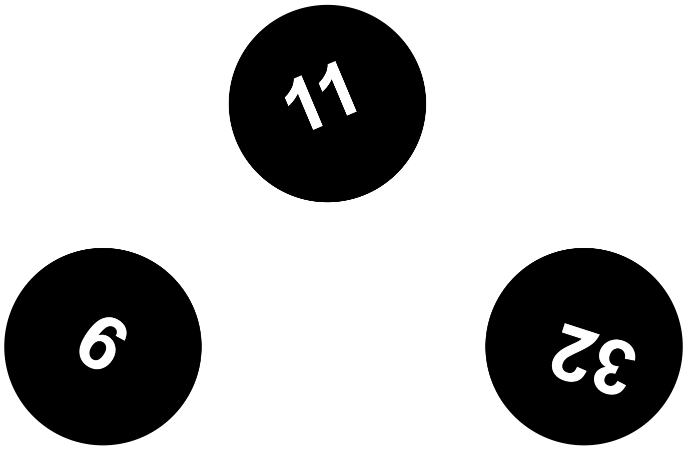
πlay$\sqrt{\text{mat}\chi}$

Zakon velikih brojeva i Loto

Tvrtko Tadić

Hrvatska lutrija priređuje dvije igre na sreću: Loto 7-39 i Loto 6/45. Zanimljivo je da se od 1995. vodi statistika o izvučenim brojevima. Ta statistika redovito se objavljuje u službenom glasilu Hrvatske lutrije [3]. U ovom kratkom prilogu osvrnut ćemo se na to što nam brojevi govore.



Za početak izrecimo **zakon velikih brojeva** (malo slobodnijim riječima):
Neka je $x_k^{(n)}$ broj pojavljivanja k u n izvlačenja. Za *velike*[1] brojeve n relativna frekvencija

$$\frac{x_k^{(n)}}{n} \approx p_k, \tag{1}$$

gdje je p_k vjerojatnost da izvučemo broj k u pojedinom izvlačenju.

(Teoretski, kad bismo imali beskonačno mnogo izvlačenja, gornja frekvencija postala bi jednaka vjerojatnosti.)

Općenitije o ovom teoremu i njegov dokaz čitatelj može naći u [1]. Za nas je zanimljivo pogledati što se događa kad imamo velik broj izvlačenja igre Loto. Pokazuju li podatci da je podjednaka vjerojatnost da svi budu izvučeni?

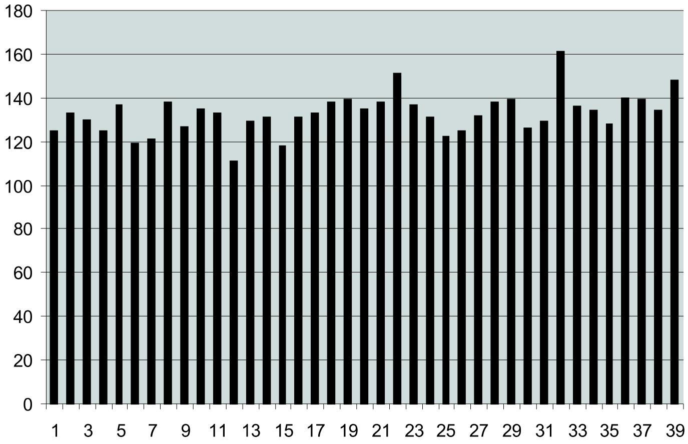
Loto 7-39

Iz bubnja se izvlači 8 brojeva (7 glavnih i 1 dopunski). U statistici izvučenih brojeva bilježe se svi izvučeni brojevi (bili dopunski ili ne). U sljedećoj tablici dani su podatci sa $n = 647$ izvlačenja.

BROJ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
IZVUČEN ×	125	133	130	125	137	119	121	138	127	135	133	111	129
BROJ	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
IZVUČEN ×	131	118	131	133	138	139	135	138	151	137	131	122	125
BROJ	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
IZVUČEN ×	132	138	139	126	129	161	136	134	128	140	139	134	148

Kolika je vjerojatnost da neki broj $k \in \{1, \dots 39\}$ bude izvučen (bilo kao glavni ili dopunski) od 8? Problem ćemo lakše riješiti ako gledamo vjerojatnost da ne izvučemo broj k. Ukupan broj mogućih

[1] Uglavnom što veće, to bolje. ☺



Slika 1. *Pojavljivanje brojeva u 647 izvlačenja*

kombinacija je $\binom{39}{8}$, a broj kombinacija koje ne sadrže fiksni broj k je $\binom{38}{8}$. Vjerojatnost da broj k nije izvučen je

$$\mathrm{P}(k \text{ nije izvučen}) = \frac{\binom{38}{8}}{\binom{39}{8}} = \frac{\frac{38!}{8!30!}}{\frac{39!}{8!31!}} = \frac{31}{39}.$$

Sada lako dobivamo vjerojatnost da k je izvučen:

$$\mathrm{P}(k \text{ je izvučen}) = 1 - \mathrm{P}(k \text{ nije izvučen}) = 1 - \frac{31}{39} = \frac{8}{39} = 0.205128\ldots \approx 20.51\%.$$

(Detaljnije vidi u [2].) Pogledajmo frekvenciju pojavljivanja brojeva. Broj 12 se pojavio najmanje 111 puta, a broj 32 najviše 161 puta. Njihove frekvencije su

$$\frac{111}{647} = 0,1715610\ldots \approx 17.15\% \qquad \text{i} \qquad \frac{161}{647} = 0,248840\ldots \approx 24.88\%.$$

Vidimo da ni frekvencije brojeva koji se najčešće, odnosno najmanje pojavljuju ne odstupaju mnogo od pretpostavljene vrijednosti. Ovdje treba uzeti u obzir da je broj izvlačenja relativno malen $n = 647$. No frekvencije nekih brojeva dosta dobro aproksimiraju traženu vrijednost, recimo za brojeve 2, 11 i 17, koji su se pojavili jednak broj puta, frekvencija iznosi

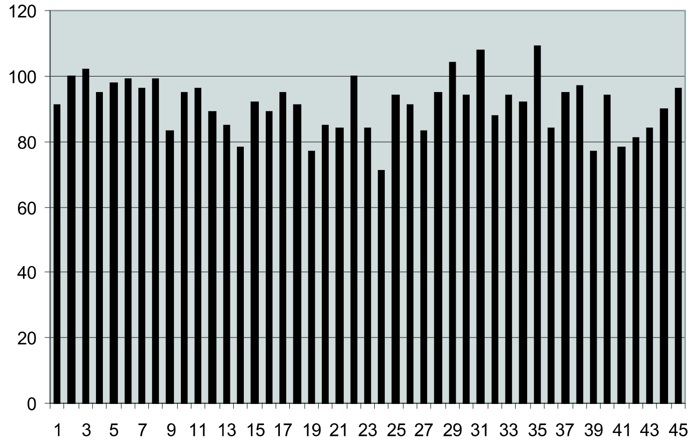
$$\frac{133}{647} = 0,205564\ldots \approx 20.56\%.$$

Loto 6/45

Kao i Loto 7-39, i Loto 6/45 ima ista pravila. Izvlači se 7 brojeva (6 glavnih i 1 dopunski). Vjerojatnost da će neki broj biti izvučen izračunavamo na analogan način i ona iznosi $\frac{7}{45} \approx 0.15555\ldots \approx 15.56\%$. U sljedećoj tablici dane su statistike za $n = 586$ izvlačenja.

BROJ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
IZVUČEN ×	91	100	102	95	98	99	96	99	83	95	96	89	85	78	92
BROJ	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
IZVUČEN ×	89	95	91	77	85	84	100	84	71	94	91	83	95	104	94
BROJ	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**
IZVUČEN ×	108	88	94	92	109	84	95	97	77	94	78	81	84	90	96

Uočimo da je ovdje broj brojeva koje izvlačimo veći (ima ih 45), a broj izvlačenja nešto manji nego u slučaju Lota 7-39 (za 61 izvlačenje). No vidjet ćemo da ni ovdje frekvencije ne odstupaju mnogo više od prethodnog slučaja. Najmanji broj puta se pojavio broj 24 i to 71 put, pripadna



Slika 2. *Pojavljivanje brojeva u 586 izvlačenja*

frekvencija je $\frac{71}{586} = 0.12111\ldots \approx 12.11\%$. Najveći se broj puta pojavio broj 35 i to 109 puta. Frekvencija pojavljivanja tog broja $\frac{109}{586} = 0.18600\ldots \approx 18.6\%$. Brojevi 1, 18 i 26 pojavili su se 91 put i frekvencija njihova pojavljivanja je $\frac{91}{586} \approx 15.529\%$, a brojevi 15 i 34 pojavljuju 92 puta i frekvencija njihovog pojavljivanja je $\frac{92}{586} \approx 15.69\%$.

Osvrt

Vidimo da razni događaji mogu težiti nekoj pravilnosti. Kao što smo vidjeli u ovom prilogu, što su brojevi veći to je ta pravilnost više izražena. Naravno da bismo mogli neke zaključke izvući moramo imati jako puno podataka (kao što je ovdje slučaj). S manjim mjerenjima netko bi mogao (neispravno) zaključiti da se neki broj rijeđe, a neki češće pojavljuje pri izvlačenju.

Literatura

[1] Sarapa N., *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[2] Brčić Ž., *Vjerojatnost dobitka na lotu*, Matka br. 37, HMD, 2001.

[3] *Glasnik* GLASILO HRVATSKE LUTRIJE, broj 633, godina XII, Hrvatska lutrija, Zagreb, 2006.