

Raspodjela naprezanja u drvenim kutnim spojevima

**Dunja MARTINOVIĆ, Izet HORMAN i
Seid HAJDAREVIĆ**

Mašinski fakultet, Univerzitet u Sarajevu
(Mechanical Engineering Faculty, University of
Sarajevo),
Vilsonovo šetalište 9, 71000 Sarajevo
Bosnia and Herzegovina

martinovic@mef.unsa.ba

Keywords

*Corner joint
Displacement
Finite volume method
Numerical analysis
Stress
Wood*

Ključne riječi

*Drvo
Kutni spoj
Metoda konačnih volumena
Naprezanje
Numerička analiza
Pomak*

Received (primljeno): 2007-12-10

Accepted (prihvaćeno): 2008-04-30

Izvornoznanstveni članak

U radu je prikazana numerička analiza stanja i raspodjele naprezanja u drvenim kutnim spojevima. Jednadžbe bilance količine gibanja su diskretizirane konačnim volumenima. Budući da je drvo ortotropan materijal, simuliran je izotropnim materijalom čiji modul elastičnosti i Poissonov omjer su aproksimirani metodom najmanjih kvadrata. Analiziran je spoj sa zazorom i bez njega. Točnost metode je potvrđena usporedbom proračunskih rezultata s eksperimentalnim podacima. Rezultati pokazuju da se ova metoda može koristiti za određivanje deformacija opterećenih spojeva i za identifikaciju mjesta najvećeg opterećenja.

Stress Distribution in Wooden Corner Joints

Original scientific paper

In this paper, computational analysis of the state and distribution of stresses in wooden corner joints is presented. The equations for momentum balance are discretized by the finite volume method. As wood is an orthotropic material, it is simulated by an isotropic material whose elastic modulus and Poisson's ratio are approximated by the least-square method. It is analysed the joint with and without a space. An accuracy of method was verified by comparing numerical results with experimental data. Results show that the method can be used to determine deformations of the loaded joints and identify places with the maximum stress (load).

1. Uvod

Kutni spojevi od drva su sastavni elementi stolica i drugih dijelova namještaja. Poznato je da je drvo anizotropan, odnosno ortotropan materijal kod kojeg su fizikalna svojstva različita u trima međusobno okomitim pravcima, odnosno u trima međusobno okomitim ravninama. Ovo iziskuje znatno složeniju konstitutivnu relaciju, odnosno vezu između naprezanja i deformacija nego što je to slučaj kod izotropnih materijala. Uz ovo i kutni spoj i opterećena konstrukcija, čiji su sastavni dijelovi kutni spojevi geometrijski su složenog oblika. Pri dimenzioniranju takvih konstrukcija potrebno je znati raspodjelu naprezanja i deformacija, odnosno mjesta maksimalnih naprezanja i deformacija. Razvoj numeričkih metoda i računalne tehnike omogućuje numeričku simulaciju naprezanja u takvim konstrukcijama. Zbog

njene složenosti, numeričko rješenje zahtijeva veoma sofisticiran algoritam. Zato se pri rješavanju ovakvih problema, u prvoj fazi rada, svjesno ide na određena pojednostavljenja da bi se proračun uprostio, što se vidi iz dostupne literature [6,7,9,10,11] u kojoj se obrađuje ova materija. U ovim radovima je za proračun deformacija i naprezanja korištena metoda konačnih elemenata. U ovom je radu prvi put izvršena analiza naprezanja i deformacija u drvenim kutnim spojevima korištenjem metode konačnih volumena. Drvo, kao ortotropan materijal simuliran je izotropnim, a ljepeve fuge su zanemarene. Ovo pojednostavljenje problema je učinjeno, jer korišten je softverski paket COMET [4], koji koristi metodu konačnih volumena (MKV) za analizu naprezanja u izotropnim tijelima proizvoljnog oblika. U radu su urađeni primjeri proračuna deformacija u simuliranom izotropnom materijalu, jednom za 2D

Oznake / Symbols	
A	- površina, m ² - area
A_{ij}	- elastične konstante za ortotropan materijal, Pa - elastic constants for orthotropic material
$a_{\varphi_0}, a_{\varphi_j}$	- koeficijenti u diskretizacijskoj jednažbi - coefficients in the discretization equation
b_{φ}	- koeficijent u diskretizacijskoj jednažbi - coefficient in the discretization equation
C_{ijkl}	- komponente tenzora elastičnih konstanti, Pa - elastic constant tensor components
E_i	- modul elastičnosti, Pa - elastic modulus
F	- sila, N - force
f_c	- eksperimentalna komponenta pomaka, m - experimental displacement
f_i	- volumenska sila, N/m ³ - volume force
G_{ij}	- modul smika, Pa - shear modulus
Q	- funkcional, Pa ² - functional
t	- vrijeme, s - time
u_i	- komponenta pomaka, m - displacement
x_j	- Kartesijeva prostorna koordinata, m - Cartesian's spatial coordinate
α	- kut, rad - angle
ε_{ij}	- tenzor deformacije - strain tensor
$\varphi_{p_0}, \varphi_{p_j}$	- opća varijabla za kontrolni volumen - general variable for control volume
ν_{ij}	- Poissonov omjer - Poisson's ratio
ρ	- gustoća, kg/m ³ - mass density
σ_{ij}	- tenzor naprezanja, Pa - stress tensor
Indeksi /Indexes	
iz	- izotropni - isotropic
ort	- ortotropni - orthotropic
t,r,l	- tangencijalni, radijalni, longitudinalni - tangential, radial, longitudinal

domenu, a drugi put za 3D domenu i to za spoj bez zazoru i sa zazorom dobiveni rezultati su uspoređeni s eksperimentalnim podacima. Na ovaj način je određena greška koja se čini simuliranjem ortotropnosti izotropijom i zanemarivanjem ljepivih fuga za usvojene modele spoja. Također su određena mjesta maksimalnih naprezanja za kutni spoj sa zazorom.

2. Fizikalni model

Drveni kutni spoj (kutno dvokrako bočno spajanje pravokutnim sljubom s pravokutnim čepom u raskolu-urezu), prikazan na slici 1a, bio je izložen mehaničkom opterećenju na slobodnom kraju tijekom ispitivanja njegove deformacije. Fizikalni modeli tog kutnog spoja, i to dva ekstremna slučaja, bez i sa zazorom, prikazani su na slici 1b.

Pri numeričkom proračunu naprezanja i deformacija usvojene su sljedeće pretpostavke:

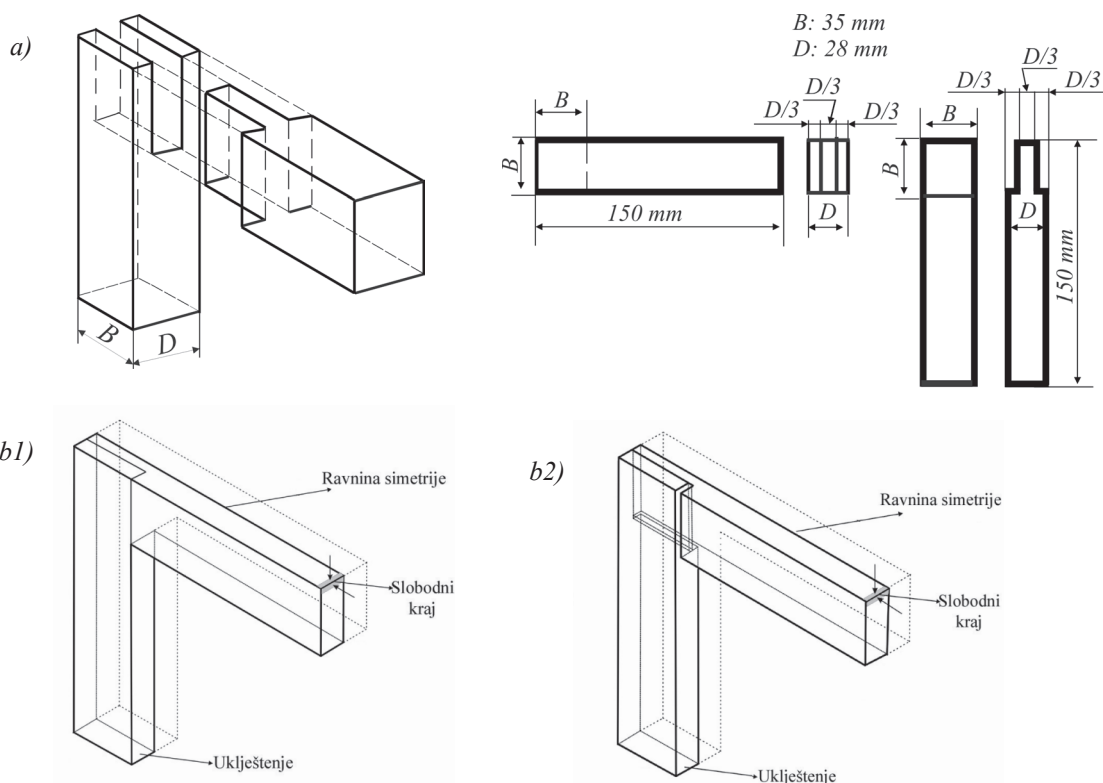
- materijal kutnika je izotropan i modul elastičnosti i Poissonov omjer su izračunati metodom najmanjih kvadrata,
- kutni spoj je bez ljepivih fuga,
- sila djeluje na konačnoj maloj površini,
- kod 2D domene pretpostavljeno je stanje ravninskog naprezanja.

3. Matematičko formuliranje

Jednažbe bilance količine gibanja ili Navierove jednažbe ravnoteže napregnutog tijela:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (1)$$

zajedno s konstitutivnim relacijama opisuju stanje naprezanja i deformacija čvrstog tijela koje je izloženo djelovanju mehaničkog opterećenja [5]. U jednažbama (1) su t - vrijeme, x_j - Kartesijeva prostorne koordinate



Slika 1. a) Drveni kutni spoj
 b) Fizikalna domena, b1) spoj bez zazor, b2) spoj sa zazorom
Figure 1. a) Wooden corner joint
 b) Physical domain, b1) the joint without a space, b2) the joint with a space

točke, ρ - gustoća, u_i - komponente pomaka točke tijela koje se deformira, σ_{ij} - tenzor naprezanja, f_i - volumenska sila.

Opći oblik konstitutivne relacije glasi:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (2)$$

gdje su C_{ijkl} - komponente tenzora elastičnih konstanti, ϵ_{kl} - komponente tenzora deformacije.

Za ortotropan materijal, kakav je drvo, jednadžba (2) u matricnoj formi glasi [1]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Elastične konstante za anizotropno, ortotropno tijelo dane su preko Youngovog modula E_i , Poissonovog omjera ν_{ij} i modula smika G_{ij} izrazima [1]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_1}{C}(1-\nu_{23}\nu_{32}), & A_{22} &= \frac{E_2}{C}(1-\nu_{31}\nu_{13}), \\ A_{33} &= \frac{E_3}{C}(1-\nu_{12}\nu_{21}), & A_{12} &= \frac{E_1}{C}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}), \\ A_{13} &= \frac{E_1}{C}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}), & A_{23} &= \frac{E_2}{C}(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}), \\ A_{44} &= 2G_{12}, & A_{55} &= 2G_{23}, & A_{66} &= 2G_{31}, \\ C &= 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}, \end{aligned} \quad (4)$$

pri čemu je:

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}, \quad E_1\nu_{31} = E_3\nu_{13}, \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}. \quad (5)$$

Za izotropan materijal jednadžba (3) se svodi na:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Da bi se kompletirao matematički model, početni i rubni uvjeti moraju biti specificirani. U početnom trenutku zadan je raspored pomaka, koji su u neopterećenom tijelu jednaki nuli, a na rubnim površinama se najčešće računa naprezanje, tj.

$$t = 0, u_i = 0, u_i = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{ji} n_j = (\sigma_i)_{rub}, \quad (8)$$

gdje je n_j - komponenta vektora normale na rubnu površinu.

4. Aproksimacija matrice krutosti ortotropnih materijala matricom krutosti izotropnih materijala

Matrica krutosti za ortotropne materijale ima devet nezavisnih konstanti (izrazi (3) i (4)), a za izotropne materijale ima samo dvije nezavisne materijalne konstante E i ν (izraz (6)). Da bi se olakšao proračun naprezanja i deformacija u tijelima složenog geometrijskog oblika od ortotropnog materijala napravljena je sljedeća simulacija. Naime, izračunata je matrica krutosti kao funkcija dva parametra E i ν za ortotropan materijal primjenom metode najmanjih kvadrata [3]. Suština je u tome da se minimizira zbroj kvadrata razlika između naprezanja dobivenih za homogen, izotropan materijal i onih dobivenih za stvarni ortotropan materijal, za sve pravce duž kojih se javlja deformacija.

Za izotropan materijal, kada se javlja samo dilatacija $\varepsilon_{11} = \varepsilon_0$ iz (6) dobiva se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \sigma_{22}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \sigma_{33}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \sigma_{12}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \sigma_{23}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \sigma_{31}^{iz}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{iz} \\ A_{22}^{iz} \\ A_{33}^{iz} \\ A_{12}^{iz} \\ A_{23}^{iz} \\ A_{31}^{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdje su naprezanja σ_{11}^{iz} , σ_{22}^{iz} , σ_{33}^{iz} konstantna u odnosu na kutove α_1 , α_2 , α_3 koje zaklapaju osi novog sustava u odnosu na početni koordinatni sustav, dok su naprezanja σ_{12}^{iz} , σ_{23}^{iz} , σ_{31}^{iz} jednaka nuli za sve vrijednosti kutova. Kod anizotropnog materijala sve komponente će se naprezanja promijeniti pri promjeni kutova α_1 , α_2 , α_3 , a ti kutovi se nalaze u sljedećim rasponima:

$$0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Sada se formira funkcional Q , koji treba minimizirati [3].

$$Q = \int_{sfera} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(\sigma_{11}^{ort} - \sigma_{11}^{iz})^2 + (\sigma_{22}^{ort} - \sigma_{22}^{iz})^2 + (\sigma_{33}^{ort} - \sigma_{33}^{iz})^2 + (\sigma_{12}^{ort} - \sigma_{12}^{iz})^2 + (\sigma_{23}^{ort} - \sigma_{23}^{iz})^2 + (\sigma_{31}^{ort} - \sigma_{31}^{iz})^2 \right] d\alpha_1 dA_{sfera}. \quad (11)$$

Nakon uvrštavanja izraza (9) u (11) i polazeći da je $dA_{sfera} = \cos \alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_3$ dobiva se:

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\sigma_{11}^{ort} - \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right)^2 + \left(\sigma_{22}^{ort} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right)^2 + \left(\sigma_{33}^{ort} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right)^2 + (\sigma_{12}^{ort})^2 + (\sigma_{23}^{ort})^2 + (\sigma_{31}^{ort})^2 \right] \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \quad (12)$$

Minimiziranje funkcionala Q vrši se u odnosu na

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ i } \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ i dobiva se:}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -2\varepsilon_0 \cos \alpha_3 \cdot \left(\sigma_{11}^{ort} - \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right) \cdot d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -2\varepsilon_0 \cos \alpha_3 \cdot \left[\left(\sigma_{22}^{ort} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right) + \left(\sigma_{33}^{ort} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \right) \right] \cdot d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 0. \tag{13}$$

Iz jednađbi (13) se dobiva:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{11}^{ort} \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 8\pi^2 \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0 \tag{14}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{22}^{ort} + \sigma_{33}^{ort}) \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 8\pi^2 \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_0.$$

Integrali naprezanja za ortotropni materijal, za koji vrijedi konstitutivna relacija (3), dani su izrazima:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{11}^{ort} \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \frac{\pi^2}{15} \cdot [24(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 16(A_{12} + A_{13} + A_{23}) + 32(A_{44} + A_{55} + A_{66})] \varepsilon_0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{22}^{ort} \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{33}^{ort} \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \frac{\pi^2}{15} [8(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 32(A_{12} + A_{13} + A_{23}) - 16(A_{44} + A_{55} + A_{66})] \varepsilon_0, \tag{15}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{ij}^{ort} \cos \alpha_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Nakon uvrštavanja izraza (15) u (14) i rješavanja jednađbi po materijalnim konstantama E i ν dobiva se:

$$\nu = \frac{A_{11} + A_{22} + A_{33} + 4(A_{12} + A_{13} + A_{23}) - 2[2(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 3(A_{12} + A_{13} + A_{23}) + (A_{44} + A_{55} + A_{66})]}{2[2(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 3(A_{12} + A_{13} + A_{23}) + (A_{44} + A_{55} + A_{66})]} \tag{16}$$

$$E = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{15(1-\nu)} [3(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 2(A_{12} + A_{13} + A_{23}) + 4(A_{44} + A_{55} + A_{66})].$$

Koeficijenti A_{ij} pomoću kojih se računaju modul elastičnosti E i Poissonov omjer ν simuliranog materijala dani su izrazima (4).

Ako se rješava stanje ravninskog naprezanja (2D problem), tada je:

$$\int_0^{\pi} \sigma_{11}^{ort} d\alpha_3 = \frac{\pi}{8} (3A_{11} + 2A_{12} + 3A_{22} + 4A_{33}) \varepsilon_0 \tag{17}$$

$$\int_0^{\pi} \sigma_{22}^{ort} d\alpha_3 = \frac{\pi}{8} (A_{11} + 6A_{12} + A_{22} - 4A_{33}) \varepsilon_0.$$

Relacije (9) svode se na:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{iz}(\alpha_3) \\ \sigma_{22}^{iz}(\alpha_3) \\ \sigma_{12}^{iz}(\alpha_3) \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} \varepsilon_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

a funkcional glasi:

$$Q = \int_0^\pi \left[(\sigma_{11}^{ort} - \sigma_{11}^{iz})^2 + (\sigma_{22}^{ort} - \sigma_{22}^{iz})^2 + \right. \\ \left. + (\sigma_{12}^{ort} - \sigma_{12}^{iz})^2 \right] d\alpha_3 \quad (19)$$

i minimizira se u odnosu na $\frac{E}{1-\nu^2}$ i $\frac{E\nu}{1-\nu^2}$.

Materijalne konstante za stanje ravninskog naprezanja su:

$$\nu = \frac{A_{11} + 6A_{12} + A_{22} - 4A_{33}}{3A_{11} + 2A_{12} + 3A_{22} + 4A_{33}}, \quad (20)$$

$$E = \frac{1-\nu^2}{8} (3A_{11} + 2A_{12} + 3A_{22} + 4A_{33}),$$

gdje su konstante matrice krutosti dane izrazima (4), s tim da je $A_{33} = 2G_{12}$.

5. Numerički postupak

Upravljajuće jednadžbe (1) kombinirane s konstitutivnim relacijama (6) riješene su numeričkom metodom baziranom na konačnim volumenima [2, 8], koja je ugrađena u softverski paket COMET.

Numeričko rješavanje problema zahtijeva diskretizaciju prostora i jednadžbi (kod nestacionarnih problema i vremena), što rezultira sustavom od $3 \times N$ ($2 \times N$ u 2D slučaju) nelinearnih i spregnutih algebarskih jednadžbi oblika:

$$a_{\phi_0} \phi_{P_0} - \sum_{j=1}^n a_{\phi_j} \phi_{P_j} = b_\phi, \quad (21)$$

gdje je n broj stranica promatranog kontrolnog volumena, koeficijenti a i izvorni član b su definirani za svaku

jednadžbu, a ϕ je nepoznati pomak u, v, w u pravcu osi x, y, z . Nakon primjene rubnih uvjeta (i početnih kod nestacionarnih problema) sustavi jednadžbi (21) za svaku zavisnu varijablu se lineariziraju i privremeno "raspregnu", tako da se koeficijenti a i izvorni član b računaju pomoću vrijednosti zavisnih varijabli iz prethodne iteracije. Tako se dobiva sustav linearnih algebarskih jednadžbi, koji se rješava iterativnim postupkom.

6. Eksperimentalna analiza

Kutnik, dimenzija kao na slici 1, na jednom kraju je ukliješten, a na drugom je opterećen silom, kako je prikazano na slici 2a.



a)



b)

Slika 2. Laboratorijsko određivanje pomaka rubne točke kutnika

Figure 2. Laboratory determination of the boundary point displacement in corner joint

Materijal od kojega je napravljen kutnik je smrča. Mehanička svojstva za temperaturu drva od 20 °C i udjel vlage 9,8 % dani su u tablici 1 [1], a gustoća je $\rho = 0,44 \text{ g/cm}^3$.

Izrazi (22) i (23) dobiveni su korištenjem regresijske analize i pri tome je koeficijent determinacije iznosio za prvi eksperiment 0,98 (slika 3a), a za drugi 0,895 (slika 3b).

Tablica 1. Mehanička svojstva drva (smrča)

Table 1. Mechanical properties of wood, (white wood)

E_t	E_r	E_l	G_{rt}	G_{lr}	G_{lt}	ν_{tr}	ν_{rt}	ν_{rl}	ν_{lr}	ν_{tl}	ν_{lt}
GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	GPa	-	-	-	-	-	-
0,392	0,686	15,916	0,0392	0,618	0,765	0,24	0,42	0,019	0,43	0,013	0,53

Kod prvog eksperimenta korišten je kutnik, kod kojeg je ostvaren kontakt dva elementa bez zazora, a kod drugog kutnik kod kojeg postoji zazor (~1 mm). Maseno opterećenje prvog kutnika se mijenjalo od 21 do 61 kg, a kod drugog od 20 do 42 kg. Broj ispitanih kutnika za prvi spoj je bio 15, a za drugi 14. Pomaci su mjereni u unaprijed određenoj točki pomoću davača (slika 2b). Točnost očitavanja je iznosila 0,01 mm.

Na temelju eksperimentalno dobivenih pomaka za korištena opterećenja (slika 3) formirana je aproksimacijska simulacija za određivanje komponente pomaka rubne točke kutnika u funkciji opterećenja, a u pravcu djelovanja sile i računa se

za spoj bez zazora prema $f_e = 0,001149F - 0,00996$ (22)

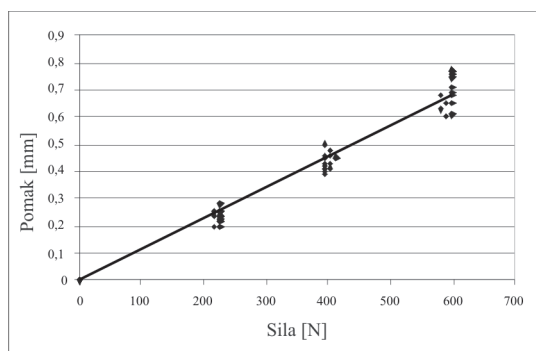
za spoj sa zazorom prema $f_e = 0,001341F - 0,001364$ (23)

Sila F je u N, a eksperimentalno dobiveni pomak f_e je u mm.

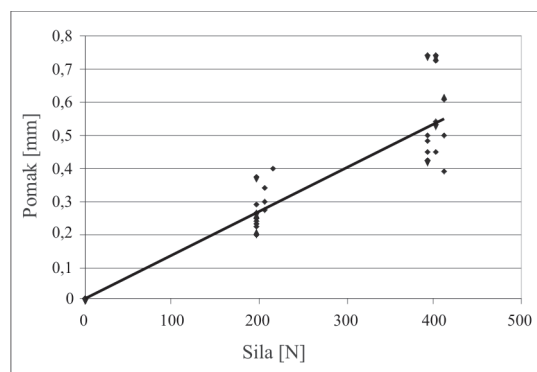
7. Primjeri određivanja pomaka točaka napregnutog kutnog spoja

Napravljena su četiri primjera. U prva dva je pretpostavljeno stanje ravninskog naprezanja, a u druga dva prostorno stanje naprezanja. Izvršen je proračun pomaka i naprezanja uz pretpostavku da je materijal izotropan i jednom je napravljeno sa spojem bez zazora, a drugi put je spoj bio sa zazorom. Pri numeričkom proračunu korišteni su sljedeći rubni uvjeti:

- ukliještenje: pomaci točaka jednaki su nuli,
- slobodni kraj: koncentrirana sila intenziteta 200 N, koja djeluje pod kutom od 45°, zamijenjena je kontinuiranim opterećenjem koje djeluje na dvije međusobno okomite površine duljine jednake debljini kutnika, a širine jednake širini kontrolnih volumena (slika 1b),
- ostale vanjske površine: odgovarajuće naprezanje je jednako nuli,



a)



b)

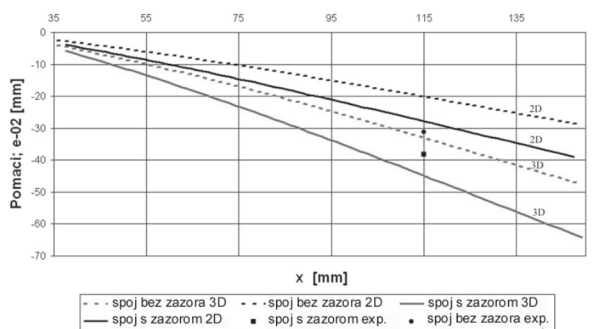
Slika 3. Pomak u referentnoj točki (eksperimentalni), a) spoj bez zazora, b) spoj sa zazorom

Figure 3. Displacement at reference point (experimental), a) the joint without a space, b) the joint with a space

- za spoj sa zazorom, na mjestu spoja dva elementa sa zračnim međuprostorom uzimaju se uvjeti kao za slobodnu površinu.

Modul elastičnosti i Poissonov omjer su izračunati za simulirani izotropan materijal pomoću izraza (20), odnosno (16) i dobivene su vrijednosti $E = 6,55$ GPa, $\nu = 0,244$ za 2D model i $E = 3,98$ GPa, $\nu = 0,192$ za 3D model. Proračun je rađen korištenjem programa COMET za mrežu od 3.339 KV za 2D model i 29.862 KV za 3D model s tim da je rađen proračun za jednu polovicu kutnika (geometrijska simetrija i simetrija opterećenja i rubnih uvjeta).

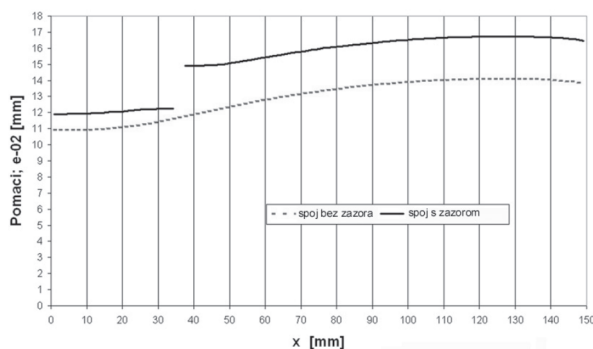
Na slici 4. prikazani su numerički dobiveni pomaci v točaka u presjeku $y = 115,8$ mm za 2D model i u presjeku ravnina $y = 115,8$ i $z = 13,2$ mm za 3D model, za spoj bez zazora i sa zazorom, kao i srednja vrijednost eksperimentalno dobivenog pomaka projicirana na y os. Pomaci dobiveni za 2D model su manji od onih dobivenih za 3D model, jer je savojna krutost bila veća kod 2D proračuna (vidjeti module elastičnosti za 2D i 3D model). Gdje se uočava bolje slaganje između eksperimentalno dobivenih vrijednosti i numeričkih rezultata dobivenih 3D modelom, što je i očekivano. Naime, relativna greška iznosi oko 12 ± 4 % (spoj sa i bez zazora), a kod 2D aproksimacije (stanje ravninskog naprezanja) je oko 30 ± 4 % (spoj bez i sa zazorom).



Slika 4. Raspodjela v pomaka u presjeku $y=115,8$ mm, 2D model i u presjeku ravnina $y=115,8$ mm i $z=13,2$ mm, 3D model za spoj bez i sa zazorom

Figure 4. Distribution of displacement v at the cross section $y=115.8$ mm, 2D model and at the intersection $y=115.8$ mm and $z=13.2$ mm, 3D model, for the joint without and with a space

Iako se radi o kutnicima male debljine, rezultati pokazuju da treba izvršiti analizu deformacija i stanja naprezanja u kutnim spojevima korištenjem 3D modela, što je i urađeno. Na Slici 4 se vidi da v pomaci rastu ka slobodnom kraju i da je gradijent $\frac{\partial u}{\partial x}$ veći kod spoja sa zazorom nego kod spoja bez zazora.



Slika 5. Raspodjela u pomaka u presjeku ravnina $y=149,2$ mm i $z=13,2$ mm za spoj bez zazora i sa zazorom, 3D model

Figure 5. Distribution of displacement u at the intersection $y=149.2$ mm and $z=13.2$ mm for the joint without and with a space, 3D model

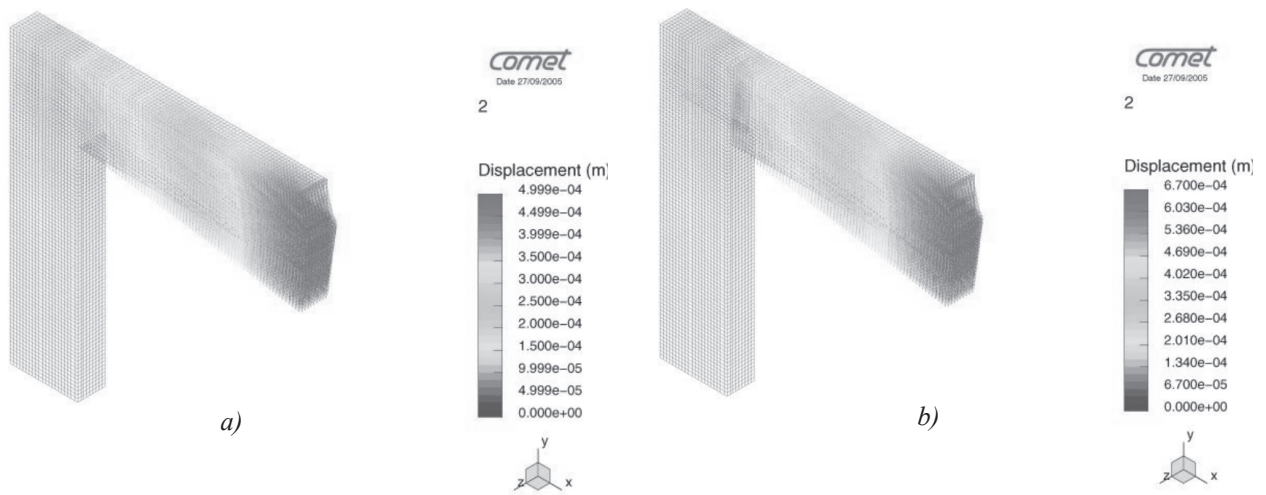
Raspodjela u pomaka u presjeku ravnina $y = 149,2$ mm i $z = 13,2$ mm prikazana je na slici 5. Uočava se da je gradijent $\frac{\partial u}{\partial x}$ na većem dijelu duljine kutnog spoja pozitivan, a uz vanjski kraj je negativan i da se kod spoja sa zazorom javlja skokovita promjena u pomaka na mjestu zazora.

Deformacija kutnog spoja bez i sa zazorom prikazana je na slici 6. Uočava se da su totalni pomaci veći kada postoji zazor.

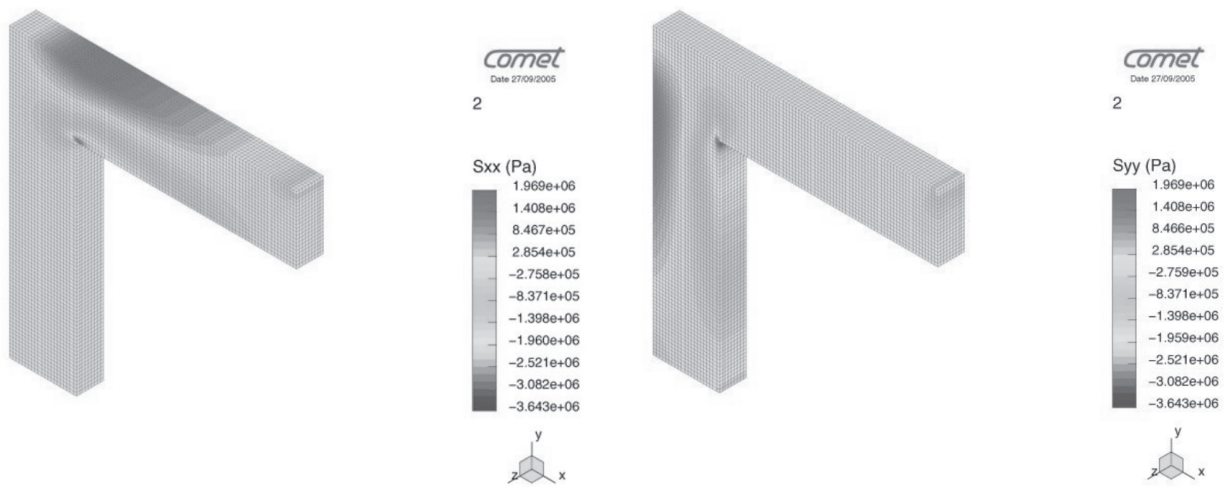
Za kutnik bez zazora na slici 7 prikazana su polja normalnih naprezanja σ_{xx} i σ_{yy} . Vidi se da su maksimalna tlačna naprezanja ($-3,6$ MPa) na mjestu djelovanja vanjskog opterećenja i na unutarnjoj površini kutnog spoja, a maksimalna vlačna naprezanja ($1,9$ MPa) se javljaju na vanjskim površinama kutnog spoja.

Polja posmičnih naprezanja τ_{xy} i τ_{xz} na vanjskim površinama kutnika bez i sa zazorom su prikazana na slici 8. Uočljiv je utjecaj zazora na raspodjelu i veličinu naprezanja. Ona su manja kod spoja bez zazora.

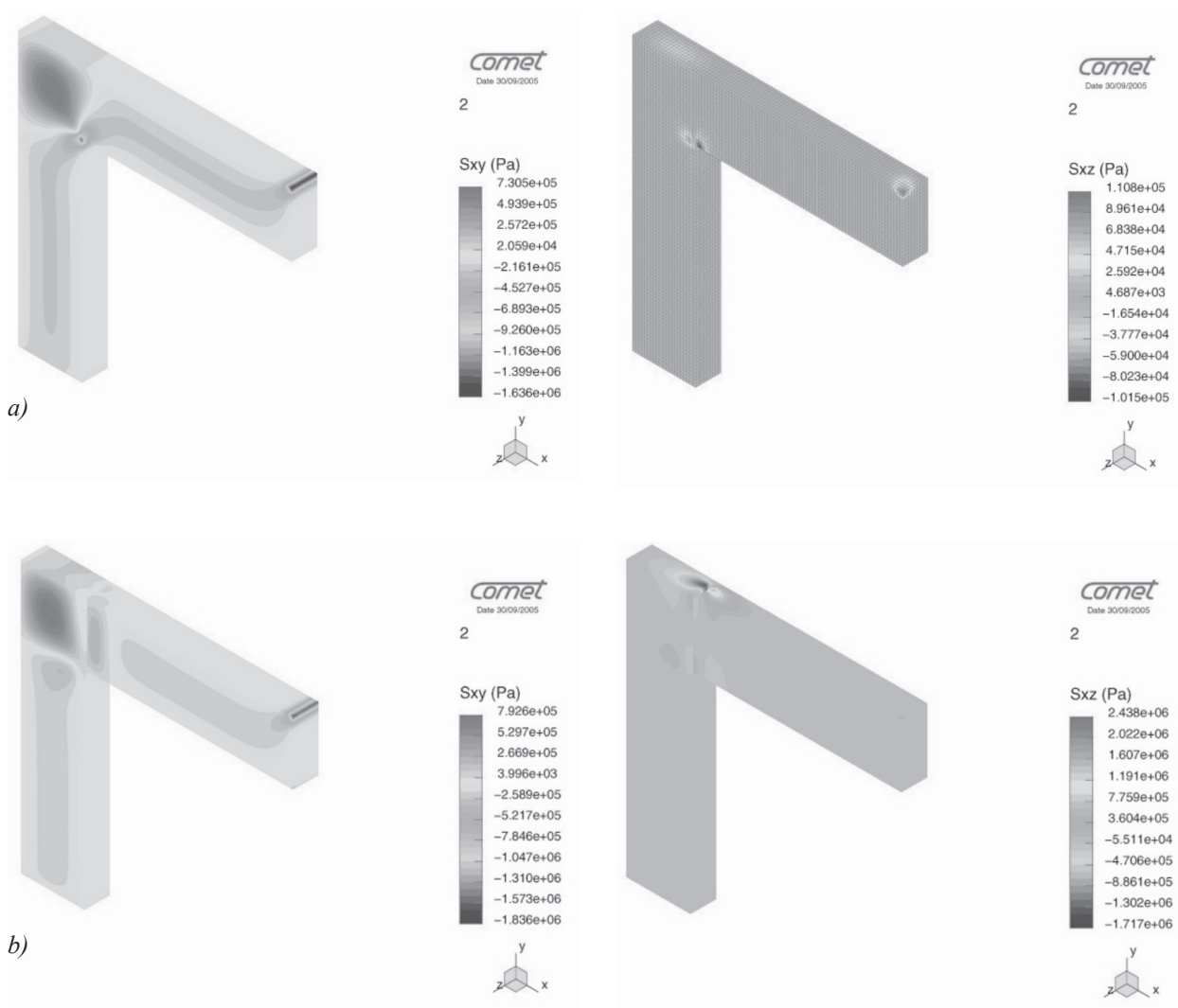
Maksimalne vrijednosti posmičnih naprezanja ne javljaju se na vanjskim površinama kutnika već u unutarnjosti, na mjestu ljepive fuge, tj. na kontaktnoj površini dijelova kutnog spoja, u ravnini $z = 4,6$ mm, računato od ravnine simetrije. U toj ravnini, za spoj sa zazorom, na slici 9, prikazana su polja posmičnih naprezanja τ_{xz} i τ_{yz} . Kritično mjesto je na unutarnjoj površini kutnog spoja i maksimalna vrijednost naprezanja τ_{xz} je oko 6 MPa, a τ_{yz} je oko 5 MPa.



Slika 6. Polje totalnog pomaka: a) kutnik bez zazoru, b) kutnik sa zazorom
 Figure 6. Field of total displacement: a) corner joint without a space, b) corner joint with a space



Slika 7. Polja normalnih naprezanja σ_{xx} i σ_{yy} na vanjskim površinama kutnika bez zazoru
 Figure 7. Fields of normal stresses σ_{xx} and σ_{yy} at boundary areas of the corner joint without a space



Slika 8. Polja posmičnih naprezanja τ_{xy} i τ_{xz} na vanjskim površinama: a) kutnik bez zazor, b) kutnik sa zazorom

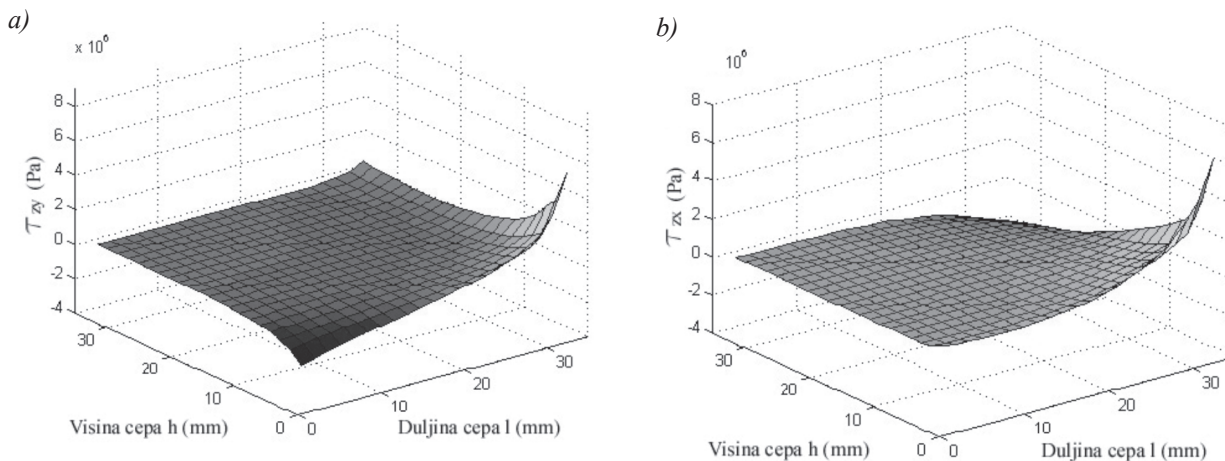
Figure 8. Fields of tangential stresses τ_{xy} and τ_{xz} at boundary areas of: a) the corner joint without a space, b) the corner joint with a space

Raspodjela totalnog posmičnog naprezanja, odnosno polje tog naprezanja na kontaktnoj površini elemenata kutnika sa zazorom je prikazano na slici 10. Maksimalno ukupno posmično naprezanje u toj ravnini je oko 8 MPa i javlja se na vrlo maloj površini, površini 1 KV, tj. na površini manjoj od 0,3 % ukupne površine kutnika.

Prema literaturnim podacima [12], maksimalno dopušteno posmično naprezanje za smršu u podužnoj ravnini je 6,3 MPa, za ljepljivo čvrstoća iznosi do 15 MPa, a to znači da će kutni spoj sa zazorom izdržati opterećenje kojem je izložen.

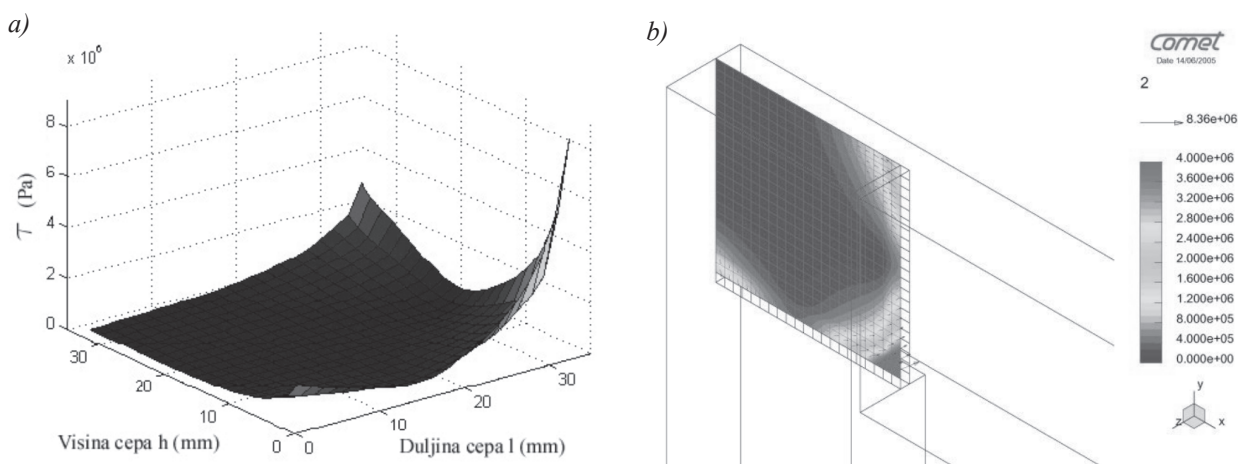
9. Zaključak

U radu je prikazana numerička metoda za analizu raspodjele naprezanja i deformacija u opterećenim kutnim spojevima bez zazor i sa zazorom, bazirana na diskretiziranju odgovarajućih jednadžbi bilance količine gibanja konačnim volumenima s pomacima kao glavnim nepoznicama. Verificiranje metode je izvršeno na primjerima za koje su eksperimentalno određeni pomaci točaka opterećenog radnog komada. Slaganje između rezultata proračuna (3D model) i eksperimentalnih podataka je zadovoljavajuće. Naime, razlika u rezultatima



Slika 9. Raspodjela posmičnog naprezanja na kontaktnoj površini elemenata kutnika sa zazorom: a) posmično naprezanja τ_{yz} , b) posmično naprezanje τ_{xz}

Figure 9. Distribution of tangential stress at the connection of elements of the corner joint with a space: a) tangential stress τ_{yz} , b) tangential stress τ_{xz}



Slika 10. a) Raspodjela totalnog posmičnog naprezanja na kontaktnoj površini elemenata kutnika sa zazorom, b) Polje naprezanja τ u ravnini $z=4,6$ mm

Figure 10. a) Distribution of total tangential stress at the connection of the elements of the corner joint with a space, b) Field of stress τ at the plain $z=4.6$ mm

mjerenja i proračuna za 3D model od 12 ± 4 % (spoj sa zazorom i bez zazora) posljedica je simuliranja ortotropne prirode drva izotropijom, zanemarivanja ljepive fuge pri numeričkom modeliranju i nemogućnosti realiziranja idealnog ukleštenja kod eksperimentalnog određivanja pomaka. Pokazano je da numerička simulacija naprezanja kutnih spojeva omogućuje utvrđivanje valjanosti tretiranog spoja, tj. određivanje mjesta maksimalnih posmičnih naprezanja.

Na osnovi provedenih istraživanja i dobivenih rezultata može se reći da je stvorena baza da se u budućem radu analiziraju naprezanja u konstrukcijama koje imaju više različitih spojeva elemenata, kao što su npr. stolci. Naravno, bit će potrebno koristiti konstitutivnu relaciju za ortotropne materijale i ugraditi je u COMET, što bi omogućilo da se točno izračunaju naprezanja i deformacije u kutnim spojevima korištenjem metode konačnih volumena.

LITERATURA

- [1] BODIG, J.; JAYNE, B.A.: *Mechanics of Wood and Wood Composites*, Krieger Publishing Company, Florida, 1993.
- [2] DEMIRDŽIĆ, I.; IVANKOVIĆ, A.: *Finite Volume Stress Analysis*, (Lecture notes), Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, 1996.
- [3] HEYDEN, S.: *Network Modelling for the Evaluation of Mechanical Properties of Cellulose Fibre Fluff*, (Doctoral thesis) Lund University, Department of Mechanics and Materials, Lund, Sweden, 2000.
- [4] ICCM-Institute of Computational Continuum Mechanics GmbH, User Manual – *Comet version 2.00*, Hamburg, 2001.
- [5] KOSTREŃIĆ, Z.: *Teorija elastičnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1982.
- [6] NICHOLLS, T.; CRISAN, R.: *Study of the stress-strain state in corner joints and box-type furniture using Finite element analysis*, Holz als Roh- und Werkstoff, 60 (2002), 66-71.
- [7] OLSSON, P.; OLSSON, K.G.: *Applied visualization of structural behaviour in furniture design*, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2003.
- [8] PATANKAR, S.V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Mc Graw Hill, 1980.
- [9] POUSETTE, A.: *Full-scale test and finite element analysis of a wooden spiral staircase*, Holz als Roh- und Werkstoff, 61 (2003), 1-7.
- [10] SMARDZEWSKI, J.; PREKRAT, S.: *Stress Distribution in Disconnected Furniture Joints*, Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Wood Technology, 5 (2002), 1-7.
- [11] SMARDZEWSKI, J.; PAPUGA, T.: *Stress Distribution in Angle Joints of Skeleton Furniture*, Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Wood Technology, 7 (2004), 1-13.
- [12] TKALEC, S.; PREKRAT, S.: *Konstrukcije proizvoda od drva*, Šumarski fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2000.