

## PROBLEMSKI ZADACI – KAKO IH RJEŠAVAJU USPJEŠNI I NEUSPJEŠNI UČENICI

Irena Klasnić

Osnovna škola Jurja Habdelića, Velika Gorica

idklasnic@net.hr

**Sažetak** – *Problemski zadaci sastavni su dio matematike i učenici se s njima gotovo svakodnevno susreću. Ti zadaci trebali bi djeci povezati sadržaje matematike i spoznaje o konkretnom okruženju, te bi ih djeca, oslanjajući se na vlastito iskustvo, trebala lakše rješavati. Unatoč očekivanom, problemski zadaci u početnoj nastavi matematike djeci su teški i nerazumljivi te učenici često doživljavaju neuspjeh u njihovu rješavanju.*

*U radu se opisuju razvoj mišljenja o osnovnim matematičkim pojmovima već od dojenačke dobi te empirijska istraživanja koja to potkrepljuju. Navode se vrste problemskih matematičkih zadataka: zadaci promjene, zadaci kombiniranja te zadaci usporedbe koji su djeci najteži tip zadataka.*

*Posebno se prikazuju istraživanja koja donose rezultate o utjecaju dobi i spola na rješavanje problemskih matematičkih zadataka. Pojašnjavaju se „shortcut“ i „meaningful“ pristup rješavanju te se ističe tendencija korištenja različitih strategija kod uspješnih i neuspješnih učenika.*

**Ključne riječi:** *Pristup prečacem, problemski matematički zadaci, smisljeniji pristup.*

### Uvod

Početno učenje matematike uglavnom povezujemo s organiziranim i sustavnim radom u nižim razredima osnovne škole, iako „odmah nakon rođenja, pa čak i prije rođenja, počinje neprekidan, cjelovit proces učenja“ (Meyer, 2002, str. 16).

Matematika, prije ili poslije, postaje većini učenika jedan od težih nastavnih predmeta, a osobito su im težak i zahtjevan dio problemski zadaci, koji bi trebali biti poveznica između realnog okruženja i matematičke apstrakcije, te djeci olakšati, pojasniti i približiti matematičke sadržaje. Zašto to nije tako?

Zašto ti zadaci djeci nisu olakšanje, već često opterećenje i nerazumljiv, nejasan dio nastavnoga gradiva? Danas postaje nužno znanstveno i empirijski pristupiti načinima rješavanja problemskih zadataka s gledišta učitelja praktičara kojima je ta problematika svakidašnjica.

Problemski zadaci nalaze se u udžbenicima, vježbenicama, zbirkama zadataka, ali i u ispitnom materijalu kojim se vrednuje postignuće učenika. Što je to u tim zadacima učenicima tako teško i nerazumljivo? Je li to izbor riječi, njihov poredak ili nedostatak misaonih struktura koje bi omogućile oblikovanje pravilne matematičke jednakosti koja bi vodila točnom rješenju?

## **Razvoj mišljenja o osnovnim matematičkim pojmovima**

Matematika je sastavni i neizostavni dio naših života. Mnogo prije nego se djeca uključuju u institucije odgoja i obrazovanja počinje razvoj mišljenja o matematičkim pojmovima. Rođenjem djeca spoznaju i istražuju matematičku dimenziju svog okruženja.

Eksperimentalna istraživanja o razumijevanju matematičkih pojmova, usvajanju brojevnih riječi i učenju brojenja provode se od početka 20. st. i traju do danas. Napretkom tehnike načini proučavanja postaju suptilniji i omogućuju istraživanja već u dojenačkoj dobi.

Istraživanja provedena na petomjesečnoj dojenčadi upućuju na mogućnost djece da i u toj dobi razlikuju skupove predmeta nejednakih kardinalnih brojeva. Djeca mogu izvoditi i jednostavne računске operacije, ali mišljenja o tome je li to rezultat brojčane spoznaje ili drugih kapaciteta, koji nisu brojčane naravi, neujednačena su.

U istraživanju provedenom na 24 petomjesečne dojenčadi potvrđeno je da postoje posebni brojčani kapaciteti koji im omogućuju brojenje (Wynn i dr., 2002). Dojenčad je u fazi privikavanja bila podijeljena u dvije jednako-brojne skupine. Prva skupina promatrala je ekran na kojem su bila prikazana dva pokretna skupa sačinjena od tri objekta (objekti su bili crveni krugovi promjera 13 milimetara). Druga skupina ispitanika navikavana je na četiri pokretna skupa, također sačinjena od tri crvena kruga jednake veličine.

Vrijeme promatranja ekrana mjerilo se dok ispitanik ne „skupi“ 30 sekundi, u najviše 14 pokušaja (mjerenje se prekidalo ako je ispitanik skrenuo pogled s ekrana na dvije ili više sekundi). Pretpostavka je bila da će ispitanici koji su u fazi privikavanja promatrali dva skupa pokretnih objekata tijekom eksperimenta dulje gledati u ekran na kojem su prikazana četiri skupa, dok će oni ispitanici koji su naviknuti na četiri skupa dulje gledati u dva skupa. Analiza dobivenih podataka pokazala je da se ispitanici ponašaju upravo na taj način. Time je potvrđena pretpostavka o posjedovanju specifičnih kapaciteta za brojčano razlikovanje kod dojenčadi.

U studiji provedenoj također na petomjesečnim bebama rezultati upućuju na činjenicu da dojenčad posjeduje različite načine tumačenja objekata. Na različite načine tumače nežive objekte od živih bića (Kuhlmeier i dr., 2004).

Već devetomjesečna dojenčad ima sustav koji podupire brojčano kombiniranje i manipuliranje. To im omogućuje uspješno zbrajanje i oduzimanje količine predmeta prikazane u eksperimentu (Mc Crink i Wynn, 2004). Ona mogu uspješno razlikovati 8 od 12 zvukova, dok šestomjesečne bebe mogu razlikovati samo 8 od 16 zvukova (Lipton i Spelke, 2003). To dokazuje da s razvojem znatno raste točnost razlikovanja, prije nego što se pojavljuje govor ili simboličko računanje.

U dobi između dvije i tri godine djeca počinju nabrajati brojevnje riječi, iako tijekom brojenja standardni poredak riječi nije uvijek pravilan, bilo zato da izostave neku brojevnju riječ, ponove je ili ne navode riječi pravilnim redosljedom. Česta pogreška u brojenju u toj dobi jest ta da djeca ne počinju brojati od jedan već od neke druge brojevnje riječi.

Većina djece do četvrte godine pravilno navodi brojevnje riječi do deset. Mnogi autori navode da je usvajanje brojevnih riječi iznad deset pod znatnim kulturološkim utjecajem. Tako Guberman (1999) navodi da djeca koja govore kineski, japanski ili korejski moraju zapamtiti prvih devet brojevnih riječi, dekadske jedinice te njihov poredak, kako bi mogla uspješno brojiti. Djeca engleskoga govornog područja i većine europskih jezika osim navedenog moraju zapamtiti i brojevnje riječi od jedanaest do devetnaest, te nazive deset-ica do sto. Ta nepravilnost odrazit će se i na rješavanje jednostavnih problemskih zadataka jer se u brojevnim riječima ne naglašava dekadska struktura brojeva (Geary, 2006).

U četvrtoj i petoj godini poimanje broja i razumijevanje brojenja omogućuje djeci rješavanje jednostavnih matematičkih priča, odnosno problemskih zadataka. Do polaska u školu vještina rješavanja se poboljšava, ali još uvijek, na svim stupnjevima školovanja, problemski zadaci ostaju težak i djeci zahtjevan dio matematike.

## Vrste problemskih zadataka

Kategorizaciju jednostavnih tekstualnih zadataka zbrajanja i oduzimanja dali su Heller i Greeno (1978., preuzeto od De Corte i dr., 1985). Oni razlikuju zadatke promjene, kombiniranja i usporedbe.

Zadaci promjene odnose se na situacije u kojima neki događaj povećava ili smanjuje količinsku vrijednost.

*Ana ima 3 jabuke.*

*Ivan joj je dao još 2 jabuke.*

*Koliko jabuka sada ima Ana?*

Zadaci kombiniranja i usporedbe uključuju statični odnos između veličina.

U zadacima kombiniranja dvije su različite veličine koje se razmatraju ili odvojeno ili u kombinaciji.

*Ana ima 3 jabuke.*

*Ivan ima 2 jabuke.*

*Koliko jabuka imaju zajedno?*

Zadaci usporedbe uključuju dvije veličine koje se uspoređuju, a traži se razlika među njima.

*Ana ima 3 jabuke.*

*Ivan ima 2 jabuke više nego Ana.*

*Koliko jabuka ima Ivan?*

Uzimajući u obzir razinu teškoće pojedine vrste zadatka, utvrđeno je da su zadaci usporedbe najteži, bez obzira na dob ispitanika, dok su u prosjeku zadaci promjene lakši od zadataka kombiniranja. Ta je tvrdnja općenita jer treba uzeti u obzir da u svakom od tri navedena tipa zadatka postoje razlike u težini rješavanja, ovisno o tome što je nepoznata veličina.

De Corte i drugi (1985) su istraživanjem na učenicima prvog i drugog razreda (6 – 8 godina) utvrdili da su učenici manje uspješni u rješavanju zadataka usporedbe nego u rješavanju zadataka promjene i kombiniranja. Rezultati su u skladu s istraživanjem provedenim na četiri kategorije ispitanika (predškolci, učenici prvog, drugog i trećeg razreda) u kojem su i najmlađi ispitanici uspješno riješili gotovo sve zadatke promjene i kombiniranja, dok je tek nekolicina riješila zadatke usporedbe (Riley i Greeno, 1988).

Uspoređujući uspješnost rješavanja zadataka kombiniranja i zadataka usporedbe kod učenika prvih razreda, podaci pokazuju da su zadaci usporedbe znatno teži (Vlahović-Štetić, 1996. i 1999). Zadaci usporedbe u velikom broju istraživanja pokazali su se kao najteži tip zadataka (Riley i dr., 1983; Riley i Greeno, 1988; Vlahović-Štetić i dr., 2004).

## **Dob i spol**

Općenito su stariji učenici uspješniji u rješavanju tekstualnih zadataka. Učenici trećih razreda (8 – 9 godina) imali su znatnih teškoća u rješavanju najlakših zadataka usporedbe za razliku od učenika petih i šestih razreda (10 – 13 godina) (Morales i dr., 1985).

Znanstvenici se slažu u činjenici da ispitanici starije kronološke dobi točnije rješavaju sve tipove zadataka, ali što se tiče spola gledišta nisu tako ujednačena.

Većina istraživanja provedena u drugoj polovini prošlog stoljeća potvrđuje hipotezu da su muški ispitanici značajno uspješniji od ženskih (Geary i dr., 2000).

Benbow i Stanley u svojim istraživanjima navode da su se muški ispitanici pokazali uspješnijima od ženskih (ispitanici su bili učenici trinaestogodišnjaci) (Benbow i Stanley, 1980. i 1983).

Dio znanstvenika smatra genetičke razlike u strukturi mozga i/ili hormonalne razlike uzrokom spolnih razlika u postignuću u matematici (Kimura, 1992; Geary, 1996).

Razlike u postignuću učenika prema spolu ispitivane su i s aspekta rješavanja problemskih zadataka. Longitudinalnom studijom provedenom na 159 dvanaestogodišnjaka nisu pronađene razlike po spolu na distinktivnim testovima (*Separate Test*) rješavanja matematičkih problemskih zadataka, pa znanstvenici pretpostavljaju da razlike u spolu nisu, barem kod dvanaestogodišnjaka, rezultat genetskih razlika (Duffy i dr., 1997). Djevojčice su čak točnije od dječaka odgovarale na lagana pitanja, dok kod težih pitanja nije uočena razlika po spolu.

Budući da neki autori navode pozitivniji stav prema matematici kao jedan od razloga boljeg postignuća dječaka, navedenom studijom provjerena je i ta hipoteza. Sugerira se, nadalje, da bi pozitivan odnos prema matematici mogao biti rezultat poticajnijeg odnosa učitelja i njihova većeg očekivanja od dječaka. Duffy i drugi navode da je to vjerojatno točno u nekim pojedinačnim slučajevima, ali u njihovu istraživanju nije uočena razlika u percepciji učitelja prema djevojčicama i dječacima u pogledu njihovih sposobnosti u rješavanju matematičkih zadataka.

Novija istraživanja ne pronalaze značajnu razliku između postignuća dječaka i djevojčica u matematičkim sposobnostima (Delgado i Prieto, 2004; Fannema 2000).

Metaanalizom 100 studija o razlici u postignuću dječaka i djevojčica u rješavanju matematičkih zadataka pronađene su neznatne razlike (Hyde i dr., 1990). Utvrđeno je da razlike po spolu u rješavanju problemskih zadataka kod djece prije polaska u školu i kod učenika osnovne škole ne postoje ili su zanemarive. U toj dobi (autori navode dob između 5 i 14 godina) ženski ispitanici pokazali su se uspješnijima u rješavanju jednostavnijih zadataka izračunavanja, razumijevanju pojmova i rješavanju problema. U srednjoj školi razlika se povećava u korist muških ispitanika u rješavanju zahtjevnijih misaonih problemskih zadataka, dok su se u rješavanju jednostavnijih računskih zadataka i razumijevanju pojmova ženski i muški ispitanici pokazali podjednako uspješnima. S porastom kronološke dobi razlika u korist muških ispitanika postaje sve veća.

## Razlike između uspješnih i neuspješnih učenika u rješavanju problemskih zadataka

U istraživanju koje su proveli Hegarty i drugi (1995) su usporedili kako problemske zadatke rješavaju uspješni, a kako neuspješni učenici. Oni smatraju da u rješavanju aritmetičkoga problemskog zadatka neuspješni učenici svoj plan rješavanja temelje na brojevima i ključnim riječima koje izdvoje iz zadatka. To se naziva direktnom translirajućom strategijom. Za razliku od njih, uspješni učenici problem rješavaju tako da konstruiraju model na osnovi situacije opisane u zadatku i svoj plan temelje na tom modelu. Takav pristup rješavanju nazivaju strategijom problemskog modela.

Autori su pojasnili ta dva opća pristupa razumijevanja matematičkih tekstualnih problema:

### 1. „*Shortcut*“ pristup (*pristup prečacem*)

Učenik koji na taj način prilazi postavljenom problemskom zadatku tijekom rješavanja izabire brojeve u zadatku i ključne odnosne riječi (*više, manje*). Na osnovi njih razvija mogući plan tako da kombinira brojeve iz problema i aritmetičke operacije na koje ga navode ključne riječi iz zadatka (zbraja ako je više, oduzima ako je manje). Takvim načinom rješavanja direktno se prevode ključne tvrdnje u brojčani izraz koji vodi k odgovoru. Učenici koji problemski zadatak rješavaju takvim pristupom ne konstruiraju kvantitativnu predodžbu situacije prezentirane u problemu.

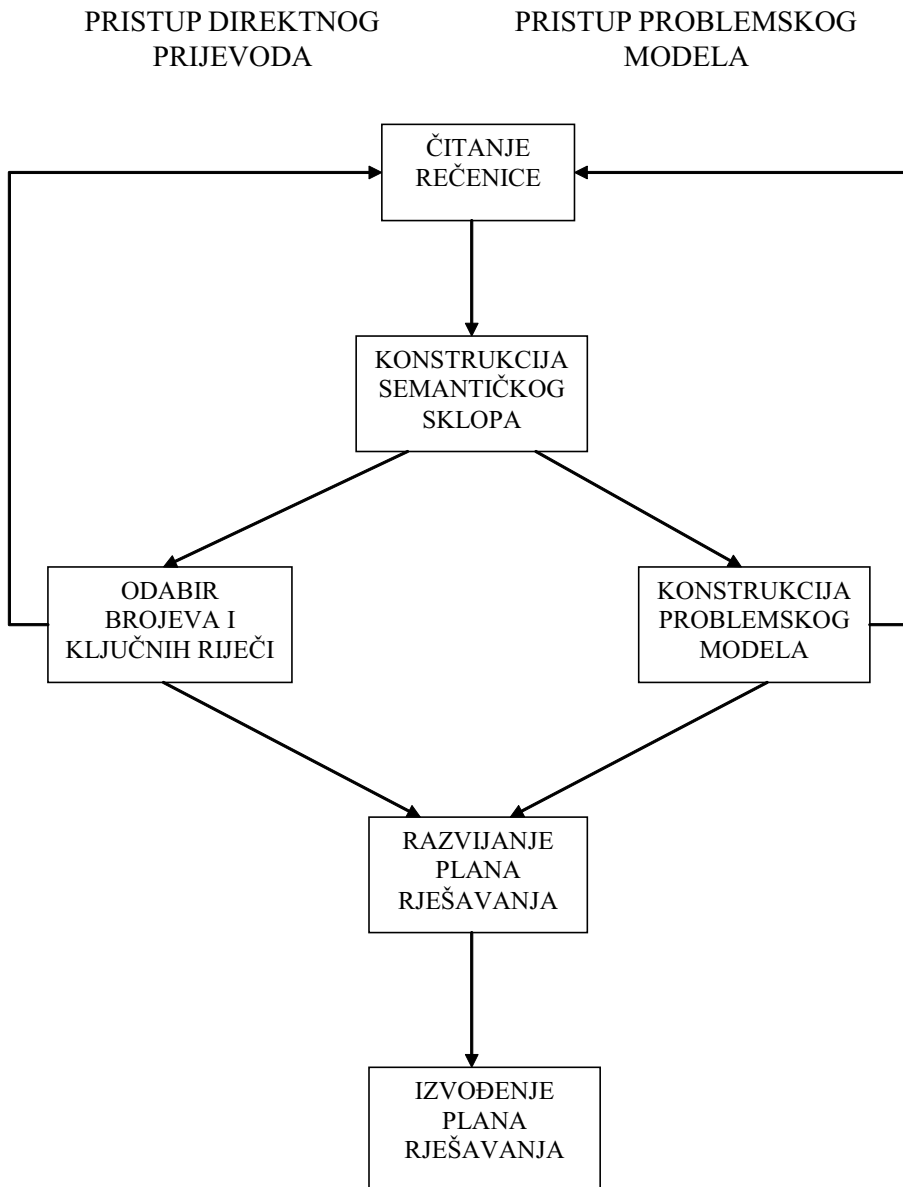
### 2. „*Meaningful*“ pristup (*smisleniji pristup*)

Taj pristup autori predočavaju preko problemskog modela. On se sastoji u tome da učenik koji rješava zadatak prevodi podatke u mentalni model prema situaciji opisanoj u zadatku. Taj se model razlikuje od tekstualne osnove i on postaje osnova na kojoj se temelji plan rješavanja.

U početku učenik koji rješava zadatak čita tekst zadatka i predočava si vlastite iskaze – podatke koji izražavaju veličinu određene varijable, kvantitativne odnose između tih varijabli i pitanje koje izražava nepoznatu veličinu određene varijable.

Učenici moraju uključiti nove informacije iz zadatka u postojeću tekstualnu bazu. Dakle, primarna je zadaća učenika koji rješava problemski zadatak da si prevede neku izjavu u unutrašnju problemsku predodžbu i da u nju uključi podatke iz problema kako bi se konstruirala semantička pozadina predodžbe.

Nakon toga učenici konstruiraju specifične matematičke predodžbe pa dolazi do razlike između učenika koji rješavaju direktnim tumačenjem i onih koji se koriste problemskim modelom. Autori smatraju da osobe koje



**Slika 1.** Model procesa razumijevanja aritmetičkih zadataka (prema Hegarty, Mayer i Monk, 1995).

rješavaju direktnim tumačenjem zanemaruju sve informacije iz zadatka osim brojeva i ključnih riječi, te na taj način koriste manje podataka nego što se u zadatku nalazi. Za razliku od njih, učenici koji rješavaju problemskim modelom pokušavaju konstruirati svoj problemski model na toj razini razumijevan-

ja. Oni nisu isključivo vezani uz polazne podatke, nego temelje predodžbu na svrhovitosti i smislenosti.

Nakon predočavanja informacija za koje učenik smatra da vode do točnog rješenja problema potrebno je napraviti plan za aritmetičko rješavanje. Osoba koja rješava problemskim modelom ima bogatiju predodžbu od baze. Čini se da pojedinci koji su uspješni u rješavanju problemskih zadataka mogu zadržati taj problemski model u radnoj memoriji kako bi mogli nadgledati proces rješavanja.

Npr.

*Cijena lopte je 57 kuna.*

*To je 2 kune manje od cijene lutke.*

*Ako trebaš kupiti 3 lutke, koliko ćeš platiti?*

Učenici koji uspješno dolaze do rješenja izračunavaju zbroj brojeva 57 i 2, te zatim taj zbroj množe brojem 3 kako bi izračunali iznos koji treba platiti za tri lutke (ili broj 59 zbrajaju tri puta).

Učenici koji rješavaju direktnim pristupom pozornost usmjeravaju na brojeve u zadatku i ključne riječi. U ovom primjeru to je riječ manje. Zato oni izračunavaju razliku brojeva 57 i 2, što u konačnici vodi netočnom rješenju.

Autori smatraju da učenici koji su uspješniji u rješavanju problemskih matematičkih zadataka više pažnje posvećuju ostalim riječima u problemu, jer im te riječi trebaju za konstrukciju problemskog modela. Ti su učenici osjetljiviji na bît, a manje osjetljivi na doslovne riječi u zadatku. Uočeno je i da uspješniji učenici točnije pamte pravilne odnose između varijabli, ali neuspješni učenici bolje zapamte doslovne riječi.

Eksperimentom su autori pokazali da i uspješni i neuspješni učenici imaju tendenciju upotrebe kvalitativno različitih procesa rješavanja tekstualnih zadataka. Bilo bi ipak nekorektno zaključiti da svi neuspješni rabe istu strategiju, a tako ni svi uspješni. Strategija kojom se koriste najvjerojatnije ovisi o individualnim, ali i situacijskim čimbenicima. Učitelji moraju biti svjesni postojanja različitih strategija rješavanja kako bi mogli kvalitetno realizirati predviđene ciljeve početne nastave matematike.



## LITERATURA

- Benbow, C. P., Stanley, J. C. (1980), *Sex differences in mathematical ability: fact or artifact?* Science, Vol 210, pp 1262-1264.
- Benbow, C. P., Stanley, J. C. (1983), *Sex differences in mathematical reasoning ability: more facts*, Science, Vol 222, pp 1029-1031.
- De Corte, E., Verschaffel, L. i De Win, L. (1985), *Influence of rewarding verbal problems on children's problem representations and solutions*. Journal of Educational Psychology, Vol 77, n4, pp 460-470.
- Delgado, A. R., Prieto, G. (2004), *Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics*, Intelligence, Vol 32, pp 25-32.
- Duffy, J., Gunther, G., Walters, L. (1997), *Gender and mathematical problem solving*, Sex Roles, Vol 37, pp 477-494.
- Fannema, E. (2000), *Gender and mathematics: What is known and what do I wish was known?* Prepared for the Fifth Annual Forum of the National Institute for Science Education, Detroit, Michigan.
- Geary, D. C. (2006), *Development of Mathematical Understanding*, Cognition, perception and language, Vol 2, pp 777-810.
- Geary, D. C. (1996), *Sexual selection and sex differences in mathematical abilities*, Behavioral and Brain Sciences, Vol 19, pp 229-284.
- Geary, D. C., Saults, S. J., Liu, F., Hoard, M. K. (2000), *Sex differences in spatial cognition, computational fluency, and arithmetical reasoning*, Journal of Experimental Child Psychology, Vol 77, pp 337-353.
- Guberman, S. R. (1999), *Cultural aspects of young children's mathematics knowledge*, In J. V. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp 30-36), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., Monk, C. A. (1995), *Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers*, Journal of Educational Psychology, Vol 87, n1, pp 18-32.
- Hyde, J. S., Fannema, E., Lamon, S. J. (1990), *Gender differences in mathematics performance: meta-analysis*, Psychological Bulletin, Vol 107, pp 139-155.
- Kimura, D. (1992), *Sex differences in the brain*, Scientific American, Vol 267, pp119-125.
- Klasnić, I. (2008), *Utjecaj konteksta na rješavanje problemskih zadataka u početnoj nastavi matematike*, Magistarski rad, Filozofski fakultet u Zagrebu, Odsjek za pedagogiju.
- Kuhlmeier, V., Bloom, P. i Wynn, K. (2004), *Do 5-month-old infants see humans as material objects?* Cognition, Vol 94, pp 95-103.
- Lipton, J., Spelke, E. (2003), *Large-Number Discrimination in Human Infant*, Psychological Science, Vol 14, pp 396-400.
- Mc Crink, K., Wynn, K. (2004), *Large-Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old Infants*, Psychological Science, Vol 15, pp 776-781.

- Meyer, H. (2002), *Didaktika razredne kvake*, Zagreb: Educa.
- Morales, R.V., Shute, V.J., Pellegrino J. W. (1985), *Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems*, *Cognition and Instruction*, Vol 2, pp 41-57.
- Riley, M.S., Greeno, J. G. (1988), *Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems*, *Cognition and Instruction*, Vol 5, pp 49-101.
- Riley, M.S., Greeno, J.G. i Heller, J. J. (1983), *Development of children's problem solving ability*,. In H.P.Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*, (pp 153-196), New York: Academic Press.
- Vlahović-Štetić, V. (1999), *Word-problem solving as a function of problem type, situational context and drawing*, *Studia Psychologica*, Vol 41, pp 49-61.
- Vlahović-Štetić, V. (1996), *Problemski matematički zadaci i uspješnost njihova rješavanja u početku školovanja*, Doktorska dizertacija, Zagreb: Filozofski fakultet, Odsjek za psihologiju.
- Vlahović-Štetić, V., Rovani, D., Mendek, Ž. (2004), *The role of student's age, problem type and situational context in solving mathematical word problems*, *Review of Psychology*, Vol 11, n1-2, pp 25-33.
- Wynn, K., Bloom, P. i Chiang, W.-C. (2002), *Enumeration of collective entities by 5-month-old infants*, *Cognition*, Vol 83, pp55-62.

## STRATEGIES OF SOLVING PROBLEM TASKS AT THE STARTING PHASE OF TEACHING MATHEMATICS

Irena Klasnić

***Abstract** – Problem tasks are the consistent part of the mathematics and the pupils deal with it almost on a daily basis. These tasks should be able to make links between the subject of mathematics along with their understanding of their surroundings, so the pupils should, relying on their own experience, be able to find the solution much easier. However, the problem tasks given to pupils at the starting phase of teaching mathematics usually do not have this desired effect and children often find them difficult and incomprehensible so they often experience a lack of success in solving these tasks.*

*The paper examines the development of idea about the elementary mathematical tasks from the infant age as well as the empirical comprised researches. There are different types of mathematical tasks applied such as: the tasks of change, combination and comparison that pupils consider to be the most difficult tasks.*

*The researches resulting in influence on age and gender in solving mathematical problems are specially presented. The approach of solving problems „shortcut,, and „meaningful,, are clarified and the tendency of using different strategies with successful and unsuccessful pupils has been applied.*

***Key words:** Short-cut approach, mathematical word problems, meaningful approach.*