

MJERENJE POVRŠINA METODOM »MONTE-CARLO«

PETRICA NOVOSEL-ŽIC I ŽELJKA RICHTER

Uvod

Prenošenjem sferne površine Zemlje na ravnu plohu nastaju greške o kojima pri upotrebi geografskih karata treba voditi računa. Greške su upravno proporcionalne s faktorom umanjenosti prirodne veličine Zemlje ili njenih dijelova, odnosno s modulom. Stoga, samo na kartama malih modula, ujedno i manjeg prostornog obuhvata (planovi i topografske karte) gdje je sfernost zanemariva, posredstvom mjerila uspješno vršimo razne kartometrijske radnje. U geografiji, od posebnog je značaja mjerenje dužina i površina. Na posljednje se u ovome radu osvrćemo.

Iako određenu površinu na karti (p) ili u prirodi (P) dobijemo matematičkim formulama: $p = \frac{P}{M^2}$

odnosno $P = p \cdot M^2$ (M = modul), neophodno je i praktično znanje mjerenja površina na kartama. Provodimo ga na više načina: pomoću milimetarskog papira, pomoću planimetra, a na topografskim kartama i pomoću Gauss-Krügerove mreže kvadrata, pogodnih za veoma brzo određivanje površine.

Ovim prilogom pokušali smo ukazati na još jednu mogućnost mjerenja površina na geografskim kartama i to, primjenom metode »Monte Carlo«. Prividnu složenost ove metode olakšava, ali i odgovarajuću preciznost osigurava, korištenje suvremenih računara.

Metoda »Monte-Carlo«

Simulaciju nekog procesa ili slijeda događaja, primjenom principa matematičke vjerojatnosti i statistike, možemo smatrati statističkim modeliranjem.

Jedna od osnovnih metoda statističkog modeliranja jeste i metoda »Monte-Carlo«. Ona ima višestruku praktičnu primjenu, kao npr: u vojnoj tehnici; u planiranju proizvodnje; kod masovnog opsluživanja; pri analizi slika tehničko-analitičkih metoda, te u geografiji, za mjerenje površina na karti.

Metoda »Monte-Carlo« temelji se na upotrebi slučajnih brojeva generiranih po određenoj statističkoj raspodjeli. Taj bitan element metode »Monte-Carlo« – slučajne brojeve – tabelarno donose matematičko-statistički izvori, a suvremeni računari sadrže ugrađen program za njihovo generiranje, najčešće po uniformnoj ili normalnoj raspodjeli. Time je izbjegnuta mučan posao ručnog generiranja, pa je ova metoda prihvatljivija i za nas, u mjerenju površine nekog omeđenog područja predstavljenog na geografskoj karti krupnijeg mjerila.

Konkretno, osnovno sredstvo kojim se, uz naknadne matematičko-statističke operacije služimo pri izračunavanju površine metodom »Monte-Carlo« je kvadratična ploha proizvoljno odabranih dimenzija, dakle, poznate površine. Nazivamo je osnovnom plohom. Ona sadrži izvjestan, poznati broj generiranih točaka slučajno odabranih koordinata dobivenih bilo iz tablica slučajnih brojeva bilo programom iz računara (sl. 1). Zbog veće točnosti, obično koristimo više osnovnih ploha. Ovdje treba spomenuti i drugu, prozirnu plohu, (transparent ili prikladna folija) iste veličine, na koju s karte precizno precrtaimo granice prostora nepoznate površine (sl. 2). Međusobnim preklapanjem ovih dviju ploha (sl. 3 i 4), brojenjem nekih točaka, te primjenom određenih matematičkih operacija dobit ćemo traženi rezultat.

Osvrnimo se prvenstveno na međusobni odnos ploha, točnije na odnos poznate i nepoznate površine, kao i na odnos točaka iz čega će proizaći formula za izračunavanje nepoznate površine. Naime, pri mjerenju površine metodom »Monte-Carlo«, polazimo od slijedeće postavke. Ako na osnovnu plohu poznate površine (P_0) i poznatog broja točaka (T_0) slučajno odabranih koordinata (sl. 1) stavimo drugu, veličinom jednaku plohu na kojoj je ucrtana nepoznata površina (P_n , sl. 2), ona će prekriti izvjestan broj točaka (T) osnovne plohe (sl. 3). Odnos prekrivenog i sveukupnog broja točaka, identičan je, s određenom vjerojatnošću, odnosu nepoznate površine ucrtanog prostora i osnovne plohe. Iz toga slijedi da je:

$$T : T_p \quad P_n : P_0$$

a nepoznata površina (P_n) koja prekriva određeni broj točaka (T), što ih u postupku mjerenja utvrđujemo brojenjem, bit će:

$$P_n = P_0 \cdot \frac{T}{T_0}$$

Navedeni elementi – površine i točke – pri primjeni ove metode podliježu određenim ograničenjima. Tako npr. površina osnovne plohe mora biti 1,6 do 3,3 puta veća od ucrtane, nepoznate površine, odnosno, obratno postavljeno znači, da nepoznata površina ne bi smjela biti veća od 60% ni manja od 30% od površine osnovne plohe. To procjenjujemo od oka. Nadalje, broj točaka slučajno odabranih koordinata na osnovnoj plohi iz praktičnih razloga ne smije biti manji od 6 točaka/cm², a ni veći od 9 točaka/cm². Poslije takovih saznanja, možemo pristupiti samom postupku mjerenja površina kojeg ćemo na konkretnom primjeru u nastavku objasniti, odnosno pratiti.

No, prije toga, podsjećamo još, na prateću pojavu u kartometriji – na greške. Naime, kao i kod uvođenja navedenih načina mjerenja površina na kartama, i rezultati, dobiveni metodom »Monte-Carlo« uključuju izvjesne pogreške, uvjetovane subjektivno ili objektivno. Subjektivne greške ovise o izabranoj teh-

Tablica 1. Rezultati mjerenja površine otoka Ilovik

I Osnovna ploha	II Položaj	III Broj točaka
1	A	155 ^a
	B	158 ^{aa}
	C	156
	D	162
2	A	154
	B	143
	C	155
	D	150
3	A	168
	B	149
	C	171
	D	152
4	A	136
	B	154
	C	140
	D	144

Broj položaja	$n = 16$
Srednja vrijednost	$X_{sr} = 153,5625$
Stupnjevi slobode	$n - 1 = 15$
Stand. devijacija	$S_{n-1} = 9,1431$

^a Broj točaka što ih prekriva otok Ilovik na osnovnoj plohi I pri položaju »A« kako prikazuje sl. 3.

^{aa} Broj točaka što ih prekriva otok Ilovik na osnovnoj plohi I pri položaju »B« kako prikazuje sl. 4.

nici rada, te o psihofizičkom stanju osobe koja mjerenje vrši. Objektivne greške odnose se na osjetljivost metode i zakona vjerojatnosti po kojem su točke raspoređene na osnovnoj plohi. U slučaju ove metode, a u statistici uobičajeno, grešku u rezultatu prihvaćamo ako sa sigurnošću od 95% možemo tvrditi da izmjerena površina odgovara stvarnoj vrijednosti. I to ćemo, obradom podataka dobivenih mjerenjem na samome primjeru dokazati.

Primjer mjerenja

Primjenu metode »Monte-Carlo« u mjerenju površina na geografskim kartama predstavljamo na primjeru otoka Ilovika. Površinu otoka računali smo s topografske karte mjerila 1:50 000. Postupak mjerenja u kojem se isprepliće praktični i matematičko-statistički dio je sljedeći. Nacrtali smo četiri osnovne kvadratične plohe, proizvoljno odabranih, jednakih dimenzija (u našem slučaju: $a = 84$ mm; $P = 7056$ mm²). Veličina plohe limitirana je mogućnostima računara. Pomoću računara na svaku plohu unijeto je 480 točaka slučajno odabranih koordinata. Time je dobiven različit, samo međusobni raspored točaka na osnovnim ploham. To će rezultirati i različitošću podataka dobivenih mjerenjem (tab. 1; kol. III), a nakon njihove obrade i s preciznijim konačnim rezultatom tj. traženom površinom.

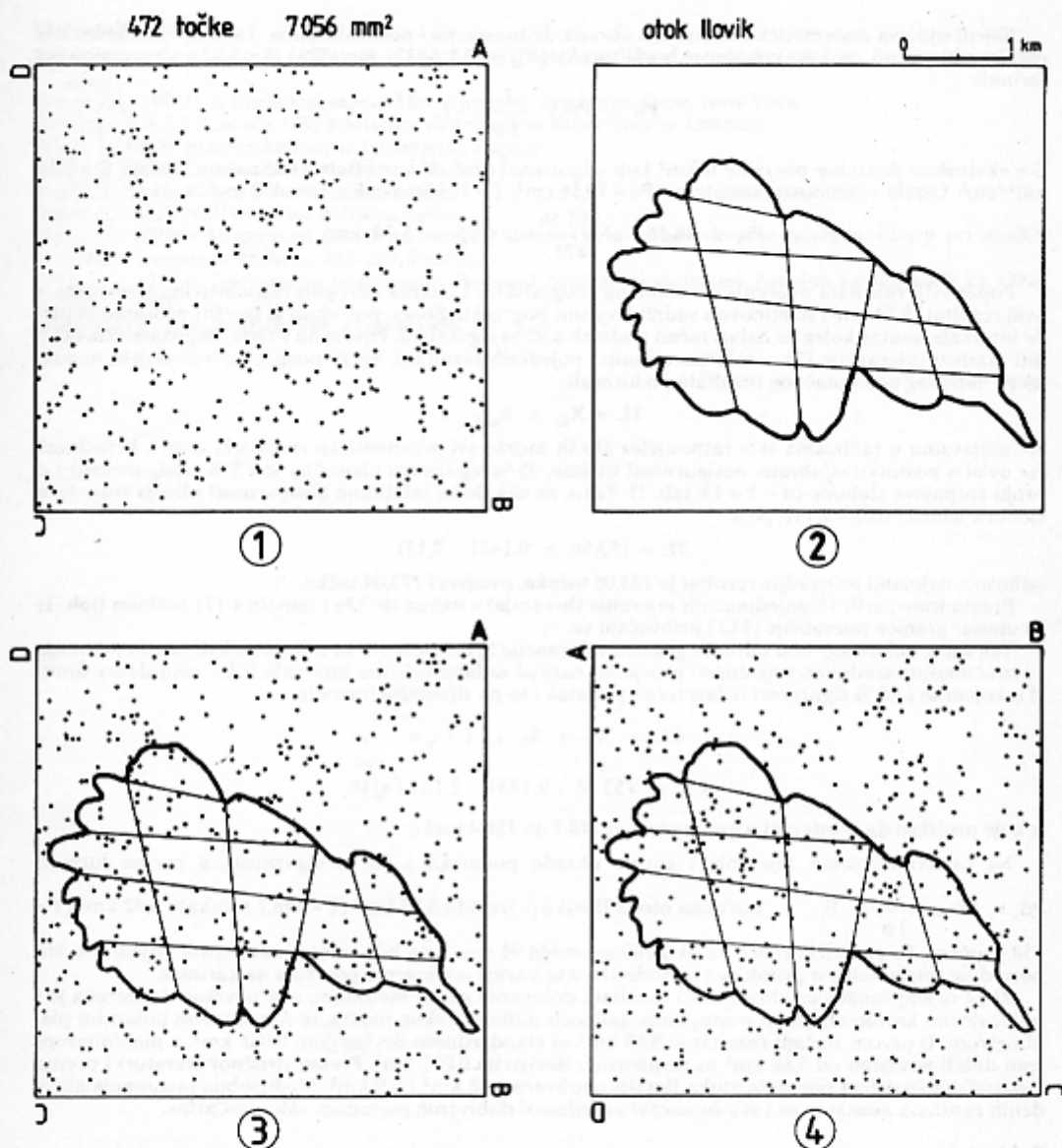
Budući da su spomenute točke presudne u postizavanju preciznog rezultata, potrebno je o njima nešto više reći. Naime, svaka od 480 točaka samo je teoretski bezdimenzionalna. U praksi, da bi mogli razlučiti razmak dviju susjednih točaka uzimamo najmanju promatranu jediničnu površinu od $0,5 \cdot 0,5$ mm = $0,25$ mm². Takvih jediničnih površina ima na osnovnoj plohi 28 224 (tj. $7056/0,25$). Od tih mogućih 28 224 jediničnih površina slučajno je označeno 480. Znači, za jediničnu površinu ovakove veličine, za očekivati je da će se u osam jediničnih površina ($480^2/28\ 224 = 8$) poklopiti dvije slučajno generirane točke, pa će ih stvarno biti 472 ($480 - 8 = 472$) s kojim brojem trebamo računati, a njihova srednja gustoća je 6,69 točaka/cm² što udovoljava uvjetu.

Navedene četiri osnovne plohe temelj su u praktičnom dijelu postupka mjerenja. Osim njih, koristimo i prozirnu plohu istih dimenzija. Na nju je s topografske karte precrtan otok Ilovik. Zbog praktičnosti u radu (brojenje točaka) i veće točnosti, površina otoka proizvoljno je podijeljena u više manjih polja (sl. 2). Procijenjeno je, da ona zaprema nešto više od 30% površine osnovne plohe. To je unutar prethodno istaknutih ograničenja.

Prozirnu plohu, na kojoj je ucrtan Ilovik, preklapali smo točno po okviru, uzastopno sa svakom od četiri osnovne plohe (tab. 1, kol. 1) i to u položaju kada je stranica »A« gore (sl. 3 pokazuje taj položaj

Tablica 2. Odnosi površina na karti i u prirodi

Mjerilo karte	E	1/E
	P u prirodi za 1 cm ² na karti	P na karti za 1 km ² u prirodi
1 : 100 000	1 km ²	1 cm ²
1 : 50 000	0,25 km ²	4 cm ²
1 : 25 000	0,0625 km ²	16 cm ²
1 : 10 000	0,01 km ²	100 cm ²



Sl. 1. Osnovna ploha s generiranim točkama slučajno odabranih koordinata.

Sl. 2. Prozirna ploha s ucrtanom, nepoznatom površinom (otok Ilovik)

Sl. 3. Osnovna ploha (Sl. 1.) preklapljena prozirnom plohom (Sl. 2.); položaj »A« (tab. 1.).

Sl. 4. Kao sl. 3; položaj »B« (tab. 1.).

samo za plohu 1). Prostor Ilovika prekrpio je pri tom svaki puta drugi broj točaka. Njihovim brojenjem, uz daljnju obradu, u biti vršimo mjerenje površine. U cilju dobivanja optimalnih vrijednosti, postupak mjerenja vršen je i u ostala tri moguća položaja pojedine plohe, zaokretanjem za 90° tj. uz stranice »B« »C« i »D« (tab. 1, kol. II). Slika 4 prikazuje prvu plohu u položaju »B«. Tako je izvršeno ukupno 16 mjerenja, odnosno brojenja točaka, što ih je u svakom od 16 položaja drugačije prekrivala površina Ilovika (sl. 3 i 4). Prema tome, dobili smo i 16 različitih rezultata (tab. 1, kol. III).

Slijedi njihova matematičko-statistička obrada. Jednostavna i nešto složenija. Tako npr. uzmemo li u razmatranje samo srednju vrijednost broja točaka ($X_{sr} = 153,5625$), površinu Ilovika izračunavamo po formuli:

$$P_n = P_o \cdot \frac{T}{T_o} \cdot E$$

E = ekvivalent prirodne površine u km^2 koji odgovara 1 cm^2 na karti (tab. 2). U našem slučaju $E = 0,25 \text{ km}^2/\text{cm}^2$. Ostale vrijednosti poznate su ($P_o = 70,56 \text{ cm}^2$; $T = 153,56$ točaka; $T_o = 472$ točke), pa je:

$$P_n = 70,56 \cdot \frac{153,56}{472} \cdot 0,25 = 5,74 \text{ km}^2$$

Poput svih rezultata mjerenja površine na geografskim kartama i drugim raspoloživim metodama, i ovaj rezultat ($5,74 \text{ km}^2$) neminovno sadrži izvjesnu pogrešku. Stoga, potrebno je izvršiti procjenu veličine intervala unutar kojeg se nalazi točan podatak s 95 % sigurnosti. Povezano s time, najprije treba ocijeniti granicu tolerancije (TL – tolerance limits) pojedinih rezultata. To se postiže određivanjem najmanjeg i najvećeg pojedinačnog rezultata po formuli:

$$TL = X_{sr} \pm S_{n-1} \cdot t$$

* t * očitavamo u tablicama » t – raspodjele« što ih sadrže svi matematičko-statistički izvori. Vrijednost * t * ovisi o postotku odabrane nesigurnosti (naime, 95 % sigurnosti identično je s 5 % nesigurnosti) i o broju stupnjeva slobode ($n - 1 = 15$; tab. 1). Tako, za naš slučaj odabrane nesigurnosti i broja stupnjeva slobode iznosi $t_{0,05} = 2,131$, pa je

$$TL = 153,56 \pm 9,1431 \cdot 2,131$$

odnosno, najmanji prihvatljiv rezultat je 134,08 točaka, a najveći 173,04 točke.

Prema tome, svih 16 pojedinačnih mjerenja (brojanja) s najmanje 136 i najviše s 171 točkom (tab. 1) su unutar granice tolerancije (TL) i prihvaćaju se.

Tek sada, nakon što smo odredili granicu tolerancije (TL), možemo sa svih 16 pojedinačnih mjerenja i s izračunatom srednjom vrijednosti procijeniti napred zadanu veličinu intervala (CL – confidence limits) u kojem se s 95 % sigurnosti nalazi točan podatak i to po slijedećoj formuli:

$$CL = X_{sr} \pm S_{n-1} \cdot t / \sqrt{n}$$

$$CL = 153,56 \pm 9,1431 \cdot 2,131 / \sqrt{16}$$

iz koje proizlazi da je interval u granicama od 148,7 do 158,4 točke.

Na osnovi izvršenih mjerenja i gornje obrade podataka s 95 % sigurnosti, a prema formuli

$$P_n = P_o \cdot \frac{T}{T_o} \cdot E$$

, površina otoka Ilovika je između $5,55 \text{ km}^2$ ($T = 148,7$ točaka) i $5,92 \text{ km}^2$ ($T =$

$158,4$ točke). To praktički znači, da bi u 100 mjerenja 95 rezultata bilo unutar navedenih vrijednosti što potvrđuje svrsishodnost primjene i metode »Monte-Carlo« u mjerenju površina na kartama.

Zbog ocjenjivanja vjerodostojnosti rezultata dobivenih ovom metodom, ista površina izmjerena je i uobičajenim kartometrijskim postupcima: pomoću milimetarskog papira, te Amslerovim polarnim planimetrom. U prvom slučaju rezultat je $5,63 \text{ km}^2$ sa standardnom devijacijom $0,048 \text{ km}^2$, a planimetrom smo dobili površinu od $5,68 \text{ km}^2$ uz standardnu devijaciju $0,077 \text{ km}^2$. Prema stručnoj literaturi i prema statističkim izvorima površina otoka Ilovika obuhvaća $5,88 \text{ km}^2$ i $5,9 \text{ km}^2$. Medusobna odstupanja navedenih rezultata neznatna su i sva su unutar vrijednosti dobivenih metodom »Monte-Carlo«.

Zaključak

Cilj ovog priloga je, uz korištenje suvremenog računara ukazati na mogućnost primjene metode »Monte-Carlo« i u mjerenju površina na geografskim kartama. Zbog tehničkih ograničenja (veličina osnovne plohe), velike površine, ne mogu se odjednom izmjeriti. Stoga su, kao osnova za veće prirodne površine prikladnije topografske karte, a za manje, planovi.

Vjerodostojnost rezultata dobivenih metodom »Monte-Carlo« potvrđuju i rezultati dobiveni ostalim, dosada uobičajenim kartometrijskim metodama.

PRILOZI

Literatura i izvori:

- Bahrenberg G. i Giese E. (1974): Statistische Methoden und ihre Anwendung in der Geographie, Stuttgart.
- Bauer E.L. (1971): A statistical manuel for chemists, Academic Press, New York.
- Hastings N.A.J. i Peacock J.B.: Statistical distribution Buterworths, London.
- Pavlič I. (1985): Statistička teorija i primjena, Zagreb.
- Petrić J. (1979): Operaciona istraživanja II, Beograd.
- Roglić J. (1967): Osnove kartografije, Zagreb
- Rubić I. (1952): Naši otoci na Jadranu, Split.
- Turina S. (1986): Mogućnost primjene metode Monte-Carlo za određivanje površine likova pri analizi slike, Strojarstvo 28, br. 4, 251-259, Zagreb.
- Zecević T. (1974): Operaciona istraživanja, Beograd. Statistički godišnjak Zajednica općina Rijeka 1986, Rijeka 1986.
- Statistički godišnjak SRH 1986, Zagreb 1986.