija polovišta dužine. Točka R je polovište dužine $\overline{AA'}$.

Na slici 3 zadan je trokut ABC i osna simetrija (P, p). Konstruiran je osno-simetričan trokut $A'B'C'$ tako, da je najprije konstruirana točka A' slika točke A prema konstrukciji na slici 2b., dok su ostale točke konstruirane spomenutom osnom simetrijom pomoću para pridruženih točaka A, A'. Vidljivo je da se pritom prave točke A i B zrcale u prave A' i B', a slika idealnog vrha C trokuta idealna je točka C'.



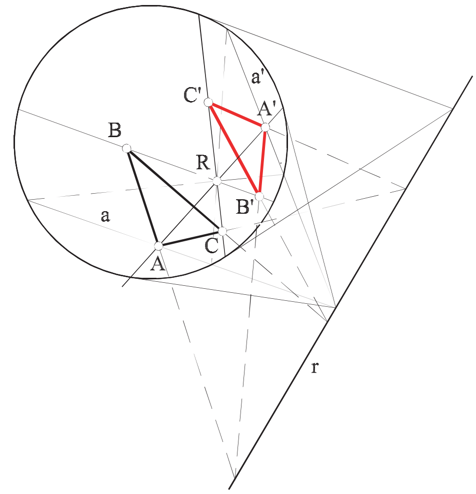
Slika 3

Na slici 4 pravom je točkom R i njenom idealnom polarom r zadana **centralna simetrija** $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$. Točki A konstruira se pridružena točka A' na isti način kao u slučaju osne simetrije. Pomoću tog para je određena centralno simetrična slika $A'B'C'$ trokuta ABC.

Teorem 1 *Osna simetrija (S, s), koja pridružuje pravce $a(A_1, A_2)$ i $a'(A_1, A_2')$, pridružuje i njihove polove A i A' i obrnuto, ako pridružuje točke A i A' tada pridružuje i njihove polare $a(A_1, A_2)$ i $a'(A_1, A_2')$.*

Dokaz teorema je evidentan [3].

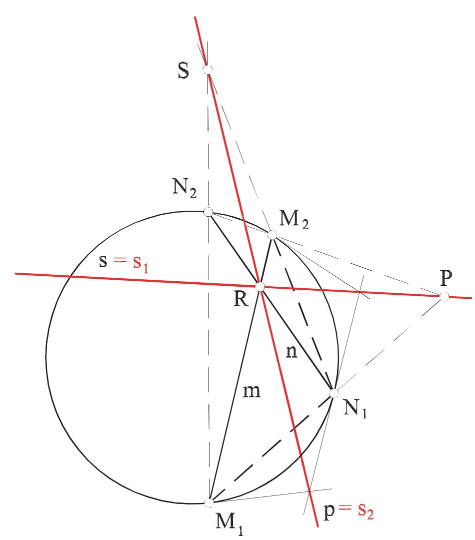
Temeljem ovog teorema moguće je konstruirati osno simetričnu sliku bilo kojeg idealnog pravca zadanom simetrijom (P, p) kao polaru one prave točke, koja je osno simetrična slika pola zadanog pravca. Ova se činjenica koristi kod konstrukcije simetrale kuta idealnih pravaca.



Slika 4

2 Simetrala kuta i simetrala dužine

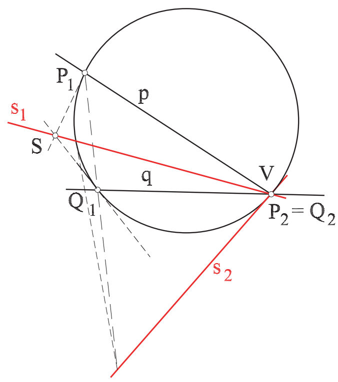
Zadatak 1.
Odredite osnu simetriju koja meusobno preslikava pravce $m(M_1, M_2)$ i $n(N_1, N_2)$ (Slika 5a).



Slika 5a

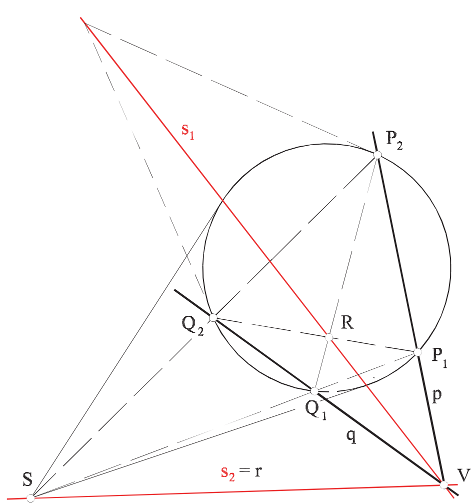
Neka je $R = m \cap n$. Budući da se osnom simetrijom granične točke preslikavaju u granične točke, zrake tražene osne simetrije mogu biti spojnice $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{M_2N_2}$ ili $\overline{M_1N_2}$ i $\overline{M_2N_1}$, a njihovo je sjecište centar $P = \overline{M_1N_1} \cap \overline{M_2N_2}$, odnosno $S = \overline{M_1N_2} \cap \overline{M_2N_1}$. Polara p točke P odn. polara s točke S osi su dviju osnih simetrija (P, p) i (S, s) koje preslikavaju pravce m i n. Pravci p i s zapravo su simetrale kutova zadanih pravaca m i n. Iz konstrukcije je vidljivo da su polare p i s apsolutno konjugirane, dakle međusobno okomite.

Općenito se **simetrale kutova** dvaju pravaca mogu konstruirati primjenom na početku spomenutog svojstva dvokrajnika. Konstruira se pravac paralelan s oba kraka zadanog kuta, dakle spojnica krajeva zadanih pravaca (M_2N_1 odn. M_1N_1) na koju tražena simetrala treba biti okomita (Slika 5a). Tražena simetrala prolazi polom ove spojnice i sjecištem R zadanih pravaca. Na taj su način konstruirane simetrale kutova dvaju pravih pravaca, koji se sijeku u pravoj odnosno graničnoj točki (Slike 5a, 5b). Uočimo da se u slučaju sjecišta u graničnoj točki (Slika 5b) jedna od simetrala poklapa s tangentom apsolute.



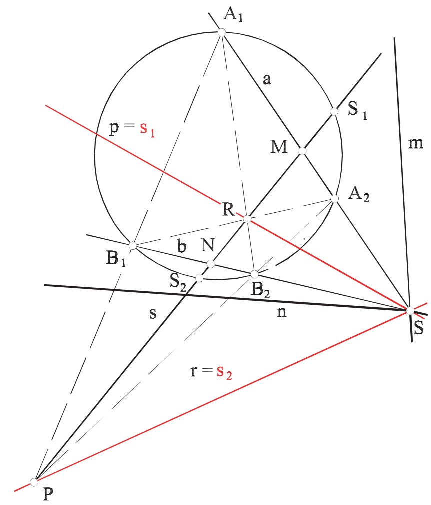
Slika 5b

Ukoliko se pravi pravci p i q sijeku u idealnoj točki V, jednu od simetrala konstruiramo na spomenuti način, a druga je njoj konjugirana (Slika 5c). Tu drugu simetralu moguće je konstruirati i tako, da odredimo centralnu simetriju (R,r) u kojoj su zadani pravci p i q simetrični. Os r te centralne simetrije je druga simetrala kuta zadanih pravaca.



Slika 5c

Konstrukcija simetrala kutova dvaju idealnih pravaca m i n sa sjecištem u idealnoj točki S (Slika 5d) izvodi se primjenom navedenog teorema. Kracima kuta m i n odrede se polovi M i N, čija je spojnica s polara točke S (vrha kuta). Zatim se odrede one osne simetrije, koje preslikavaju točke M i N, a prema teoremu one preslikavaju i njihove polare m i n. Osi r i p tih osnih simetrija su simetrale kutova pravaca m, n.



Slika 5d

Ova konstrukcija vodi na određivanje **simetrale dužine**.

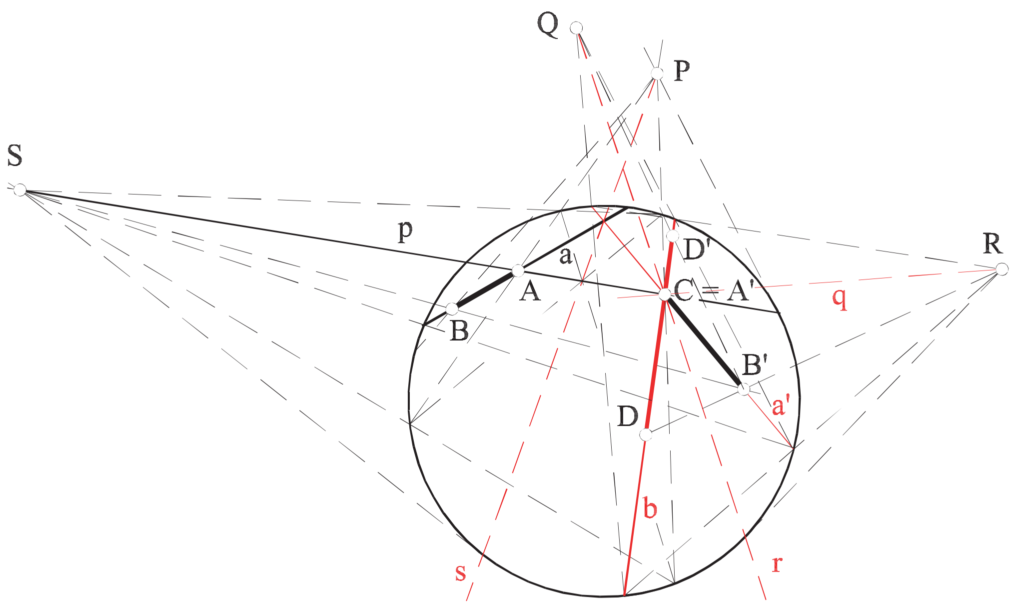
Neka je zadana dužina $\overline{MN}$ na pravcu s s krajevima S_1 i S_2 (Slika 5d). Pretpostavimo da os p tražene osne simetrije (P,p) siječe pravac s u točki R, tada za parove pridruženih točaka vrijedi: $(PRS_1S_2)=-1$ i $(PRMN)=-1$. Ta dva para involutorno-pridruženih točaka određuju na pravcu s hiperboličku involuciju čije dvostruke točke P i R predstavljaju *H-polovišta dužine* $\overline{MN}$ odnosno $\overline{NM}$, [1]. Određivanje polovišta dužine i simetrala te dužine, svodi se na određivanje simetrala kuta, čiji kraci prolaze krajnjim točkama te dužine, a vrh mu je u polu njezinog pravca nosioca. U tu svrhu postavimo pravce a i b točkama M i N okomito na njihovu spojnicu s. Neka su sa A_1,A_2 i B_1,B_2 označeni krajevi ovih pravaca. Prema slici 5c odredimo takve osne simetrije (P,p) i (R,r), koje preslikavaju pravce a i b. One preslikavaju i točke $M\in a$ i $N\in b$. Pravci p i r su tada *H-simetrale dužina* $\overline{MN}$ odnosno $\overline{NM}$, jer prolaze njihovim *H-polovištima* R i P, a okomiti su na pravac s. Uočimo da su ovi pravci ujedno i simetrale kutova koje zatvaraju idealni pravci m i n.

Rješavajući problem konstrukcije simetrala kutova idealnih pravaca riješili smo i problem određivanja simetrala dužine. Zaključujemo da *H-dužina* ima **dvije simetrale** i **dva polovišta** za razliku od dužine u euklidskoj ravnini. Važno je pri tome napomenuti, da se kod H-dužina kojima je jedna krajnja točka granična ili kod onih kojima je jedna krajnja točka prava, a druga idealna, ne može govoriti o polovištima odnosno simetralama dužina.

Koristeći osnu i centralnu simetriju te njihove kompozicije možemo rijeiti niz metričkih zadataka u H-ravnini.

Zadatak 2.
Prenesi dužinu $\overline{AB}$ čiji je nosilac pravac a na pravac b od zadane točke $C \in b$ (Slika 6). Zadatak ćemo riješiti pomoću dvije osne simetrije.

- Prvo odredimo osnu simetriju (S,s) koja preslikava točku A u točku C. Os te simetrije bit će simetrala dužine $\overline{AC}$ koja je određena kao na slici 5d. Tom se osnom simetrijom preslikava pravac a u pravac a', dužina $\overline{AB} \in a$ u dužinu $\overline{A'B'} \in a'$, pri čemu je $A' = C$.
- Druga osna simetrija (R,r), određena prema konstrukciji na slici 5a, preslikava pravac a' u pravac b, a dužinu $\overline{A'B'}$ u dužinu $\overline{CD} \in b$. Uočimo da postoji i druga osna simetrija (Q,q) koja također preslikava pravac a' u b, pa time i dužinu $\overline{A'B'}$ u dužinu $\overline{CD'}$.



Slika 6

Literatura

[1] BABIĆ, I., KUČINIĆ, B., *M-Modell des hyperbolischen H^3-Raums in der Mobius-Ebene*, Rad HAZU 467 (1994), 67-75

[2] KLEIN, F., *Vorlesungen uber nicht-euklidische Geometrie*, Berlin, Springer-Verlag, 1928., Nachdruck 1968.

[3] RAJČIĆ, L., *Obrada osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima*, Glasnik MFA 5, (1950), 57-120.

Ivanka Babić
Graditeljski odjel Tehničkog Veleučilišta u Zagrebu
Avenija Većeslava Holjevca 15, 10000 Zagreb
e-mail: ibabic@tvz.hr