

UDK 528.232.21:514.7:519.65  
Pregledni znanstveni članak

# Rekonstrukcija meridijanske elipse na bazi eksperimentalnih mjerenja

Klaudija SCITOVSKI<sup>1</sup> – Zagreb, Rudolf SCITOVSKI<sup>2</sup> – Osijek

*SAŽETAK.* Na bazi novih metoda matematičke optimizacije analizira se stari problem rekonstrukcije Zemljina rotacijskog elipsoida na bazi podataka mjerenja, koji je već početkom 18. stoljeća promatrao francuski matematičar i astronom markiz Pierre-Simon de Laplace. Posebno je analizirana, ilustrirana i modificirana efikasna metoda iz rada (Sabo i Scitovski 2009) za traženje optimalnih parametara najbolje  $l_1$  linearne aproksimacije. U znanstvenoj literaturi problem procjene najbolje  $l_1$  aproksimacije obično se povezuje s imenom hrvatskog znanstvenika J. R. Boškovića. Metode za traženje najbolje  $l_1$  aproksimacije u posljednje vrijeme dobivaju novi zamah u različitim tehničkim primjenama zbog svojstva robusnosti i mogućnosti implementacije u realnom vremenu na suvremenim računalima.

*Ključne riječi:* pozicioniranje,  $l_1$  aproksimacija, fitovanje krivulja, Zemljina meridijanska elipsa.

## 1. Uvod

Pretpostavimo da je u nekom matematičkom modelu zavisna varijabla  $y$  povezana s nezavisnom varijablom  $x$  preko funkcionalne zavisnosti  $y = f(x; a)$ , gdje je  $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , vektor parametara. Pretpostavimo nadalje da su poznati podaci mjerenja  $(p_i, x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq n$ , gdje su  $x_i$  izmjerene vrijednosti nezavisne varijable,  $y_i$  izmjerene vrijednosti zavisne varijable, a  $p_i > 0$  odgovarajuće težine podataka. Ako pretpostavimo da se znatnije pogreške mogu pojaviti samo kod izmjerenih vrijednosti zavisne varijable, tj. ako je

$$y_i = f(x_i; a) + \varepsilon_i,$$

onda se vektor optimalnih parametara  $a^*$  najčešće procjenjuje jednom od sljedećih metoda.

<sup>1</sup> Klaudija Scitovski, dipl. ing. geod., Geofoto d.o.o., Buzinski prilaz 28, 10010 Zagreb, e-mail: klaudija.scitovski@geofoto.hr

<sup>2</sup> prof. dr. sc. Rudolf Scitovski, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, 31000 Osijek, e-mail: scitowsk@mathos.hr.

- *Metoda najmanjih apsolutnih odstupanja*, kojom se traži najbolja  $l_1$  aproksimacija optimalnih parametara

$$F_1(a) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - f(x_i; a)| \rightarrow \min. \quad (1)$$

Metoda se koristi u slučaju dvostruko eksponencijalne (Laplaceove) distribucije pogrešaka  $\varepsilon_i$  (vidi primjerice Cadzow 2002, Dodge 1997, Pauše 1993, Sabo i Scitovski 2009, Tarantola 2005).

- *Metoda najmanjih kvadrata*, kojom se traži najbolja  $l_2$  aproksimacija optimalnih parametara

$$F_2(a) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - f(x_i; a)|^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Metoda se koristi ako su pogreške  $\varepsilon_i$  normalno distribuirane s očekivanjem 0 i varijancom  $\sigma_i^2$  (vidi primjerice Björck 1996, Cadzow 2002, Pauše 1993, Tarantola 2005).

- *Minimax metoda*, kojom se traži najbolja  $l_\infty$  aproksimacija optimalnih parametara (vidi primjerice Cadzow 2002, Watson 1980, Tarantola 2005)

$$F_\infty(a) = \max_{i=1, m} p_i |y_i - f(x_i; a)| \rightarrow \min. \quad (3)$$

Ako se pogreške  $\delta_i$  mogu očekivati u izmjerenim vrijednostima nezavisne varijable i pogreške  $\varepsilon_i$  u izmjerenim vrijednostima zavisne varijable

$$y_i = f(x_i + \delta_i; a) + \varepsilon_i,$$

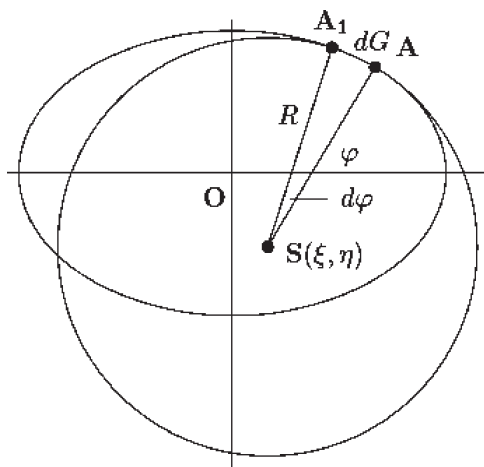
onda se također može primijeniti neka od prethodno navedenih metoda, ali tako da se istodobno minimiziraju i pogreške  $\varepsilon_i$  i pogreške  $\delta_i$ . Spomenimo samo poznatu metodu *Total Least Squares* (vidi primjerice Nievergelt 2000, Nitzel i Petrović 2007, Scitovski i dr. 1998), kod koje se minimizira suma kvadrata ortogonalnih udaljenosti točaka  $T_i(x_i, y_i)$  do grafa model-funkcije  $x \mapsto f(x; a)$

$$F_{TLS}(a) = \sum_{i=1}^m p_i (y_i - f(x_i + \delta_i; a))^2 + \sum_{i=1}^m p_i \delta_i^2 \rightarrow \min_{a, \delta_i} \quad (4)$$

## 2. Duljina luka meridijanske elipse

### 2.1. Direktni problem

Geodetska širina  $\varphi$  proizvoljne točke  $A(x, y)$  na odabranom rotacijskom referentnom elipsoidu Zemlje  $y = G(x)$  definira se kao kut između normale na površinu elipsoida u točki  $A$  i ekvatorijalne ravnine (vidi sliku 1).



Slika 1. Definiranje geodetske širine.

U svrhu određivanja diferencijala luka meridijana u točki  $A$  meridijanske elipse s poluosima  $a, b$  treba konstruirati kružnicu zakrivljenosti koja dodiruje meridijansku elipsu u točki  $A$ . Ta kružnica ima središte u točki  $S(\xi, \eta)$  i radijus  $R$  gdje je:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2), \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \quad (5)$$

Tada je (vidi Bašić 2000, Čubranić 1974a, Čubranić 1974b) diferencijal luka elipse s poluosima  $a, b$  i ekscentricitetom  $e^2 = 1 - (b/a)^2$  jednak

$$dG = Rd\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi, \quad (6)$$

a duljina luka meridijanske elipse između točaka  $T_1$  i  $T_2$  sa širinama  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  jednaka je

$$G = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \quad (7)$$

Ovdje se pojavljuje poznati eliptički integral za koji ne postoji primitivna funkcija, pa se ne može primijeniti Newton-Leibnizova formula. Zbog toga se u stručnoj literaturi (vidi primjerice Bašić 2000, Hofmann-Wellenhof i dr. 1997, Sjöberg 2006) predlaže jedna od sljedećih mogućnosti:

- izraz  $(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$  razviti u Newtonov binomni red i tada integral (7) integrirati član po član;
- u slučaju relativno male udaljenosti točaka  $T_1$  i  $T_2$  funkciju  $\varphi \mapsto a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$  razviti u Taylorov red u okolini nule, te uzeti prihvatljivu aproksimaciju;
- primijeniti neku od metoda za numeričku integraciju (primjerice poznatu Simpsonovu formulu).

## 2.2. Inverzni problem

Zanimljivo je promatrati odgovarajući inverzni problem koji je promatrao Laplace:

*uz pretpostavku da su poznati rezultati mjerenja  $(\Delta\varphi_i, \varphi_i, \Delta G_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  različitih kutova  $\Delta\varphi_i$ , geodetskih širina  $\varphi_i$  i odgovarajućih lukova  $\Delta G_i$ , može se postaviti pitanje rekonstrukcije meridijanske elipse, tj. određivanje njezinih poluosi  $a, b$ .*

Taj problem možemo rješavati nekom od metoda navedenih u t.1. Primjerice, poluosi  $a, b$  elipse s ekscentricitetom  $e^2 = 1 - (b/a)^2$  u smislu najmanjih apsolutnih odstupanja možemo potražiti diskretizacijom (6) i minimiziranjem funkcionala

$$F_1(u, v) = \sum_{i=1}^m \left| \Delta G_i - \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi_i)^{3/2}} \Delta \varphi_i \right|,$$

gdje je  $u = a(1 - e^2)$  i  $v = e^2$ , što možemo pisati kao

$$F_1(u, v) = \sum_{i=1}^m \Delta \varphi_i \left| \frac{\Delta G_i}{\Delta \varphi_i} - \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi_i)^{3/2}} \right|. \quad (8)$$

Na taj način brojeve  $\Delta\varphi_i$  možemo shvatiti kao težine podataka prilikom procjene parametra  $u, v$  model-funkcije

$$f(\varphi; u, v) = \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \quad (9)$$

Odmah se vidi da je problem minimizacije funkcionala  $F_1$  nelinearni problem jer je model-funkcija  $f$  nelinearna u parametru  $v$ . Ako bismo u proračun htjeli uključiti i pretpostavku o mogućnosti pojave pogrešaka kod mjerenja kuteva  $\varphi_i$ , onda treba primijeniti *Total Least Squares* metodu spomenutu u t.1 ili njezin analogon u drugim normama (vidi Schöbel, 1999).

*Primjer 1.* Kao ilustraciju primjene metoda navedenih u *t.1* promatrajmo problem procjene parametara model-funkcije (9). U tu svrhu podatke  $(\Delta\varphi_i, \varphi_i, \Delta G_i/\Delta\varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, 10$  generirat ćemo pomoću uniformne distribucije  $U(0, \pi/2)$  i normalne distribucije  $N(0, \sigma_i^2)$  na sljedeći način.

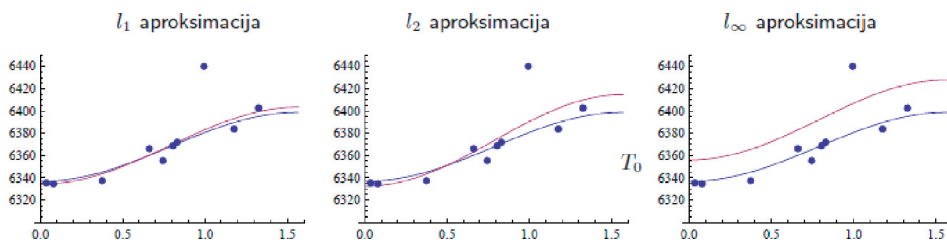
$$\Delta\varphi_i = 1, \quad i = 1, \dots, 10,$$

$$\varphi_i \propto U(0, \pi/2), \quad i = 1, \dots, 10,$$

$$\frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} = f(\varphi_i; u, v) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \propto N(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, 10,$$

pri čemu su vrijednosti  $u = a(1 - e^2)$  i  $v = e^2$  određene prema GRS 80 (Lapaine i dr. 2006). Pritom smo osmi podatak  $\Delta G_8/\Delta\varphi_8$  bitno pokvarili. Takav podatak u literaturi se naziva *jako stršeci podatak* (engl.: outlier, wild point). Na osnovi tih podataka primjenom Nelder-Meadove metode (vidi Kelley 1999, Nelder i Mead 1965) vlastitim programom izrđenom u programskom sustavu *Mathematica* odredit ćemo optimalne parametre model-funkcije (9).

Na slici 2 prikazani su podaci, graf originalne model-funkcije (dobivene na osnovi parametara iz GRS 80 – označeno plavo) kao i graf model-funkcije s parametrima procijenjenim metodama navedenim u *t.1*. Primjećuje se da je procjena parametara primjenom  $l_1$  metode neznatno osjetljiva (robustna) na prisutnost outliera, za razliku od metode najmanjih kvadrata, dok kod  $l_\infty$  metode prisutnost outliera bitno utječe na veličinu optimalnih parametara. S druge strane  $l_1$  metoda najbolje detektira outlierse među podacima jer su njihovi reziduali značajno veći.



Slika 2. Utjecaj outliera na procjenu optimalnih parametara model-funkcije (9).

Problem određivanja putanja i oblika nebeskih tijela, posebno Zemlje, od davnina je iz različitih razloga (religioznih, filozofskih, praktičnih – primjerice pomorska putovanja) privlačio pažnju. O tome postoje pisani tragovi brojnih pokušaja još iz prvog tisućljeća prije Krista (vidi primjerice Nievergelt 2000).

Johannes Kepler iskoristio je precizna Braheova mjerenja i zaključio da se planeti ne gibaju po kružnicama, već po elipsama, sa Suncem u jednom od fokusa. Francuski matematičar i astronom markiz Pierre-Simon de Laplace na osnovi Newtonova zakona gravitacije zaključio je da rotacijska masa Zemlje ima oblik elipsoida koji rotira oko svoje kraće osi. Za eksperimentalni dokaz te tvrdnje koristio je mjerenja navedena u tablici 2.

### 2.3. Linearizacija inverznog problema

Ako model-funkciju (9) primjenom Taylorove formule razvijemo u red po potencijama od  $\sin \varphi$ , dobivamo

$$\frac{\alpha(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \alpha(1-e^2) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2!} e^4 \sin^4 \varphi + \dots \right). \quad (10)$$

Budući da se poluosi Zemljine meridijanske elipse relativno malo razlikuju, njezin ekscentricitet  $e^2$  je relativno malen broj, pa se u Taylorovu razvoju možemo zadržati na drugom članu. Na taj način Laplace je dobio model-funkciju linearnu u parametrima

$$g(\varphi; \alpha, \beta) = \alpha + \beta \sin^2 \varphi, \quad \alpha = \alpha(1-e^2), \quad \beta = \frac{3}{2} \alpha(1-e^2)e^2. \quad (11)$$

Da je takva linearna aproksimacija u spomenutom povijesnom razdoblju bila dovoljno kvalitetna, može se vidjeti iz relativnih odstupanja (u promilima) vrijednosti originalne model-funkcije  $f$  dane s (9) od linearizirane model-funkcije  $g$  dane s (11) na intervalu  $[0, \pi/2]$  s vrijednostima parametara  $a, b, e^2$  uzetih prema GRS 80:

$\varphi_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
$1000 \frac{ f(\varphi_1) - g(\varphi_1) }{f(\varphi_1)}$	0	0.0001	0.0019	0.0085	0.0222	0.0421	0.0635	0.0796

Ipak, u usporedbi s današnjim geodetskim točnostima (vidi primjerice Seeber 2000) ovakva aproksimacija nebi zadovoljila. Minimilirajući funkcionali (1–3) za lineariziranu model-funkciju  $g$  danu s (11) na taj način postaju znatno jednostavniji, a za njihovo minimiziranje razrađene su specijalne metode.

### 3. Linearni problemi procjene parametara

Za dane podatke  $(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}; y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m > n$ , uz odgovarajuće težine  $p_i > 0$  treba procijeniti vektor optimalnih parametara  $a^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)^T \in R^{n+1}$  linearne model-funkcije

$$f(x; a) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (12)$$

koji minimizira funkcional

$$F: R^{n+1} \mapsto R, \quad F(a) = \|y - Ja\|, \quad (13)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

gdje je  $\|\cdot\|$  neka vektorska norma. Zbog svojstva nejednakosti trokuta za normu  $\|\cdot\|$  i linearnosti model-funkcije (12) slijedi konveksnost funkcionala  $F$  i egzistencija optimalnih parametara model-funkcije (12).

Zbog jednostavnosti, a bez gubitka općenitosti, nadalje pretpostavljamo da su zadani podaci mjerenja  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  uz odgovarajuće težine  $p_i > 0$  na osnovi kojih treba procijeniti optimalne parametre linearne model-funkcije

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha + \beta x. \quad (14)$$

### 3.1. Linearni problem najmanjih kvadrata

Na osnovi danih podataka optimalne parametre linearne model-funkcije (14) procijenit ćemo metodom najmanjih kvadrata (najbolja  $l_2$  aproksimacija) minimizacijom funkcionala

$$F_2(\alpha, \beta) = \|y - Ja\|_2^2 = \sum_{i=1}^m p_i (y_i - \beta x_i - \alpha)^2. \quad (15)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Neka je  $(\alpha^*, \beta^*)$  točka minimuma funkcionala (15). Koristeći standardna svojstva aritmetičke sredine (vidi primjerice Scitovski i dr. 1998) dobivamo

$$F_2(\alpha^*, \beta^*) = \sum_{i=1}^m p_i (y_i - \beta^* x_i - \alpha^*)^2 \geq \sum_{i=1}^m p_i (y_i - \beta^* x_i - (\bar{y} - \beta^* \bar{x}))^2. \quad (16)$$

gdje je  $\bar{x} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^m p_i x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^m p_i y_i$ ,  $\omega = \sum_{i=1}^m p_i$ , pri čemu se jednakost u (16) dobiva onda i samo onda ako je  $\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x}$ . To znači da najbolji  $l_2$  pravac prolazi centroidom podataka  $T_C(\bar{x}, \bar{y})$ . Iz (16) slijedi

$$F_2(\alpha^*, \beta^*) \geq \bar{F}_2(\beta^*) = \sum_{i=1}^m p_i (y_i - \bar{y} - \beta^* (x_i - \bar{x}))^2.$$

iz čega lako dobivamo formule za optimalne parametre

$$\beta^* = \frac{\sum_{i=1}^m p_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^m p_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad \alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x}. \quad (17)$$

To je vrlo popularna metoda koju u literaturi (vidi primjerice Björck 1996, Cadzow 2002, Dennis i Schnabel 1996) obično nalazimo pod imenom metoda najmanjih kvadrata (engl.: Least Squares Method), a pripisuje se francu-

skom matematičaru Legendreu<sup>3</sup> i njemačkom matematičaru Gaussu<sup>4</sup> (vidi Gauss 1995).

### 3.2. Linearni problem najmanjih apsolutnih odstupanja

Na osnovi danih podataka optimalne parametre linearne model-funkcije (14) procijenit ćemo metodom najmanjih apsolutnih odstupanja (najbolja  $l_1$  aproksimacija) minimizacijom funkcionala

$$F_1(\alpha, \beta) = \|y - Ja\|_1 = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \beta x_i - \alpha|. \quad (18)$$

Ovaj princip obično se u znanstvenoj literaturi povezuje uz ime J. R. Boškovića<sup>5</sup>, a osobito se koristi u slučaju ako se među podacima mogu pojaviti jako stršeci podaci (tzv. outliers). Razlog tome je svojstvo “robusnosti”, odnosno neznatne osjetljivosti najbolje  $l_1$  aproksimacije parametara na pojavu takvih podataka. Zbog nediferencijabilnosti minimizirajućeg funkcionala  $F_1$  ne mogu se primijeniti klasične metode minimizacije, već neka od poznatih metoda nediferencijabilne minimizacije: poznata Nelder-Meadova metoda, razni genetički algoritmi i sl. (vidi Kelley 1999, Nelder i Mead 1965). Za rješavanje problema minimuma funkcionala (18) postoje i neke specijalne metode, koje se obično zasnivaju na linearnom programiranju (Li 2004, Schöbel 1999, Watson 1980). U ovom radu koristit ćemo specijalnu, vrlo efikasnu metodu, navedenu kod (Sabo i Scitovski 2009).

Najprije primjećujemo da vrijedi (vidi Brimberg i dr. 2003, Pauše 1993)

$$\min_{\alpha} \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \alpha| = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \text{med}_i(p_i, y_i)|, \quad (19)$$

gdje je  $\text{med}(p_i, y_i)$  oznaka za težinski medijan podataka  $y_1, \dots, y_m$  s težinama  $p_i > 0$ . Pojam težinskog medijana definirat ćemo prema (Sabo i Scitovski 2009). Neka je  $I = \{1, \dots, m\}$  i

$$J = \{k \in I : 2 \sum_{i=1}^k p_i \leq \sum_{i=1}^m p_i\}.$$

Ako je  $J$  prazan skup, onda je  $\text{med}_i(p_i, y_i) = y_i$ . Ako  $J$  nije prazan skup, označimo  $k_0 := \max J$ . Tada

- ako je  $2 \sum_{i=1}^k p_i < \sum_{i=1}^m p_i$ , onda je  $\text{med}_i(p_i, y_i) = y_{k_0+1}$ ;
- ako je  $2 \sum_{i=1}^k p_i = \sum_{i=1}^m p_i$ , onda je  $\text{med}_i(p_i, y_i)$  bilo koji broj iz segmenta  $[y_{k_0}, y_{k_0+1}]$ .

Iz navedene definicije slijedi da uvijek postoji  $\mu \in I$ , takav da je  $y_{\mu} = \text{med}_i(p_i, y_i)$ .

<sup>3</sup>A. P. Legendre (1752–1833)

<sup>4</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

<sup>5</sup>Josip Ruđer Bošković (1711–1787), hrvatski znanstvenik (matematičar, fizičar, astronom i filozof) rođen u Dubrovniku, smatra se ocem metoda za  $l_1$  aproksimacije. U današnje vrijeme, pojavom snažnih računala, te su metode dobile novi zamah, o čemu svjedoče brojni radovi u časopisima, kao i međunarodne konferencije s tom problematikom. Serija takvih konferencija posvećena je baš J. R. Boškoviću (vidi Dodge 1997)



*Teorem 1.* Neka je  $\Lambda = \{T_i(x_i, y_i): i \in I = \{1, \dots, m\}, m \geq 2\}$  skup točaka u ravnini s odgovarajućim težinama  $p_i > 0$ . i svojstvom  $(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m) \& (x_1 < x_m)$ . Tada postoji najbolji  $l_1$  pravac koji prolazi barem kroz dvije različite točke iz skupa  $\Lambda$ .

*Dokaz.* Neka je  $(\alpha^*, \beta^*)$  točka minimuma funkcionala  $F_1$ . Koristeći svojstvo (19) dobivamo

$$F_1(\alpha^*, \beta^*) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \beta^* x_i - \alpha^*| \geq \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \beta^* x_i - \text{med}_i(p_i, y_i - \beta^* x_i)|. \quad (20)$$

Budući da postoji  $\mu \in I$  takav da je  $\text{med}(p_i, y_i - \beta^* x_i) = y_\mu - \beta^* x_\mu$ , tada u (20) vrijedi jednakost onda i samo onda ako je  $\alpha^* = y_\mu - \beta^* x_\mu$ , što znači da najbolji  $l_1$  pravac prolazi točkom  $T_\mu(x_\mu, y_\mu)$ . Zato vrijedi

$$F_1(\alpha^*, \beta^*) \geq \bar{F}_1(\beta^*) = \sum_{i=1}^m p_i |(y_i - y_\mu) - \beta^*(x_i - x_\mu)|,$$

Funkcional  $\bar{F}_1$  uz oznaku  $I_0 = \{i \in I: x_i = x_\mu\}$  možemo pisati

$$\bar{F}_1(\beta^*) = \sum_{i \in I_0} p_i |y_i - y_\mu| + \sum_{i \in I \setminus I_0} p_i |x_i - x_\mu| \left| \frac{y_i - y_\mu}{x_i - x_\mu} - \beta^* \right|.$$

Prema (19) postoji  $v \in I \setminus I_0$ , takav da je  $\beta^* = \text{med}_{i \in I \setminus I_0}(p_i |x_i - x_\mu|, (y_i - y_\mu)/(x_i - x_\mu))$ . To znači da najbolji  $l_1$  pravac

$$f(x; \alpha^*, \beta^*) = \alpha^* + \beta^* x = \frac{y_v - y_\mu}{x_v - x_\mu} (x - x_\mu) + y_\mu$$

prolazi kroz dvije različite točke  $T_\mu(x_\mu, y_\mu)$  i  $T_v(x_v, y_v)$  iz skupa točaka  $\Lambda$ .

*Q.E.D.*

Na osnovi tvrdnje i dokaza *Teorema 1* konstruiran je algoritam *Two Points* (Sabo i Scitovski 2009) za traženje najbolje  $l_1$  aproksimacije linearne model-funkcije (14), koji u samo nekoliko koraka dovodi do optimalnih parametara. Za rješavanje takvih problema mogu se koristiti i gotovi moduli nediferencijabilne globalne minimizacije, koji su već ugrađeni u programske sustave (primjerice, *Mathematica*, *Matlab*, *Numerical Recipes*), a obično koriste neku varijantu već spomenute Nelder-Meadove metode ili različite genetičke algoritme. Međutim, ako primjena zahtjeva izračunavanje u realnom vremenu uz prisutnost velikog broja podataka (primjerice u robotici ili kod kinematičke tehnike pozicioniranja s pomoću GPS-satelita), onda spomenuti gotovi moduli ni približno ne zadovoljavaju postavljene zahtjeve.

Dalje navodimo već spomenuti algoritam *Two Points*, modificiran posebno kod definiranja početne aproksimacije i kriterija zaustavljanja.

*Algoritam Two Points*

- Korak 0. Učitati podatke  $(p_i, x_i, y_i)$ ,  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ ,  $m \geq 2$ ;  
 Izračunati  $\alpha_0, \beta_0$  kao najbolju  $l_2$  aproksimaciju prema (17);  
 Izračunati  $F_1(\alpha_0, \beta_0) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \beta_0 x_i - \alpha_0|$ ;
- Korak 1. Izračunati težinski medijan  $\text{med}_{i \in I}(p_i, y_i - \beta_0 x_i)$  i pronaći  $\mu \in I$ , takav da bude  $y_\mu - \beta_0 x_\mu = \text{med}_{i \in I}(p_i, y_i - \beta_0 x_i)$ ;  
 Staviti  $\alpha_1 := y_\mu - \beta_0 x_\mu$  i izračunati  $F_1(\alpha_1, \beta_0) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - \beta_0 x_i - \alpha_1|$ ;
- Korak 2. Definirati skup  $I_0 = \{i \in I: x_i = x_\mu\}$ , izračunati težinski medijan  $\text{med}_{i \in I \setminus I_0}(p_i |x_i - x_\mu|, (y_i - y_\mu)/(x_i - x_\mu))$  i pronaći  $\nu \in I \setminus I_0$ , takav da bude  $(y_\nu - y_\mu)/(x_\nu - x_\mu) = \text{med}_{i \in I \setminus I_0}(p_i |x_i - x_\mu|, (y_i - y_\mu)/(x_i - x_\mu))$ ;  
 Staviti  $\beta_1 := (y_\nu - y_\mu)/(x_\nu - x_\mu)$  i izračunati  $\bar{F}_1(\beta_1) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - y_\mu - \beta_1(x_i - x_\mu)|$ ;
- Korak 3. Definirati skup  $I_0 = \{i \in I: x_i = x_\nu\}$ , izračunati težinski medijan  $\text{med}_{i \in I \setminus I_0}(p_i |x_i - x_\nu|, (y_i - y_\nu)/(x_i - x_\nu))$  i pronaći  $k \in I \setminus I_0$ , takav da bude  $(y_k - y_\nu)/(x_k - x_\nu) = \text{med}_{i \in I \setminus I_0}(p_i |x_i - x_\nu|, (y_i - y_\nu)/(x_i - x_\nu))$ ;  
 Staviti  $\beta_2 := (y_k - y_\nu)/(x_k - x_\nu)$  i izračunati  $\bar{F}_1(\beta_2) = \sum_{i=1}^m p_i |y_i - y_\nu - \beta_2(x_i - x_\nu)|$ ;
- Korak 4. Ako je  $(x_k, y_k) \neq (x_\mu, y_\mu)$ , staviti  $(x_\mu, y_\mu) := (x_\nu, y_\nu)$ ,  $(x_\nu, y_\nu) := (x_k, y_k)$  i prijeći na *Korak 3*; U protivnom, STOP.

Na osnovi dokaza *Teorema 1* može se primijetiti najprije da niz aproksimacija u algoritmu definira silazni niz funkcijskih vrijednosti

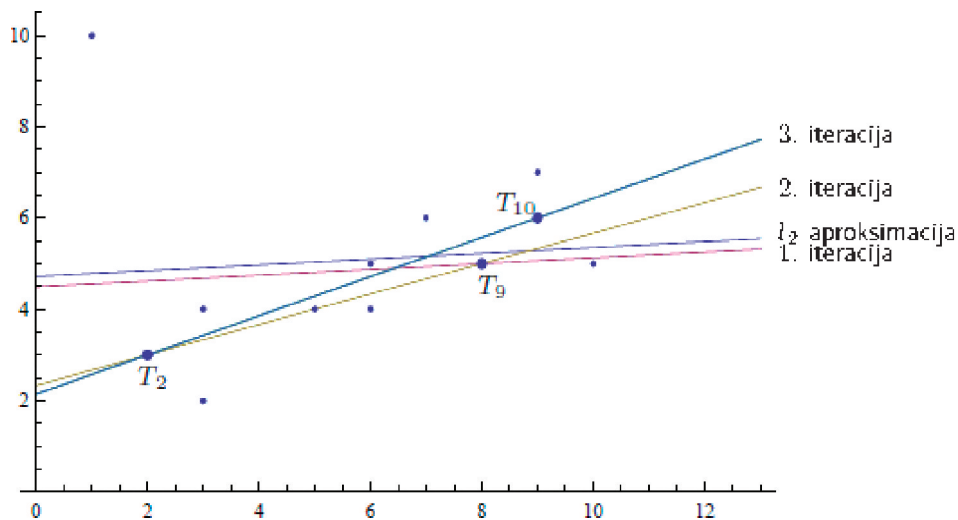
$$F_1(\alpha_0, \beta_0) \geq F_1(\alpha_1, \beta_0) \geq \bar{F}_1(\beta_1) \geq \bar{F}_1(\beta_2) \geq \dots$$

Najčešće već nakon dvije, rijetko nakon tri, iteracije navedene u algoritmu postiže se najbolja  $l_1$  aproksimacija parametara  $\alpha^*, \beta^*$ . Pritom u slučaju masovnih podataka vrlo je važno imati efikasan algoritam za izračunavanje težinskog medijana. Nekoliko takvih algoritama mogu se vidjeti kod (Gurwitz 1990).

*Primjer 2.* Na osnovi danih podataka  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , pri čemu su odgovarajuće težine  $p_i = 1$ , ilustrirat ćemo algoritam *Two Points* za traženje najbolje  $l_1$  aproksimacije:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	1	2	3	3	5	6	6	7	8	9	9	10
$y_i$	10	3	2	4	4	4	5	6	5	6	7	5

Tijek iterativnog procesa prikazan je na slici 3 i tablici 1.



Slika 3. Ilustracija algoritma Two Points.

Tablica 1. Tijek iterativnog procesa algoritma Two Points.

$k$	Prva točka	Druga točka	Korak u algoritmu	$\alpha_k$	$\beta_k$	$F_1(\alpha_k, \beta_k)$
0	–	–	$T_2$ aproksimacija	4.71756	0.0636132	16.9517
1	–	$T_9(8,5)$	1	4.49109	0.0636132	16.3003
2	$T_9(8,5)$	$T_2(2,3)$	2	2.33333	0.333333	14.6667
3	$T_2(2,3)$	$T_{10}(9,6)$	3	2.14286	0.428571	14.5714
4	$T_{10}(9,6)$	$T_2(2,3)$	3	2.14286	0.428571	14.5714

Vidimo da je broj točaka koje leže iznad optimalnog  $l_1$  pravca i broj točaka koje leže ispod optimalnog  $l_1$  pravca manji od polovine broja svih točaka. Vrijedi još općenitije, tzv. *pseudo halving* svojstvo (vidi primjerice Schöbel 1999)

$$\sum_{y_i > \alpha^* + \beta^* x_i} p_i \leq \frac{\omega}{2} \quad \text{i} \quad \sum_{y_i < \alpha^* + \beta^* x_i} p_i \leq \frac{\omega}{2}, \quad \text{gdje je} \quad \omega = \sum_{i=1}^m p_i.$$

### 3.3. Linearni minimax problem

Na osnovi danih podataka optimalne parametre linearne model-funkcije (14) treba procijeniti na osnovi zahtjeva da maksimalno apsolutno odstupanje bude minimalno (najbolja  $l_\infty$  aproksimacija), tj. minimizacijom funkcionala

$$F_{\infty}(\alpha, \beta) = \|y - J\alpha\|_{\infty} = \max_{i=1,m} |y_i - \beta x_i - \alpha|. \quad (21)$$

Najbolja  $l_{\infty}$  aproksimacija u literaturi (vidi primjerice Dodge 1997, Watson 1982) obično se naziva Čebiševljeva aproksimacija, prema poznatomu ruskomu matematičaru Čebiševu<sup>6</sup>. I u tom je slučaju minimizirajuća funkcija  $F_{\infty}$  nediferencijabilna, a specijalne metode za minimizaciju tog funkcionala mogu se naći primjerice kod Cadzow 2002, Watson 1982.

#### 4. Analiza Laplaceova pristupa procjeni parametara Zemljine meridijanske elipse

Francuski matematičar i astronom markiz Pierre-Simon de Laplace<sup>7</sup> u pet volumena opsežnog djela *Mécanique Céleste* (1798–1825), koje je 1829. godine na engleski jezik preveo Amerikanac N. Bewditch, među ostalim analizira oblik Zemljina rotacijskog elipsoida. Kao što je pokazano u t.2, korektno rješavanje tog problema u  $l_1$  i  $l_{\infty}$  normi vodi na nelinearni problem nediferencijabilne minimizacije. U ono doba to je bilo teško provedivo zbog mnogobrojnih kompliciranih izračunavanja, koja bez pomoći modernih računala gotovo nisu izvediva. Zbog toga je i Laplace u svojim izračunima polazni problem najprije linearizirao.

Promatraju se rezultati mjerenja<sup>8</sup> navedenih u tablici 2.

Tablica 2. Mjerenja koja je koristio Laplace.

Mjesto	$\varphi_i$ [g]	$\Delta\varphi_i$ [g]	$\frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i}$ [dt]
Peru	0	3.4633	25 538.85
Cape of Good Hope	37.0093	1.3572	25 666.65
Pennsylvania	43.5556	1.6435	25 599.60
Italy	47.7963	2.4034	25 640.55
France	51.3327	10.7487	25 658.28
Austria	53.0926	3.2734	25 683.30
Lapland	73.7037	1.0644	25 832.25

Prema spoznajama prevoditelja (N. Bewditch, Boston, MA) Laplaceova djela<sup>9</sup> većina tih mjerenja sadrže znatnije pogreške. Mjerenja na Rtu dobre nade (Cape of Good

<sup>6</sup> П. Л. Чебышев (1821–1894)

<sup>7</sup> Markiz Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), francuski plemić, nositelj velikoga križa legije časti, član brojnih znanstvenih i stručnih udruga i akademija znanosti: francuske, pariške, londonske, ruske, danske, švedske, pruske, holandske, talijanske, američke, itd.

<sup>8</sup> kutovi su mjereni u gradima ( $400^g = 2\pi$ ), a duljine u tzv. dvostrukim toise (1 dt  $\approx 2 \cdot 1949$  mm = 3.898 m). *Toise* je stara francuska mjera za duljinu koja se upotrebljavala do 1848. godine. Više detalja može se vidjeti na web stranici University of Denver: <http://www.du.edu/~jcalvert/tech/oldleng.htm>

<sup>9</sup> Dostupno na <http://www.archive.org/details/mcaniquecles02laprich>

Hope), koja je obavio La Caille po nalogu kapetana G. Everesta, smatraju se nepouzdanima jer mjereni luk prelazi preko visokih planina. Prema zabilježkama baruna Von Zacha, mjerenja u Austriji, koja je izveo Liesganig, vrlo su nepouzdana. Mjerenja obavljena u Laponiji, Pennsylvaniji i Italiji (obavio J. R. Bošković) sadrže nešto manje pogreške, a jedino se mjerenja obavljena u Peruu i Francuskoj mogu smatrati korektnima. Jasno je da se na bazi takvih mjerenja ne mogu očekivati pouzdani rezultati. S druge strane, matematički algoritmi u to doba nisu bili dovoljno razrađeni, a sredstva za računanje gotovo da i nisu postojala. Mukotrпно izračunavanje navedeno u Laplaceovoj III. knjizi ipak je bilo korektno, što potvrđuje i dalje provedeni računski postupak uz primjenu programskog sustava *Mathematica*.

Za dane podatke mjerenja ( $\Delta\varphi_i, \varphi_i, \Delta G_i/\Delta\varphi_i$ ),  $i = 1, \dots, 7$ , kutova  $\Delta\varphi_i$ , geodetskih širina  $\varphi_i$  i relativnih duljina lukova  $\Delta G_i/\Delta\varphi_i$  iz tablice 2, treba rekonstruirati meridijansku elipsu, tj. treba procijeniti optimalne parametre model-funkcije (9) kao najbolju nelinearnu  $l_1$ ,  $l_2$  i  $l_\infty$  aproksimaciju minimiziranjem funkcionala

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= \sum_{i=1}^7 \Delta\varphi_i \left| \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi_i)^{3/2}} \right|, \\ F_2(u, v) &= \sum_{i=1}^7 (\Delta\varphi_i)^2 \left[ \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi_i)^{3/2}} \right]^2, \\ F_\infty(u, v) &= \max_{i=1,7} \Delta\varphi_i \left| \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \frac{u}{(1 - v \sin^2 \varphi_i)^{3/2}} \right|, \end{aligned} \quad (22)$$

gdje je  $u = \alpha(1 - e^2)$  i  $v = e^2$ . Težine podataka za  $l_1$  i  $l_\infty$  aproksimaciju shvaćamo kao u (8) i definirane su s  $p_i = \Delta\varphi_i$ , a za  $l_2$  aproksimaciju s  $p_i = (\Delta\varphi_i)^2$ . Problem minimizacije tih funkcionala nije jednostavan, a u slučaju najbolje  $l_1$  i  $l_\infty$  aproksimacije riječ je o problemu nediferencijabilne minimizacije. To je razlog zbog kojega je Laplace model-funkciju  $f$  danu s (9) linearizirao, kao što je to pokazano u t.2.3. Na taj način dobivamo linearnu model-funkciju  $g$  zadanu s (11). U III. Laplaceovoj knjizi optimalni parametri procijenjeni su za tu model-funkciju na bazi minimizacije maksimalnog apsolutnog odstupanja (dakle, kao najbolja  $l_\infty$  aproksimacija) i na bazi minimizacije prosječnog apsolutnog odstupanja (dakle, u suštini kao najbolja  $l_1$  aproksimacija), a prema ideji J. R. Boškovića.

Potražimo najprije optimalne parametre linearizirane model-funkcije (11) kao

- najbolje  $l_1$  aproksimacije primjenom algoritma *Two Points* (vidi t.3.2) minimizacijom funkcionala

$$\Phi_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^7 \Delta\varphi_i \left| \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \alpha - \beta \sin^2 \varphi_i \right|,$$

- najbolje  $l_2$  aproksimacije primjenom formula (17) (vidi t.3.1) minimizacijom funkcionala

$$\Phi_2(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^7 (\Delta\varphi_i)^2 \left[ \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \alpha - \beta \sin^2 \varphi_i \right]^2,$$

- i najbolje  $l_\infty$  aproksimacije primjenom metode navedene kod Cadzow 2002 minimizacijom funkcionala

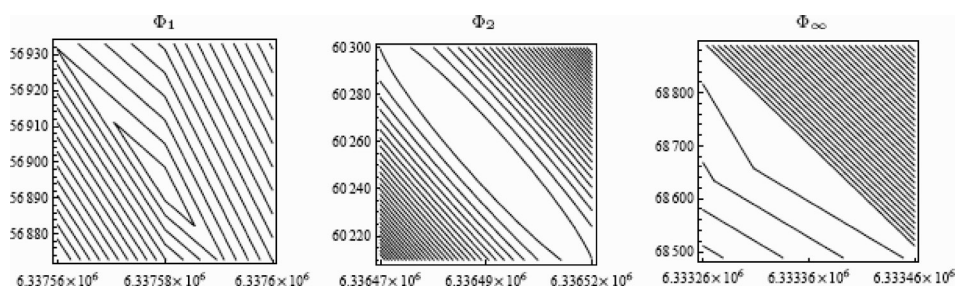
$$\Phi_\infty(u, v) = \max_{i=1,7} \Delta\varphi_i \left| \frac{\Delta G_i}{\Delta\varphi_i} - \alpha - \beta \sin^2 \varphi_i \right|,$$

gdje je  $\alpha = a(1 - e^2)$ ,  $\beta = \frac{3}{2} a(1 - e^2)e^2$ .

Dobivene rezultate interesatno je usporediti s vrijednostima GRS 80 prema Moritzu 1992 (Lapaine i dr. 2006). Zbog toga su originalni Laplaceovi podaci, koji su izraženi u dvostrukim toise pretvoreni u metre, a podaci izraženi u gradima pretvoreni u radijane. U tablici 3 prikazane su vrijednosti optimalnih parametara, kao i pripadne vrijednosti glavnih poluosi  $a, b$  te ekscentricitet  $e^2$  meridijanske elipse. Također je prikazana spljoštenost  $f := 1 - b/a$  i recipročna vrijednost spljoštenosti  $1/f$ . Na slici 4 prikazane su nivo-krivulje svih minimizirajućih funkcija u okolini rješenja.

Tablica 3. Rezultati minimizacije funkcionala  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_\infty$  za lineariziranu model-funkciju.

Metoda	$\alpha^*$	$\beta^*$	$a$ [m]	$b$ [m]	$e^2$	$f$	$1/f$
$l_1$	6 337 577.66	56 892.90	6 375 734.62	6 356 627.51	0.005985	0.00299685	333.084
$l_2$	6 336 490.70	60 254.87	6 376 916.89	6 356 671.66	0.006339	0.00317477	314.984
$l_\infty$	6 333 355.10	68 688.56	6 379 480.98	6 356 376.20	0.007230	0.00362173	276.111
GRS 80			6 378 137	6 356 752	0.006694	0.00335281	298.257



Slika 4. Nivo-krivulje minimizirajućih funkcionala  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_\infty$  u okolini minimuma.

Rezultati dobiveni za najbolju  $l_1$  i  $l_\infty$  aproksimaciju podudaraju se s rezultatima navedenima u III. Laplaceovoj knjizi. Vidimo da su rezultati primjene najbolje  $l_2$  aproksimacije (metode najmanjih kvadrata) najbolji u smislu podudaranja dobivenih parametara s GRS 80. U ono doba ta metoda još nije bila dovoljno poznata. Prvi radovi u kojima se koristi ova metoda su<sup>10</sup> jedan Legendreov rad iz 1805., jedan Gaussov iz 1809. i jedan Laplaceov iz 1810. Bez obzira na to, uzevši u obzir karakteristike  $l_1, l_2$  i  $l_\infty$  procjenitelja i ilustraciju navedenu u primjeru 1, može se

<sup>10</sup> Primjedba anonimnog recenzenta

zaključiti da je distribucija pogrešaka mjerenja navedenih u tablici 2 takva da najbolje odgovara primjena  $l_2$  procjenitelja. Kada bi se pojavila mjerenja s ponekom izrazitijom pogreškom, onda bi  $l_1$  procjenitelj dao najbolje rezultate.

Kao što je pokazano u t.2.3 linearizirana aproksimacija  $g$  model-funkcije  $f$  dovoljno je kvalitetna, pa se rješavanjem nelinearnih problema (22) ne mogu očekivati puno bolji rezultati. To i potvrđuju provedena izračunavanja prikazana u tablici 4. Minimizacije nelinearnih funkcionala (22) provedene su primjenom Nelder-Meadove metode (vidi Kelley 1999, Nelder i Mead 1965) na bazi vlastitog programa izrađenog u programskom sustavu *Mathematica*.

Tablica 4. Rezultati minimizacije funkcionala  $F_1, F_2, F_\infty$  za nelineariziranu model-funkciju.

Metoda	$u^*$	$v^*$	$a$ [m]	$b$ [m]	$e^2$	$f$	$1/f$
$l_1$	6 337 577.67	0.0062399	6 377 371.83	6 357 443.61	0.006240	0.00312483	320.017
$l_2$	6 336 501.79	0.00660891	6 378 657.79	6 357 544.85	0.006609	0.00330904	302.121
$l_\infty$	6 330 871.91	0.0081058	6 382 608.03	6 356 687.34	0.008106	0.00406114	246.236
GRS 80			6 378 137	6 356 752	0.006694	0.00335281	298.257

Primijetimo da su razlike između izračunatih vrijednosti poluosi  $a, b$  iz tablica 3 i 4, koje s odnose na  $l_1$  aproksimaciju (Laplaceov izračun) samo nekoliko puta manje nego odgovarajuće razlike između Laplaceovog izračuna (linearna  $l_1$  aproksimacija u tablici 3) i vrijednosti prema GRS. Iz toga se može zaključiti da je<sup>11</sup> “u stara vremena linearizacija bila nužna zbog mogućnosti tadašnje tehnike računanja, a danas to više nije tako i sada vidimo da ne tako loša mjerenja ponekad ispadnu lošijim nego što jesu zbog raznih neopravdanih aproksimacija”.

*ZAHVALA.* Zahvaljujemo anonimnom recenzentu, koji je svojim primjedbama i sugestijama u znatnoj mjeri pomogao da ovaj tekst bude bolji.

## Literatura

- Bašić, T. (2000): Državna izmjera (Viša geodezija), Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Björck, Å. (1996): Numerical Methods for Least Squares Problems, SIAM, Philadelphia.
- Brimberg, J., Juel, H., Schöbel, A. (2003): Properties of three-dimensional median location models, *Annals of Operations Research*, Vol. 122, 71–85.
- Cadzow, J. A. (2002): Minimum  $l_1, l_2$  and  $l_\infty$  norm approximate solutions to an overdetermined system of linear equations, *Digital Signal Processing*, Vol. 12, 524–560.
- Čubranić, N. (1974a): Viša geodezija, I dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.
- Čubranić, N. (1974b): Viša geodezija, II dio, Tehnička knjiga, Zagreb.

<sup>11</sup> Zaključak izveden na osnovu primjedbe anonimnog recenzenta

- Dennis, J. E., Schnabel, R. B. (1996): Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, SIAM, Philadelphia.
- Dodge, Y. (Ed.) (1997): Statistical Data Analysis Based on the  $l_1$ -norm and Related Methods, Proceedings of The Third International Conference on Statistical Data Analysis Based on the  $l_1$ -norm and Related Methods, Elsevier, Neuchâtel.
- Gauss, C. F. (1995): Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae, SIAM, Philadelphia (original with translation in english by G. W. Stewart).
- Gurwitz, C. (1990): Weighted median algorithms for  $l_1$  approximation, BIT Vol. 30, 301–310.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J. (1997): Global Positioning System: Theory and Practice, 4th revised edition, Springer-Verlag, Wien.
- Kelley, C. T. (1999): Iterative Methods for Optimization, SIAM, Philadelphia.
- Lapaine, Milj., Tutić, D., Lapaine, Mir. (2006): Numeričke vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80, Geodetski list, 4, 259–269.
- de Laplace, P. S. (1798–1825): Traité de Mécanique Céleste, Durprat, Paris, (Translated with commentary in english by N. Bewditch, Boston, MA, 1829; Chelsea, Bronx, NY, 1966), <http://www.archive.org/details/mcaniquecles02laprich>.
- Li, Y. (2004): A maximum likelihood approach to least absolute deviation regression, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Vol. 12, 1762–1769.
- Nelder, J. A., Mead, R. (1965): A simplex method for function minimization, Comput. J., Vol. 7, 308–313.
- Nievergelt, Y. (2000): A tutorial history of least squares with applications to astronomy and geodesy, J. Comput. Appl. Math., Vol. 121, 37–72.
- Nitzel, F., Petrović, S. (2007): Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der ausgleichenden Geraden, ZFV, Vol. 133, 141–148.
- Pauše, Ž. (1993): Uvod u matematičku statistiku, Školska knjiga, Zagreb.
- Sabo, K., Scitovski, R. (2009): The best least absolute deviations line – properties and two efficient methods, ANZIAM J., 1–15, doi:10.1017/S1446181108080346.
- Schöbel, A. (1999): Locating Lines and Hyperplanes: Theory and Algorithms, Springer Verlag, Berlin.
- Scitovski, R., Ungar, Š., Jukić, D. (1998): Approximating surfaces by moving total least squares method, Applied Mathematics and Computation, Vol. 93, 219–232.
- Seeber, G. (2000): Real-Time Satellite Positioning on the Centimeter Level in the 21st Century using Permanent Reference Stations, Nordic Geodetic Summerschool, Fevik, Norway, <http://www.ife.uni-hannover.de/mitarbeiter/seeber/publikation/seeber.pdf>.
- Sjöberg, L. (2006): New solution to the direct and indirect geodetic problems on the ellipsoid, Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, Vol. 131, 35–39.
- Späth, H. (2001): Minisum location in space with restriction to curves and surfaces, Mathematical Communications, Vol. 6, 47–56.
- Tarantola, A. (2005): Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, SIAM, Philadelphia.
- Watson, G. A. (1980): Approximation Theory and Numerical Methods, John Wiley & Sons, Chichester.



# Reconstruction of the Earth's Meridian Ellipse on the Basis of Experimental Measurements

*ABSTRACT.* On the basis of new mathematical optimization methods this paper analyzes an old problem of reconstructing the Earth's ellipsoid of rotation on the basis of measurement data, which was considered by the French mathematician and astronomer marquis Pierre-Simon de Laplace as early as the beginning of the 18th century. An efficient method from the paper (Sabo and Scitovski 2009) for searching optimal parameters of the best least absolute deviations linear approximation is especially analyzed, illustrated and modified. In the scientific literature the best  $l_1$  approximation is usually associated with the name of Croatian scientist J. R. Bošković. The least absolute deviations methods have recently started to be extensively applied in different technical applications due to their property of robustness and the possibility of implementation in real time on modern computers.

*Keywords:* Positioning, Least Absolute Deviations, Curve fitting, Earth's Meridian Ellipse.

*Prihvaćeno:* 2009-02-27