IZVORNI ZNANSTVENI RAD
UDK 338.3.01:330.13

Doc. dr. sc. Ilko Vrankić
Mr. sc. Mira Oraić

SUPSTITUCIJA FAKTORA U PROIZVODNJI I EKONOMSKE UŠTEDE

SUBSTITUTION OF FACTORS AND ECONOMIC SAVINGS

SAŽETAK: Krajnosti u koje se može pretvoriti tehnologija s konstantnom elastičnošću supstitucije određuju raspon ekonomskih ušteda zbog zamjene skupljeg faktora u proizvodnji jeftinijim. Vidljiv prikaz ušteda omogućuju dualni limesi nastali kao plod opisa tehnologije različitim skupovima varijabli. Geometriju i osebujne ekonomske interpretacije nadopunjava općeniti dokaz da je elastičnost supstitucije prikladna mjera ušteda u proizvodnom procesu.

KLJUČNE RIJEČI: elastičnost supstitucije, savršeni supstituti, savršeni komplementi, ekonomski troškovi, ekonomske uštede.

ABSTRACT: The extreme cases of technology with constant elasticity of substitution determine the range of economic cost savings because of substitution of the more expensive factors of production with cheaper ones. Dual limits, which are the result of alternative description of technology, provide observable representation of savings. The general proof of the claim that the elasticity of substitution is appropriate measure of savings in production process is supplemented by geometry and rich economic interpretations.

KEY WORDS: elasticity of substitution, perfect substitutes, perfect complements, economic costs, economics savings.

1. UVOD

Središnje mjesto u neoklasičnoj teoriji raspodjele ekonomskih troškova zauzima elastičnost supstitucije. U primjenama je omiljena Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje koju krasi jedinična elastičnost supstitucije i jednaka raspodjela minimalnih ukupnih ekonomskih troškova na ekonomske troškove rada i ekonomske troškove uzimanja kapitala u zakup. Promjene udjela troškova faktora proizvodnje u ukupnim troškovima vode nas prema općenitijim oblicima funkcije proizvodnje. Radi jednostavnosti izdvajamo funkciju proizvodnje s konstantnom elastičnošću supstitucije. Parametar supstitucije koji se u njoj pojavljuje, vodi nas od savršeno supstitutabilnih do savršeno komplementarnih faktora proizvodnje. Preobražaj funkcije proizvodnje prati preobražaj funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Rezultati dualnih limesa u kojima faktori proizvodnje ustupaju mjesto cijenama na jedinicu potrošnosti, omogućuju izvorni opis supstitutabilnosti i komplementarnosti cijena faktora proizvodnje. O komplementarnosti cijena ili supstitutabilnosti faktora ovisi efikasnost proizvođača koji štedi tako da skuplji faktor proizvodnje zamjenjuje jeftinijim. Za funkciju proizvodnje s konstantnom elastičnošću supstitucije veličina ušteda ovisi o parametru supstitucije kojeg s pravom nazivamo parametrom ušteda. Veličinu ušteda zorno prikazuje okomita udaljenost krivulja troškova aktivnog i pasivnog potrošača. Uštede tehnološki različitih proizvođača uspoređujemo na osnovi konkavnosti razlike troškova i potvrđujemo intuiciju da su veće uštede onog proizvođača čija je elastičnost supstitucije veća. Taj proizvođač u većoj mjeri supstituira skuplji faktor proizvodnje jeftinijim. Originalan i općenit dokaz ovih tvrdnji oslanja se na domišljato povezivanje minimalnih ukupnih ekonomskih troškova i elastičnosti supstitucije.

2. PREOBRAŽAJ PROIZVODNJE I TROŠKOVA

Tehnologiju možemo opisati funkcijom proizvodnje i funkcijom minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. U izvođenju funkcije troškova s izokvante koju čine tehnološki efikasne kombinacije utrošaka rada i kapitala izdvajamo ekonomski efikasnu kombinaciju. Promjene na savršeno konkurentnim tržištima faktora proizvodnje navode aktivnog proizvođača da skuplje faktore proizvodnje zamjenjuje jeftinijima. Lakoću supstitucije mjeri elastičnost supstitucije, elastičnost kapitalne opremljenosti rada, $k \quad \frac{K}{L}$, s obzirom na graničnu stopu tehničke supstitucije, $s \quad \frac{f_L}{f_K}$.

U primjenama je omiljena Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje,

$$y \quad f(L,K) \quad L \quad K^{(1 \quad)},$$

u kojoj se pojavljuju parametar efikasnost, $\quad 0$, parametar distribucije, $0 \quad\quad 1$ i parametar prinosa, $\quad 0$. Ekonomsku efikasnost krasi jednakost između granične stope tehničke supstitucije i odnosa cijena faktora proizvodnje iz koje izvodimo jednadžbu krivulje ekspanzije proizvodnje,

$$s \quad \frac{}{1}\frac{K}{L} \quad \frac{w}{r},$$

$$K \quad \frac{1}{}\frac{w}{r}L\,.$$

Na osnovi presjeka krivulje ekspanzije proizvodnje i odgovarajuće izokvante izvodimo funkciju uvjetne potražnje za radom, funkciju uvjetne potražnje za kapitalom i funkciju minimalnih ukupnih ekonomskih troškova,

$$\frac{1}{}\frac{w}{r}^{(1 \quad)} \quad L \quad y,$$

$$L(w,r,y) \quad \frac{}{1}\frac{r}{w}^{1} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}},$$

$$L(w,r,y) \quad \frac{}{w}\frac{w}{} \quad \frac{r}{1}^{1} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}},$$

$$K(w,r,y) \quad \frac{1}{r}\frac{w}{} \quad \frac{r}{1}^{1} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}},$$

$$c(w,r,y) \quad wL(w,r,y) \quad rK(w,r,y),$$

$$c(w,r,y) \quad \frac{w}{} \quad \frac{r}{1}^{1} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}}.$$

Granična stopa tehničke supstitucije Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje proporcionalna je kapitalnoj opremljenosti rada i elastičnost je supstitucije jednaka jedan. Prirodno je potražiti općenitiji oblik funkcije proizvodnje koji sadrži parametar supstitucije i dopušta da elastičnost supstitucije poprimi i druge vrijednosti. Među funkcijama proizvodnje s ovim obilježjem izdvaja se funkcija proizvodnje s konstantnom elastičnošću supstitucije,

$$y \quad f(L,K) \quad L \quad (1 \quad)K \quad ^{\frac{}{}}, \quad 0 \quad 1.$$

Granična stopa tehničke supstitucije više nije proporcionalna kapitalnoj opremljenosti rada,

$$s \quad \frac{}{1}\frac{L^{1}}{K^{1}} \quad \frac{}{1}\frac{K}{L}^{1} \quad \frac{}{1}k^{1},$$

elastičnost supstitucije ovisi o parametru supstitucije, ρ, i može poprimiti razne vrijednosti,

$$\ln s \quad \ln\frac{}{1} \quad (1 \quad)\ln k,$$

$$d\ln s \quad (1 \quad) d\ln k,$$

$$\frac{d\ln k}{d\ln s} \quad \frac{1}{1}.$$

Iščezava li vrijednost parametra supstitucije, elastičnost supstitucije postaje jedinična i CES funkcija proizvodnje poprima Cobb-Douglasov oblik. U računanju se oslanjamo na L´Hospitalovo pravilo i komutaciju limesa i neprekidne funkcije,

$$\ln y \quad \ln \quad -\ln \quad L \quad (1 \quad)K \quad ,$$

$$\lim_{0} \ln y \quad \ln \quad \lim_{0} \frac{L \quad \ln L \quad (1 \quad)K \quad \ln K}{L \quad (1 \quad)K},$$

$$\lim_{0} \ln y \quad \ln \quad \ln L \quad (1 \quad)\ln K \; ,$$

$$\lim_{0} y \quad L \quad K^{(1 \quad)} \; .$$

Elastičnost supstitucije i parametar supstitucije povezuju sljedeće jednakosti:

$$1 \quad , \qquad 1, \quad \frac{1}{\quad} \quad , \qquad 1 \; \frac{1}{\quad} \; \frac{1}{1}.$$

Na osnovi prethodnih jednakosti i krivulje ekspanzije proizvodnje općenitijeg oblika,

$$K \quad \frac{1}{\quad} \; \frac{w}{r} \quad L,$$

za tehnologiju s konstantnom elastičnošću supstitucije izvodimo funkciju uvjetne potražnje za radom, funkciju uvjetne potražnje za kapitalom i funkciju minimalnih ukupnih ekonomskih troškova,

$$^{1} \quad w \quad ^{1}w^{1} \quad L \quad (1 \quad) \quad ^{1} \quad w \quad ^{1}r^{1} \quad L^{-} \quad y,$$

$$w \quad L \quad w^{1} \quad (1 \quad) \; r^{1} \quad ^{-} \quad y,$$

$$L \quad w \quad w^{1} \quad (1 \quad) \; r^{1} \quad ^{-}\frac{y}{\quad},$$

$$L(w,r,y) \quad w \quad w^{1} \quad (1 \quad) \; r^{1} \quad ^{\frac{1}{\quad}} \; \frac{y}{\quad}^{\frac{1}{\quad}},$$

$$L(w,r,y) \quad \frac{\quad}{w} \; \frac{w}{\quad}^{1} \quad \frac{w}{\quad}^{1} \quad (1 \quad) \; \frac{r}{1}^{1} \quad ^{\frac{1}{\quad}} \; \frac{y}{\quad}^{\frac{1}{\quad}},$$

$$K(w,r,y) \quad \frac{1}{r} \; \frac{r}{1}^{\;1} \quad \frac{w}{}^{\;1} \quad (1 \quad) \frac{r}{1}^{\;1} \quad ^{\frac{1}{}} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;,$$

$$c(w,r,y) \quad \frac{w}{}^{\;1} \quad (1 \quad) \frac{r}{1}^{\;1} \quad ^{\frac{1}{1}} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;.$$

Kada iščezava parametar supstitucije i elastičnost supstitucije biva jedinična, prirodno je očekivati da, poput funkcije proizvodnje, CES funkcija troškova poprima oblik Cobb-Douglasove funkcije troškova. Valja zamijetiti sličnost funkcionalnih oblika proizvodnje i troškova i u sličnom računu ponovno se osloniti na L´Hospitalovo pravilo i komutaciju limesa i neprekidne funkcije,

$$\ln c \quad \frac{1}{1} \ln \quad \frac{w}{}^{\;1} \quad (1 \quad) \frac{r}{1}^{\;1} \quad \ln \; \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;,$$

$$\lim_{1} \ln c \quad \lim_{1} \frac{\frac{w}{}^{\;1} \quad \ln \frac{w}{} \quad (1 \quad) \frac{r}{1}^{\;1} \quad \ln \frac{r}{1}}{\frac{w}{}^{\;1} \quad (1 \quad) \frac{r}{1}^{\;1}} \quad \ln \; \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;,$$

$$\lim_{1} \ln c \quad \ln \frac{w}{} \quad (1 \quad) \ln \frac{r}{1} \quad \ln \; \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;,$$

$$\lim_{1} c \quad \frac{w}{} \quad \frac{r}{1}^{\;1} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \;.$$

Pritom funkcije uvjetne potražnje za radom i kapitalom doživljavaju isti preobražaj. Općenito, za zadanu elastičnost supstitucije i cijene faktora proizvodnje, na osnovi parametara distribucije ili parametara potrošnosti određujemo ekonomske troškove rada na jedinicu troškova kapitala,

$$\frac{wL}{rK} \quad \frac{}{1} \quad \frac{w}{r}^{\;1} \;.$$

Prema tome, za jediničnu elastičnost supstitucije parametri potrošnosti faktora proizvodnje pokazuju kako se ukupni ekonomski troškovi raspodjeljuju na troškove rada i troškove uzimanja kapitala u zakup,

$$\frac{wL}{rK} \quad \frac{}{1} \;,$$

$$wL \quad c,$$

$$rK \quad (1 \quad) c \;.$$

Nadnica na jedinicu potrošnosti rada, $\frac{w}{}$, i cijena uzimanja kapitala u zakup na jedinicu potrošnosti kapitala, $\frac{r}{1}$, omogućuju da za jediničnu elastičnost supstitucije lagodno odredimo uvjetne potražnje za faktorima proizvodnje na osnovi minimalnih ukupnih ekonomskih troškova,

$$L \quad \frac{c}{\frac{w}{}} \quad \text{i} \quad K \quad \frac{c}{\frac{r}{1}} .$$

Zamijenimo li utrošak rada s nadnicom na jedinicu potrošnosti rada i utrošak kapitala s cijenom uzimanja kapitala u zakup na jedinicu potrošnosti kapitala, jasno se ukazuje dulanost u preobražaju maksimalne proizvodnje i minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Pritom parametar supstitucije iščezava i Cobb-Douglasova tehnologija granični je slučaj CES tehnologije. Parametar supstitucije ima još dvije granične vrijednosti. Kada parametar supstitucije teži jedinici, elastičnost supstitucije poprima neizmjerno veliku vrijednost,

$$\lim_{1} \quad ,$$

i CES funkcija proizvodnje postaje funkcija proizvodnje sa savršeno supstitutabilnim faktorima proizvodnje,

$$\lim_{1} y \quad L \quad (1 \quad)K \quad .$$

Druga je krajnost konvergencija parametra supstitucije prema negativnoj beskonačnosti. Elastičnost supstitucije je tada nula,

$$\lim \quad 0,$$

i faktori proizvodnje, među kojima nema supstitucije, koriste se u fiksnim proporcijama. Funkcija proizvodnje poprima oblik funkcije proizvodnje Leontiefa,

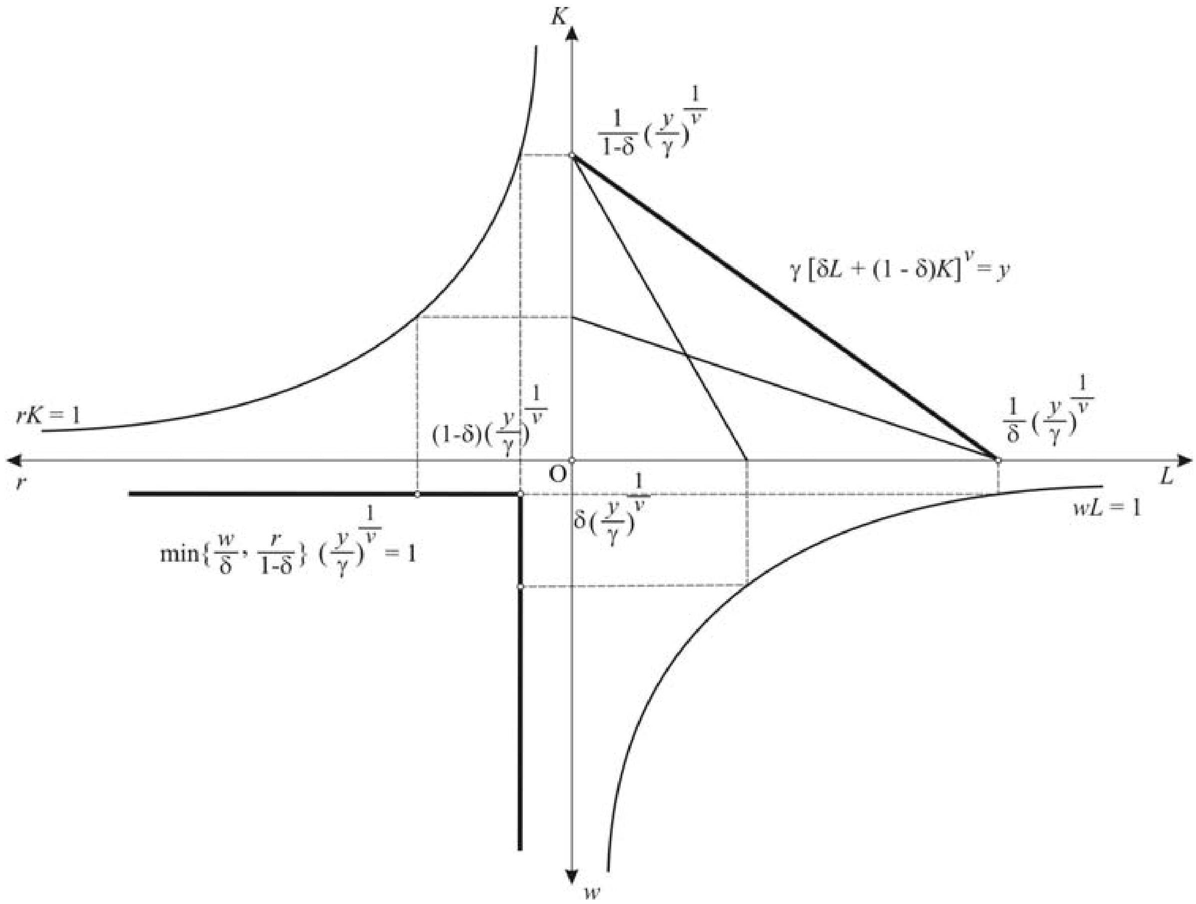
$$y \quad L \quad (1 \quad) \frac{K}{L} \quad K \quad \frac{L}{K} \quad (1 \quad) \quad ,$$

$$y \quad L \quad (1 \quad) \frac{K}{L} \quad K \quad \frac{L}{K} \quad (1 \quad) \quad ,$$

$$\lim \quad y \quad \begin{matrix} L \ , L \quad K \\ K \ , L \quad K \end{matrix} ,$$

$$\lim \quad y \quad \min \quad L, K \quad .$$

Slika 1. Savršeno supstitutabilni faktori proizvodnje i savršeno komplementarne cijene

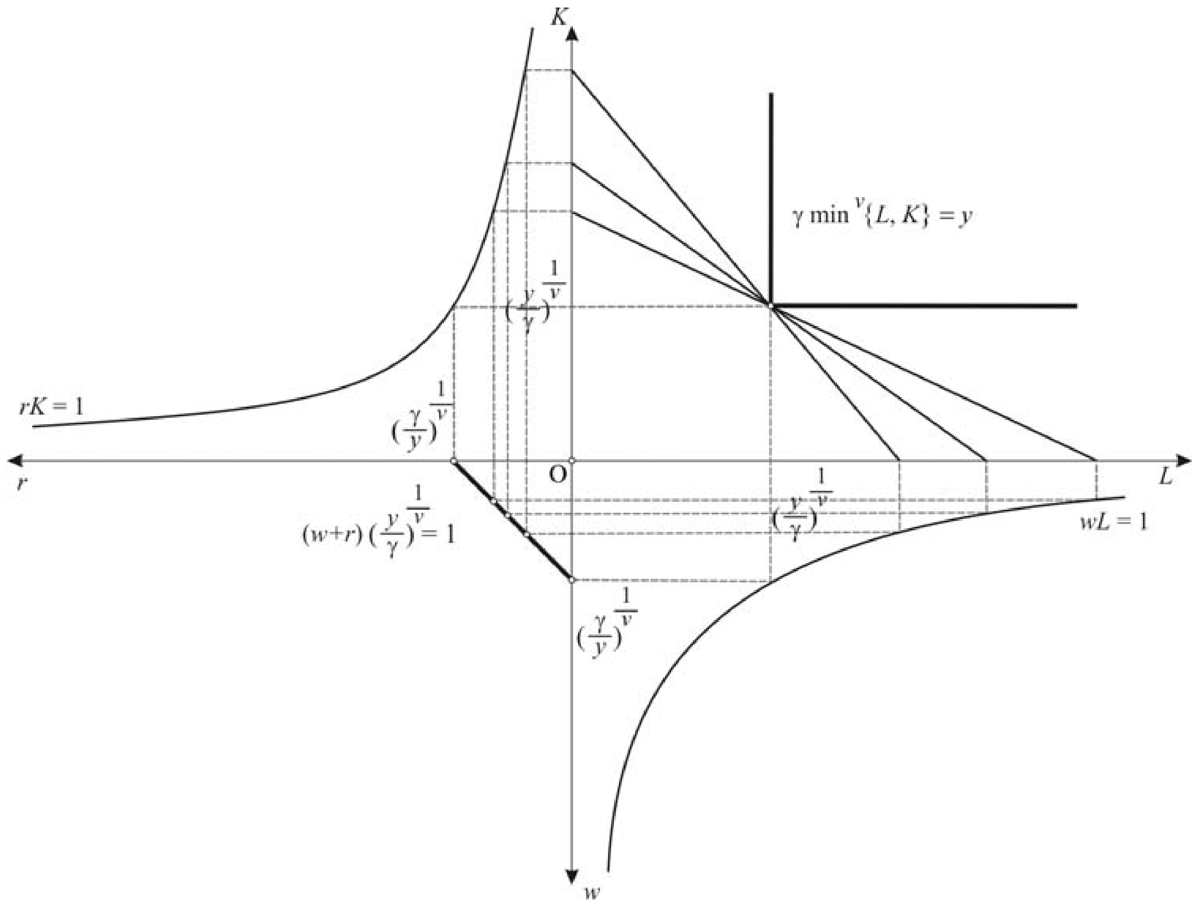


Pođimo od cijena čiji je odnos jednak konstantnoj stopi tehničke supstitucije. Povećanje cijene jednog faktora proizvodnje nema utjecaja na minimalne ukupne ekonomske troškove. Relativno skuplji faktor proizvodnje u potpunosti se zamjenjuje relativno jeftinijim faktorom. Faktori su proizvodnje savršeno supstitutabilni, a cijene savršeno komplementarne.

Za funkciju proizvodnje sa savršeno supstitutabilnim faktorima preslikajmo ravnu izokvantu iz prostora faktora u izokostu u prostoru normaliziranih cijena. Ukazuje se pravokutni oblik krivulje koja sadrži sve kombinacije cijena pri jediničnim troškovima i otkriva funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova oblika Leontiefa,

$$c(w,r,y) \quad \min \quad \frac{w}{\ }, \frac{r}{1} \quad \frac{y}{\ }^{\frac{1}{\ }} .$$

Slika 2. Savršeno komplementarni faktori proizvodnje i savršeno supstitutabilne cijene



Pođimo od bilo kojih cijena faktora proizvodnje. Povećanje cijene jednog faktora kompenzira jednako smanjenje cijene drugog faktora. Takve promjene cijena nemaju utjecaja na minimalne ukupne ekonomske troškove i nema supstitucije faktora. Faktori su proizvodnje savršeno komplementarni, a cijene savršeno supstitutabilne.

Obrnuto, za funkciju proizvodnje oblika Leontiefa sa savršeno komplementarnim faktorima preslikajmo pravokutnu izokvantu iz prostora faktora u izokostu u prostoru normaliziranih cijena. Ukazuje se ravna krivulja koja sadrži sve kombinacije cijena pri jediničnim troškovima i otkriva funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova oblika funkcije proizvodnje sa savršeno supstitutabilnim faktorima,

$$c(w,r,y)\quad (w\quad r)\ \frac{y}{\ }^{\frac{1}{\ }}\ .$$

Ove se funkcije troškova pojavljuju kao rezultati dualnih limesa. Kada se elastičnost supstitucije povećava iznad svih granica dobivamo funkciju troškova oblika Leontiefa,

$$c \quad \left(\frac{w}{\;}\right)^{1} \quad (1 \quad)\left(\frac{\frac{r}{\;}}{1\quad\frac{w}{\;}}\right)^{1\quad\frac{1}{1\quad}} \quad \left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}} \quad \left(\frac{r}{1\quad}\right)^{1} \quad \left(\frac{\frac{w}{\;}}{\frac{r}{1\quad}}\right)^{1} \quad (1 \quad)^{\frac{1}{1\quad}} \quad \left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}},$$

$$c \quad \frac{w}{\;} \quad (1 \quad)\left(\frac{\frac{r}{\;}}{1\quad\frac{w}{\;}}\right)^{1\quad\frac{1}{1\quad}} \quad \left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}} \quad \frac{r}{1\quad} \quad \left(\frac{\frac{w}{\;}}{\frac{r}{1\quad}}\right)^{1} \quad (1 \quad)^{\frac{1}{1\quad}} \quad \left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}},$$

$$\lim \; c \quad \begin{cases} \frac{w}{\;}\left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}}, & \frac{w}{\;} \quad \frac{r}{1\quad} \\ \frac{r}{1\quad}\left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}}, & \frac{w}{\;} \quad \frac{r}{1\quad} \end{cases},$$

$$\lim \; c \quad \min\left(\frac{w}{\;}, \frac{r}{1\quad}\right)\left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}}.$$

Teži li elastičnost supstitucije nuli, dobivamo funkciju troškova oblika funkcije proizvodnje sa savršeno supstitutabilnim faktorima,

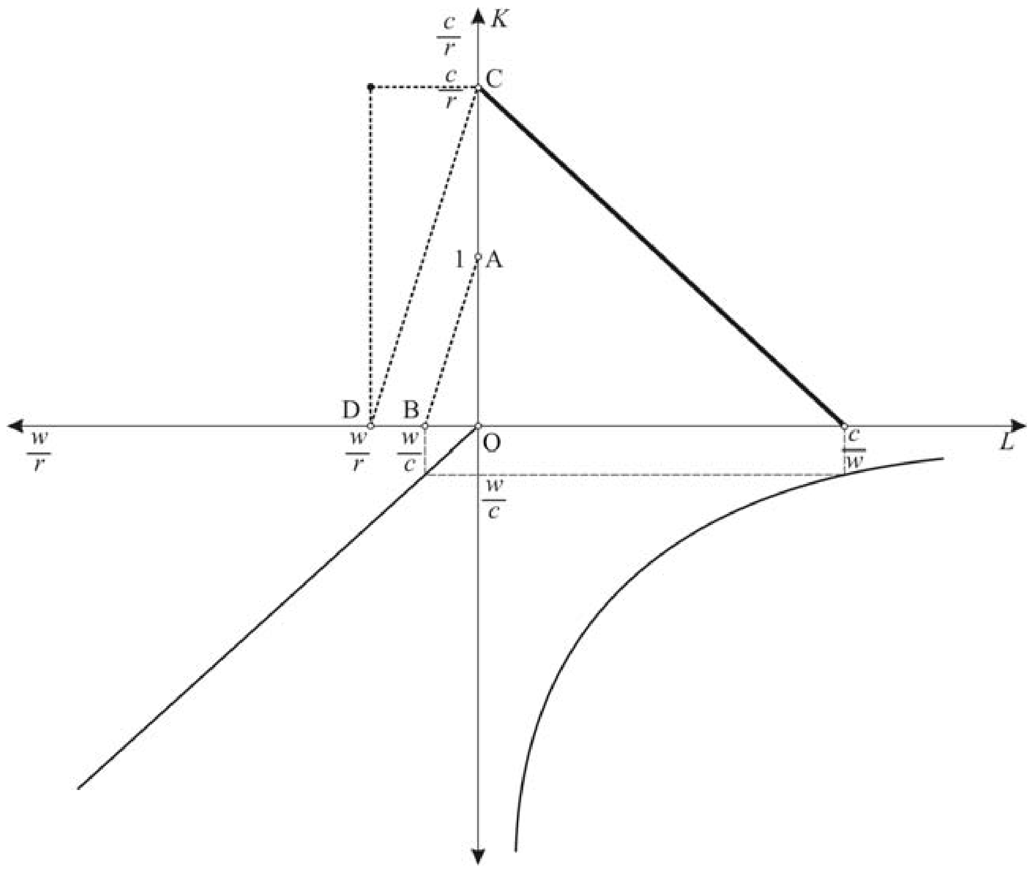
$$\lim_{0} c \quad (w \quad r)\left(\frac{y}{\;}\right)^{\frac{1}{\;}}.$$

Istaknimo da granične oblike funkcija troškova možemo dobiti i na osnovi graničnih oblika funkcija proizvodnje tako da faktori proizvodnje ustupe mjesto cijenama na jedinicu potrošnosti. Pritom preobražaju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje odgovara preobražaj Cobb-Douglasove funkcije troškova, preobražaju funkcije proizvodnje sa savršeno supstitutabilnim faktorima odgovara preobražaj Leontiefove funkcije troškova i preobražaju funkcije proizvodnje sa savršeno komplementarnim faktorima odgovara preobražaj funkcije troškova za tehnologiju sa savršeno supstitutabilnim faktorima.

3. PARAMETAR SUPSTITUCIJE ILI PARAMETER UŠTEDA

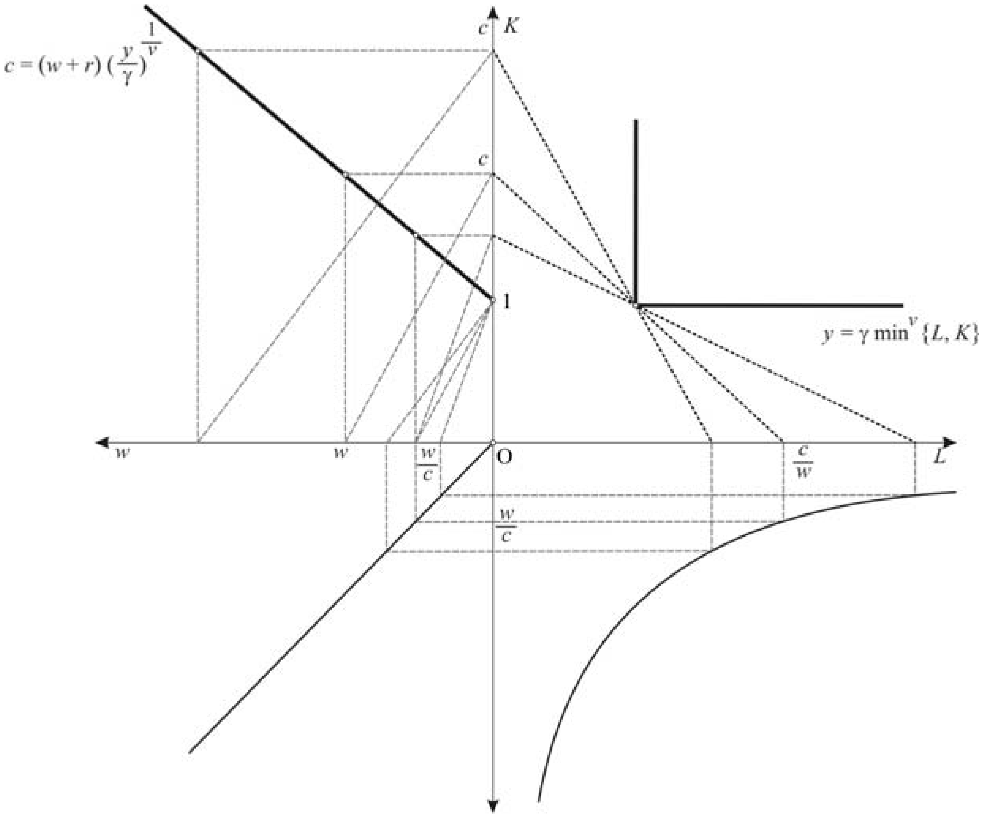
Konkavnost funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova posljedica je međusobne supstitucije faktora u proizvodnji. Da bismo zorno predočili ovu misao, pođimo od budžetske crte u prostoru faktora proizvodnje koju određuju cijene i tehnološki efikasna kombinacija rada i kapitala.

Slika 3. Budžetska crta, nadnica i troškovi

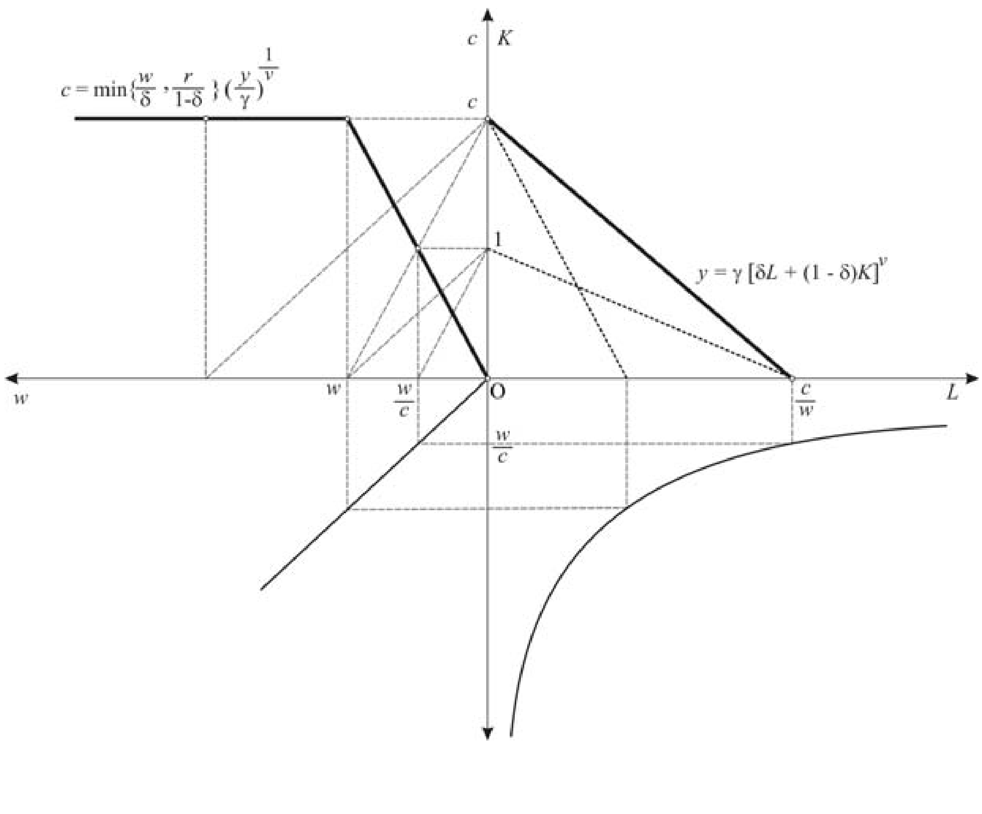


Odsječak budžetske crte na ordinati predočuju troškove izražene u jedinicama kapitala. Pomoću grane hiperbole koja grafički povezuje recipročne vrijednosti, simetrale trećeg kvadranta i sličnosti trokuta ΔOAB i ΔOCD na apscisi u drugom kvadrantu dobivamo nadnicu u jedinicama kapitala. Normiramo li cijenu uzimanja kapitala u zakup, na ovaj način dobivamo grafički prikaz veze između bilo koje nadnice i ukupnih ekonomskih troškova. Zbog ekonomske efikasnosti budžetska crta podupire skup zahtjeva za faktorima proizvodnje. Oblik skupa zahtjeva za faktorima proizvodnje ovisi o tehnologiji koja se zbog zakona opadajuće granične stope tehničke supstitucije nalazi između dviju krajnosti. Jednu od njih krasi savršena komplementarnost faktora proizvodnje između kojih nema supstitucije. Prema tome, nema ni ušteda zbog supstitucije. Drugu krajnost krasi savršena supstitutabilnost faktora proizvodnje i ostvaruju se značajne uštede zbog supstitucije relativno skupljeg faktora proizvodnje relativno jeftinijim. Savršeni komplementi i savršeni supstituti određuju raspon ušteda zbog supstitucije faktora proizvodnje za bilo koju tehnologiju.

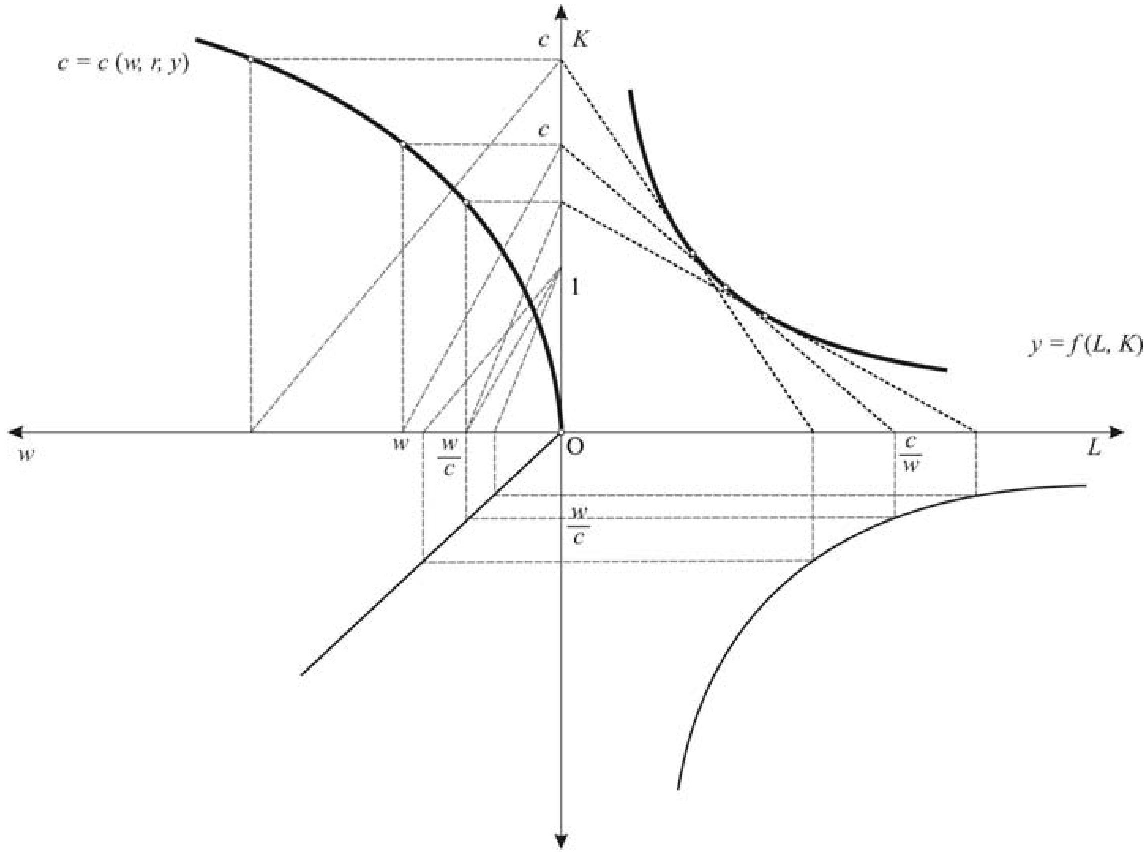
Slika 4. Savršeno komplementarni faktori proizvodnje



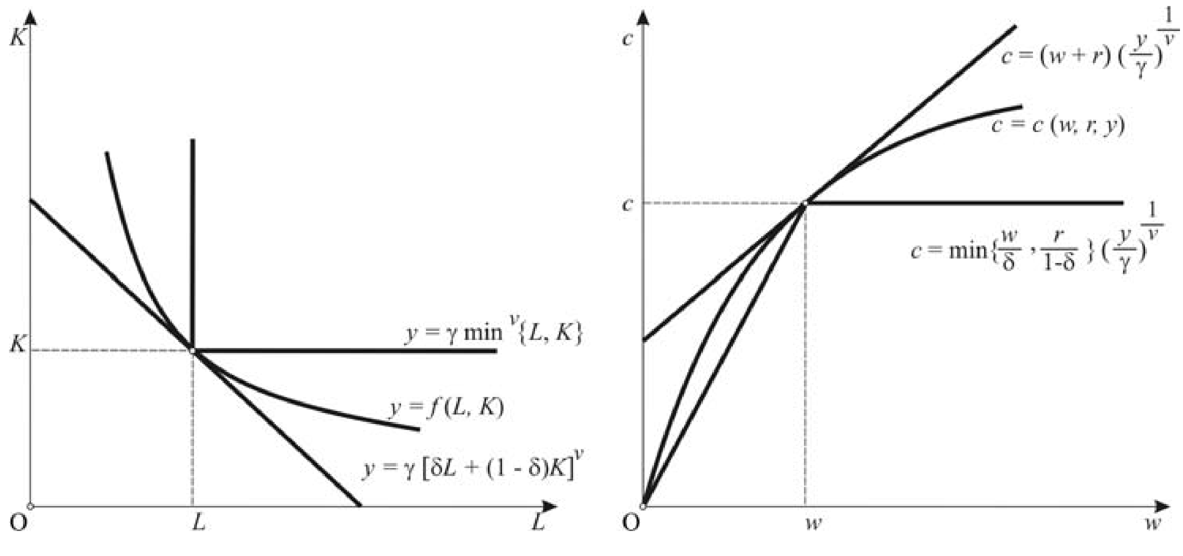
Slika 5. Savršeno supstitutabilni faktori proizvodnje



Slika 6. Striktno konveksna tehnologija

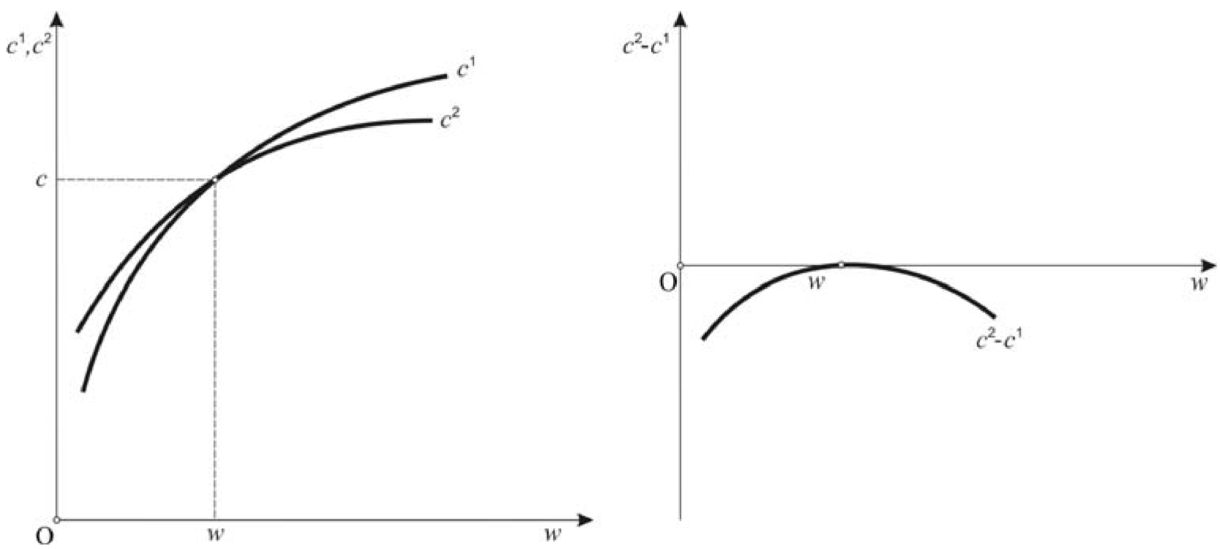


Slika 7. Izokvante i krivulje troškova



Fiksne proporcije faktora proizvodnje značajka su pasivnog proizvođača koji ne reagira na promjene na savršeno konkurentnim tržištima faktora. U proizvodnji upotrebljava istu kombinaciju rada i kapitala, ne ostvaruje ekonomske uštede i kreće se po krivulji troškova Leontiefove funkcije proizvodnje. Ta je krivulja tangenta na krivulju minimalnih ukupnih ekonomskih troškova aktivnog proizvođača koji štedi tako da skuplji faktor u proizvodnji zamjenjuje jeftinijim. Međusobni položaj krivulja troškova aktivnog i pasivnog proizvođača otkriva da je krivulja minimalnih ukupnih ekonomskih troškova konkavnog oblika. Što je konkavnija, veće su uštede zbog supstitucije faktora proizvodnje koje predočuje okomita udaljenost krivulja troškova aktivnog i pasivnog proizvođača. Tehnološki različite aktivne proizvođače koji isprva istu količinu proizvode istom kombinacijom rada i kapitala, krase različite krivulje troškova koje se međusobno dodiruju. Ukoliko je krivulja troškova drugog proizvođača ispod krivulje troškova prvog proizvođača, drugi proizvođač ostvaruje veće uštede zbog supstitucije skupljeg faktora proizvodnje jeftinijim. O veličini ušteda odlučujemo na osnovi konkavnosti razlike troškova.

Slika 8. Veličina ušteda i konkavnost razlike troškova



Prema Shepardovoj lemi polazeći od funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova znatno jednostavnije izvodimo funkcije uvjetne potražnje za faktorima proizvodnje:

$$L(w,r,y) \quad c_w(w,r,y),$$

$$K(w,r,y) \quad c_r(w,r,y).$$

Istaknimo da različiti uvjeti regularnosti na koje se pritom oslanjamo ovise o potrebama empirijskih istraživanja. Za tehnologiju s konstantnom elastičnošću supstitucije možemo povezati minimalne ukupne ekonomske troškove i uvjetnu potražnju za radom:

$$L \qquad \frac{c}{w} \quad \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \quad .$$

Uzimajući u obzir Shepardovu lemu i raspodjelu ukupnih ekonomskih troškova na ekonomske troškove rada i ekonomske troškove uzimanja kapitala u zakup slijedi:

$$c_{ww} \quad L_w \qquad \frac{y}{}^{\frac{1}{}} \qquad \frac{c}{w} \quad ^{1}\frac{c_w w \quad c}{w^2}$$

$$c_{ww} \quad L \quad \frac{w}{c}\frac{wL \quad c}{w^2}$$

$$c_{ww} \qquad \frac{r}{w}\frac{LK}{c}$$

$$c_{ww} \qquad \frac{r}{w}\frac{c_w c_r}{c} \quad .$$

Pretpostavimo li da je elastičnost supstitucije drugog proizvođača veća od elastičnosti supstitucije prvog proizvođača,

$$^{2} \quad ^{1},$$

veza između vlastite parcijalne derivacije drugog reda funkcije troškova i elastičnosti supstitucije otkriva da je u maloj okolini razlika $c^2 \quad c^1$ striktno konkavna funkcija,

$$c^2_{ww} \quad c^1_{ww},$$

$$c^2_{ww} \quad c^1_{ww} \quad 0.$$

Ovaj nalaz potvrđuje intuiciju da su veće uštede onog proizvođača čija je elastičnost supstitucije veća. Taj proizvođač u većoj mjeri supstituira skuplji faktor proizvodnje jeftinijim. Veličina ušteda ovisi o parametru supstitucije kojeg s pravom nazivamo parametrom ušteda.

4. EFIKASNOST U ŠTEDNJI

Za tehnologiju s konstantnim prinosima s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka, prosječnu produktivnost rada možemo izraziti pomoću kapitalne opremljenosti rada:

$$f(\ L, \ K) \quad f(L,K), \qquad \frac{1}{L},$$

$$\frac{f(L,K)}{L} \quad f(1,k) \quad g(k), \ k \quad \frac{K}{L}.$$

Isto možemo učiniti i s graničnim proizvodima rada i kapitala:

$$f(L,K) \quad L\,g(k),$$

$$f_L \quad g(k) \quad Lg'(k) \quad \frac{K}{L^2} \quad g(k) \quad kg'(k),$$

$$f_K \quad Lg^{'}(k)\frac{1}{L} \quad g^{'}(k).$$

Na osnovi prethodnih jednakosti dobivamo učinak povećanja kapitalne opremljenosti rada za malu jedinicu na promjene graničnih prinosa:

$$\frac{d}{dk} f_L \quad g^{'}(k) \quad g^{'}(k) \quad kg^{''}(k) \qquad kg^{''}(k),$$

$$\frac{d}{dk} f_K \quad g^{''}(k).$$

Logaritmiramo li kapitalnu opremljenost rada i graničnu stopu tehničke supstitucije, elastičnost supstitucije dobivamo dijeljenjem diferencijala,

$$d\ln k \quad \frac{dk}{k},$$

$$s \quad \frac{f_L}{f_K}, \ln s \quad \ln f_L \quad \ln f_K,$$

$$d\ln s \qquad \frac{kg^{''}(k)}{f_L} \quad \frac{g^{''}(k)}{f_K} \; dk,$$

$$d\ln s \qquad \frac{g^{''}(k)}{L} \; \frac{K}{f_L} \quad \frac{L}{f_K} \qquad \frac{g^{''}(k)}{L}\frac{Lf_L \quad Kf_K}{f_L f_K} dk,$$

$$d\ln s \qquad \frac{yg^{''}(k)dk}{Lf_L f_K},$$

$$\frac{d\ln k}{d\ln s} \qquad \frac{L}{kg^{''}(k)}\frac{f_L f_K}{y}.$$

Mješovita parcijalna derivacija drugog reda funkcije proizvodnje koja opisuje utjecaj povećanja jednog faktora za malu jedinicu na promjenu graničnog prinosa drugog faktora pojednostavljuje prethodni izraz,

$$f_{LK} \quad g^{''}(k) \quad \frac{K}{L^2} \qquad \frac{kg^{''}(k)}{L},$$

$$\frac{f_L f_K}{yf_{LK}}.$$

U računu smo primijenili Eulerov teorem na linearno homogenu funkciju proizvodnje,

$$Lf_L \quad Kf_K \quad f(L,K) \quad y.$$

Pritom su upravo konstantni prinosi, s obzirom na razmjer odigrali ključnu ulogu u pojednostavljenju izraza za elastičnost supstitucije. Željeli bismo jednako jednostavan izraz za elastičnost supstitucije bez obzira na prinose. Prirodno je stoga poći od funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova koje linearna homogenost u cijenama ne ovisi o prinosima s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka:

$$c(\quad w,\quad r,y)\qquad c(w,r,y),\qquad \frac{1}{r},$$

$$\frac{c(w,r,y)}{r}\quad c(s,1,y)\quad h(s),\ s\quad \frac{f_L}{f_K}\quad \frac{w}{r}.$$

O graničnoj stopi tehničke supstitucije ne ovise samo troškovi izraženi u jedinicama kapitala nego i uvjetne potražnje za faktorima proizvodnje:

$$c(w,r,y)\quad rh(s),$$

$$L\quad c_w\quad rh'(s)\frac{1}{r}\quad h'(s),$$

$$K\quad c_r\quad h(s)\quad rh'(s)\quad \frac{w}{r^2}\quad h(s)\quad sh'(s).$$

Iz prethodnih jednakosti dobivamo kolike su promjene uvjetnih potražnji za faktorima proizvodnje na malu jedinicu povećanja granične stope tehničke supstitucije:

$$\frac{dL}{ds}\quad \frac{d}{ds}c_w\quad h''(s),$$

$$\frac{dK}{ds}\quad \frac{d}{ds}c_r\quad h'(s)\quad h'(s)\quad sh''(s)\qquad sh''(s).$$

Pošto logaritmiramo kapitalnu opremljenost rada i graničnu stopu tehničke supstitucije, dijeljenjem ponovno dobijemo elastičnost supstitucije,

$$k\quad \frac{K}{L}\quad \frac{c_r}{c_w},\ \ln k\quad \ln c_r\quad \ln c_w,$$

$$d\ln k\qquad \frac{sh''(s)}{c_r}\quad \frac{h''(s)}{c_w}\ ds,$$

$$d\ln k\qquad \frac{h''(s)}{r}\ \frac{w}{c_r}\quad \frac{r}{c_w}\ ds\qquad \frac{h''(s)}{r}\frac{wc_w\quad rc_r}{c_w c_r}ds,$$

$$d\ln k\quad \frac{ch''(s)ds}{rc_w c_r},$$

$$d\ln s\quad \frac{ds}{s},$$

$$\frac{d\ln k}{d\ln s}\qquad \frac{sh''(s)}{r}\frac{c}{c_w c_r}.$$

Mješovita parcijalna derivacija drugog reda koja opisuje učinak povećanja cijene jednog faktora za malu jedinicu na promjenu uvjetne potražnj za drugim faktorom, pojednostavljuje prethodni izraz čija je vrijednost invarijantna s obzirom na proporcionalne promjene cijena,

$$c_{wr} \quad h''(s) \quad \frac{w}{r^2} \qquad \frac{sh''(s)}{r},$$

$$\frac{cc_{wr}}{c_w c_r}.$$

Imajući u vidu Shepardovu lemu, primjenom Eulerovog teorema na kojeg smo se u računu ponovno oslonili, raspodjeljujemo zapravo ukupne ekonomske troškove na troškove rada i kapitala,

$$wc_w \quad rc_r \quad wL \quad rK \quad c(w,r,y) \quad c.$$

Eulerov teorem možemo primijeniti i na funkcije uvjetne potražnje za faktorima proizvodnje čiji je stupanj homogenosti nula:

$$wc_{ww} \quad rc_{wr} \quad 0,\ c_{wr} \qquad \frac{w}{r} c_{ww},$$

$$wc_{rw} \quad rc_{rr} \quad 0,\ c_{wr} \qquad \frac{r}{w} c_{rr}.$$

Prema tome, elastičnost supstitucije možemo zapisati u sljedećim oblicima:

$$\frac{w}{r} \frac{cc_{ww}}{c_w c_r},$$

$$\frac{r}{w} \frac{cc_{rr}}{c_w c_r}.$$

Iz prethodnih jednakosti za svaki faktor izražavamo učinak promjene cijene za malu jedinicu na promjenu uvjetne potražnje:

$$L_w \quad c_{ww} \qquad \frac{r}{w} \frac{c_w c_r}{c} \quad ,$$

$$K_r \quad c_{rr} \qquad \frac{w}{r} \frac{c_w c_r}{c} \quad .$$

Poopćenje do kojeg smo došli ne ovisi o prinosima s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka i dopušta istodobnu promjenu cijena obaju faktora. Pritom cijene od kojih polazimo podupiru izbor zadane kombinacije faktora proizvodnje. Proporcionalnom promjenom cijena ne mijenja se njihov odnos ni ekonomski efikasan način proizvodnje, stoga nema ni razlike troškova tehnološki različitih proizvođača čija je prvotna proizvodna tehnika ista. Ne čudi stoga da je determinanta singularne Hesseove matrice funkcije, koja opisuje razliku troškova, nula. Napomenimo da singularnost Hesseove matrice linearno homogene razlike troškova slijedi primjenama Eulerovog teorema na parcijalne derivacije prema kojima se u jezgri Hesseove matrice nalazi vektor pozitivnih cijena. O konkavnosti razlike troškova zato zaključujemo na osnovi glavnih minora prvog reda i prethodne dvije jednakosti ponovno potvrđuju intuiciju. Da su zaista veće uštede onog proizvođača čija je elastičnost supstitucije veća, mogli smo se uvjeriti i na osnovi međusobnog položaja indirektnih izokvanti tako da funkciju minimalnih ukupnih ekonomskih troškova protumačimo kao funkciju udaljenosti za indirektnu funkciju proizvodnje. Zakrivljenost indirektnih izokvanti na koju ne utječe promjena perspektive, recipročna je zakrivljenosti direktnih izokvanti zbog zamjene mjesta kapitalne opremljenosti rada i granične stope tehničke supstitucije. Pritom se indirektna budžetska crta podudara s indirektnom izokvantom Leontiefove funkcije proizvodnje i efikasnost proizvođača u štednji ovisi o tome koliko su komplementarne cijene faktora proizvodnje.

5. ZAKLJUČAK

Obično se govori da elastičnost supstitucije opisuje lakoću supstitucije faktora u proizvodnji. U ovom smo radu pridali elastičnosti supstitucije novo značenje na osnovi konkavnosti razlike troškova tehnološki različitih proizvođača. Na tom smo putu pošli od funkcije proizvodnje koju krasi konstantna elastičnost supstitucije i nadopunili znanstvenu literaturu dualnim limesima koji opisuju preobražaj funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Veličinu ušteda zorno smo prikazali okomitom udaljenošću krivulja troškova aktivnog i pasivnog proizvođača i parametar supstitucije originalno protumačili kao parametar ušteda. Poopćenje ovih razmatranja prirodno je proizašlo iz mogućnosti da se tehnologija opiše različitim skupovima varijabli. Na ovaj smo način znanstvenu literaturu upotpunili općenitim dokazom da je elastičnost supstitucije prikladna mjera ušteda u proizvodnom procesu zbog supstitucije skupljeg faktora proizvodnje jeftinijim.

LITERATURA

1. Arrow, K. J., Chenery H. B., Minhas, B. S., Solow, R.M., (1961): "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *The Review of Economics and Statistics,* 43: 225-250.
2. Darrough, M. N., Southey, C., (1977): "Duality in consumer theory made simple: The revealing of Roy's identity", *Canadian Journal of Economics*, 10: 307-317.
3. Diewert, W. E., (1980): "Duality approaches to microeconomic theory". U: Arrow, K.J., Intriligator, M. D., *Handbook of mathematical economics*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland, 535-599.
4. McFadden, D., (1978): "Cost, Revenue, and Profit Functions". U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland 2-109.
5. Shepard, R.W., (1970): *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton NJ: Princeton University Press.
6. Weymark, J. A., (1980): "Duality results in demand theory", *European Economic Review*, 14: 377-395.