Stručni rad
Prihvaćeno 14. 12. 2003.

NIKOLETA SUDETA
IVAN PETRUNIĆ

# Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji

**Vaults as Parts of Sphere in Orthogonal Axonomerty**

**ABSTRACT**

In order to represent an architectural structure we often use axonometric methods. The most convinient type of representing vaults as parts of spheres is orthogonal axonomerty. The paper presents simple constructons of axonometric representations of some architectural dome (spherical, bohemian and pendentive) with view from above and from below.

**Key words:** dome, contour, ellipse, orthogonal axonomerty

**MSC 2000:** 51N05

**Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji**

**SAŽETAK**

Za postizanje zornog prikaza arhitektonskog objekta često se služimo aksonometrijskim metodama. Kod predočavanja svodova kao dijelova kugline plohe najprikladnija je ortogonalna aksonometrija. U radu su pokazane jednostavne konstrukcije aksonometrijskih slika nekih arhitektonskih kupola (viseće, češke i bizantske) s pogledom odozgo i pogledom odozdo.

**Ključne riječi:** elipsa, kontura, kupola, ortogonalna aksonometrija

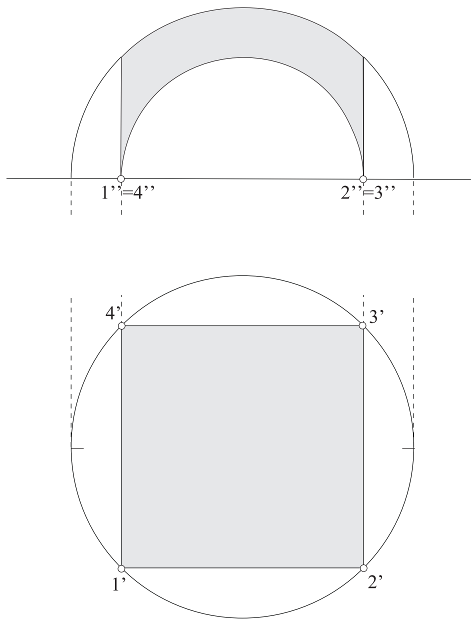
## 1 Uvod

Ortogonalno projiciranje na dvije ravnine općenito ne daje dovoljno zoran prikaz objekta. Da bismo postigli zornost, služimo se metodama paralelnog projiciranja na samo jednu ravninu. Pritom su zrake projiciranja u općem položaju s obzirom na koordinatni sustav. Zbog jednostavnijeg crtanja, objekt kojeg prikazujemo postavljamo u koordinatni sustav tako da mu osnovne dimenzije imaju smjer usporedan s koordinatnim osima. Ako su zrake projiciranja okomite na ravninu slike govorimo o *ortogonalnoj aksonometriji*, a u ostalim slučajevima riječ je o *kosoj aksonometriji*. Vrijednost aksonometrije je, posebno za arhitekte, u velikom broju informacija koje ona nudi što omogućava da arhitektonski projekt bude realistično prikazan i stoga razumljiv. U radu [3] arhitekt Ivan Juras naglašava: "U proceduri rada arhitekt aksonometriju upotrebljava u laboratorijskom istraživanju dok u procesu simulacije stvarnosti nužno primjenjuje perspektivu, pa se ne može strogo odvojiti jedno od drugog."

U ovom radu koristimo ortogonalno aksonometrijsku metodu za prikazivanje svodova kao arhitektonskih tvorbenih elemenata. Konstrukcije su izvedene na primjerima viseće, češke i bizantske *kupole* (tal. *cupola* - svod ili krov polukuglasta ili polukugli slična oblika).

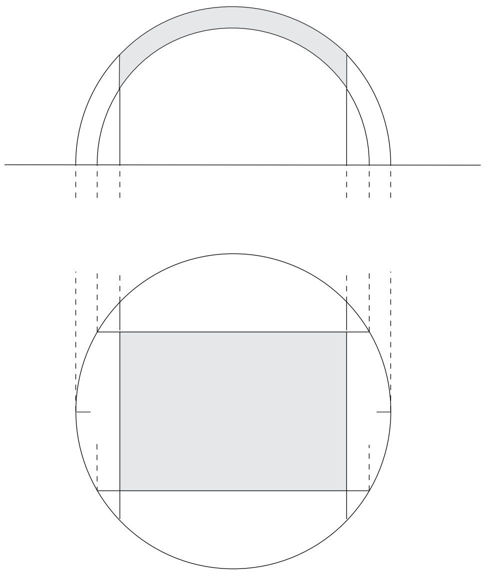
## 2 Viseća, češka i bizantska kupola

Ako je kupola izvedena nad kvadratnim tlocrtom kod kojeg je promjer polukugle jednak dijagonali kvadrata, govorimo o *visećoj* ili *opisanoj* kupoli. (Slika 1)



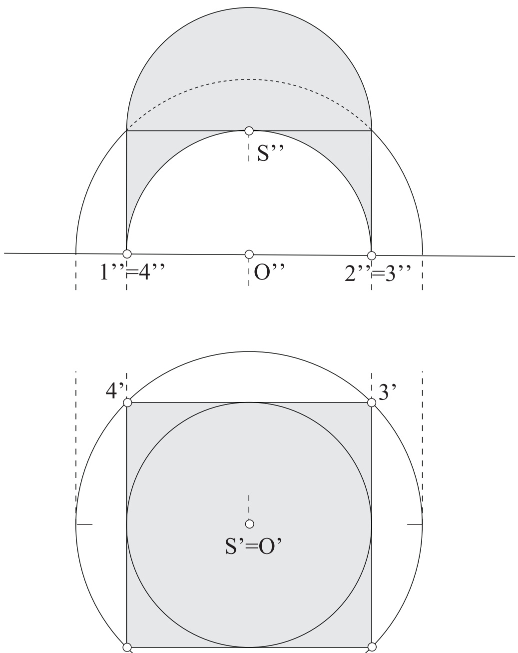

Slika 1: Viseća ili opisana kupola

Svod kao dio kugline plohe nad pravokutnim tlocrtom zovemo *češkom* ili *baroknom* kupolom. (Slika 2)



Slika 2: Češka ili barokna kupola

Tlocrt *bizantske* kupole ili *kupole s pandantivima* je kvadrat s upisanom kružnicom. Kupola leži na četiri sferna trokutasta isječka ( tzv. pandantiva). (Slika 3)




Slika 3: Bizantska kupola ili kupola s pandantivima

Slika 4: Bizantska kupola na svodu Sulejmanove džamije u Istanbulu.

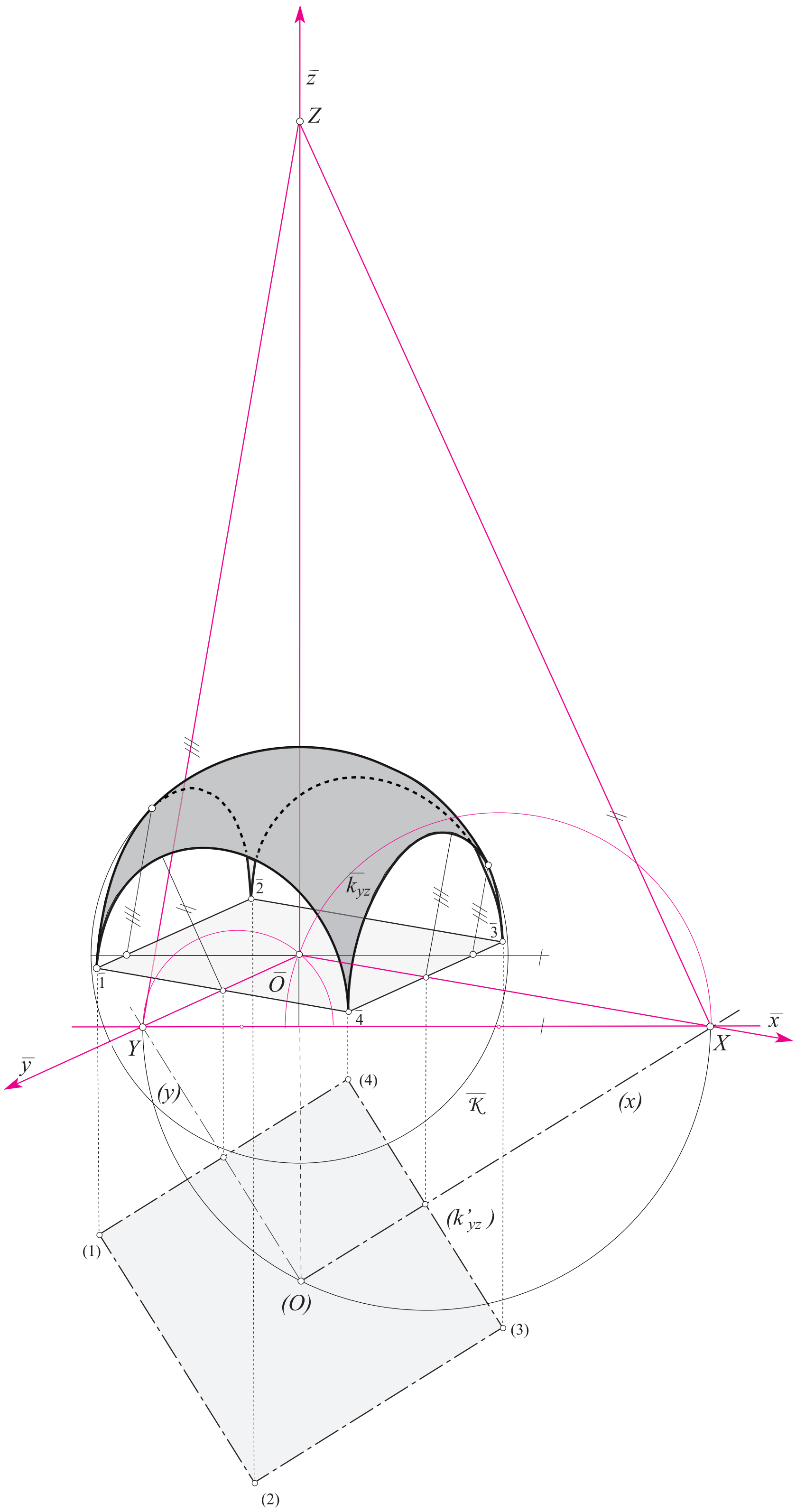
## 3 Ortogonalno aksonometrijske slike kupola

Pri promatranju nekog crteža smjer pogleda približno je okomit na ravninu crteža. Kako je, pored toga, prikazivanje kružnica i kugli najjednostavnije u ortogonalnom projiciranju, prirodno je da za zorni prikaz kugline plohe odaberemo *ortogonalnu aksonometriju*. Na slikama 5, 6 i 7 konstruirali smo ortogonalno aksonometrijsku sliku viseće, češke i bizantske kupole, zanemarivši njihovu debljinu.

Ortogonalnu aksonometriju smo, na slikama 5 i 7, zadali omjerom prikrata $m : n : p = 9 : 6 : 10$, te konstruirali pripadni *tračni trokut* $\triangle XYZ$ i *osni križ* na uobičajeni način [4]. Ta je konstrukcija istaknuta na slici 5. Na slici 6 ortogonalna aksometrija zadana je po volji odabranim tračnim trokutom za pogled odozdo.

Poznavajući zakonitosti ortogonalne aksonometrije i Mongeovog projiciranja možemo pojednostavniti aksonometrijsku konstrukciju kupole. To postižemo tako da središte polukugle postavimo u ishodište koordinatnog sustava, a ravnine rubnih polukružnica kupole u položaj usporedan s koordinatnim ravninama.

Aksonometrijski tlocrt kupole lako ćemo dobiti koristeći perspektivnu afinost između aksonometrijske slike koordinatne ravnine $(x,y)$ i njenog rotiranog položaja u ravnini slike. Os te afinosti je trag koordinatne ravnine $(x,y)$ u ravnini slike, a par pridruženih točaka je $\overline{O} \leftrightarrow (O)$. Ta je veza posebno istaknuta na slici 5 gdje smo rotirani tlocrt kupole, kvadrat $(1)(2)(3)(4)$, postavili tako da mu je središte u točki $(O)$, a stranice paralelne s rotiranim koordinatnim osima $(x)$ i $(y)$. Na isti su način konstruirani i aksonometrijski tlocrti kupola na slikama 6 i 7. Napominjemo da na slici 7 nije nacrtan aksonometrijski tlocrt one polukugle čiji je promjer jednak stranici kvadrata 1234.




Slika 5: Ortogonalno aksonometrijska slika viseće kupole s pogledom odozgo.

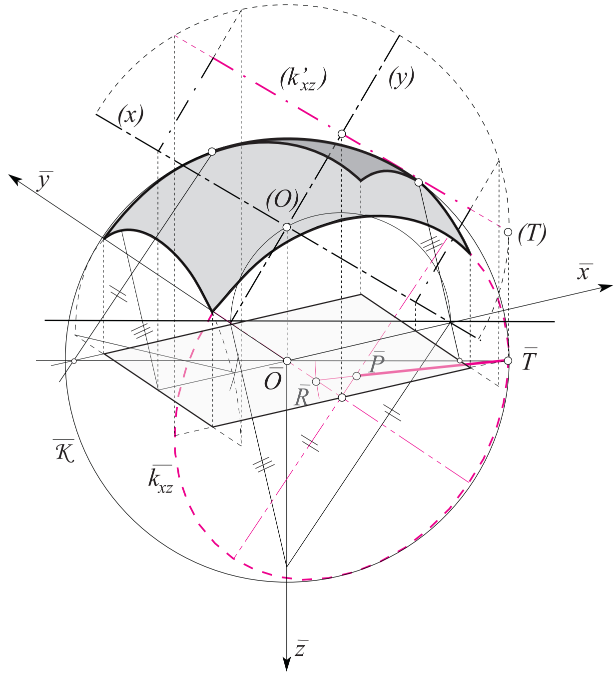
Pri konstrukciji aksonometrijskih slika zadanih kupola koristimo dvije poznate činjenice:

- Ortogonalna aksometrija kružnice općenito je elipsa.

- Kontura kugle u ortogonalnoj aksonometriji je kružnica (to je aksonometrijska slika one glavne kružnice kugle koja je paralelna s ravninom slike).

Aksonometrijske projekcije onih kružnica kugle koje leže u ravninama paralelnim s koordinantnim, a upravo smo tako postavili rubne polukružnice kupola, lako je odrediti. Središte svake takve elipse konstruirali smo pomoću rotiranog tlocrta, a ono leži na slici odgovarajuće koordinatne osi. Velika os svake takve elipse jednaka je promjeru odgovarajuće kružnice, a paralelna je s tragom ravnine u kojoj kružnica leži, odnosno s tragom njoj usporedne koordinantne ravnine (tj. odgovarajućom stranicom tračnoga trokuta). Veličinu male poluosi možemo konstruirati iz njezine velike poluosi i bilo koje točke te elipse [4, str. 18]. Ta je konstrukcija korištena za određivanje svih rubnih elipsi na slikama kupolama. Ona je posebno istaknuta, zbog preglednosti, na slici 6.

Malu poluos elipse $\overline{k_{xz}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice $k_{xz}$ paralelne s koordinatnom ravninom $(x,z)$, konstruirali smo koristeći točku $\overline{T}$ - krajnu točku promjera elipse paralelnog s koordinatnom osi $\overline{x}$. Luk pomoćne kružnice sa središtem u točki $\overline{T}$ i polumjerom jednakim polumjeru kružnice $k_{xz}$ siječe pravac male osi u točki $\overline{R}$. Spojnica $\overline{R}\,\overline{T}$ siječe pravac velike osi u točki $\overline{P}$. Udaljenost $d(\overline{T},\overline{P})$ jednaka je veličini male poluosi elipse $\overline{k_{xz}}$.



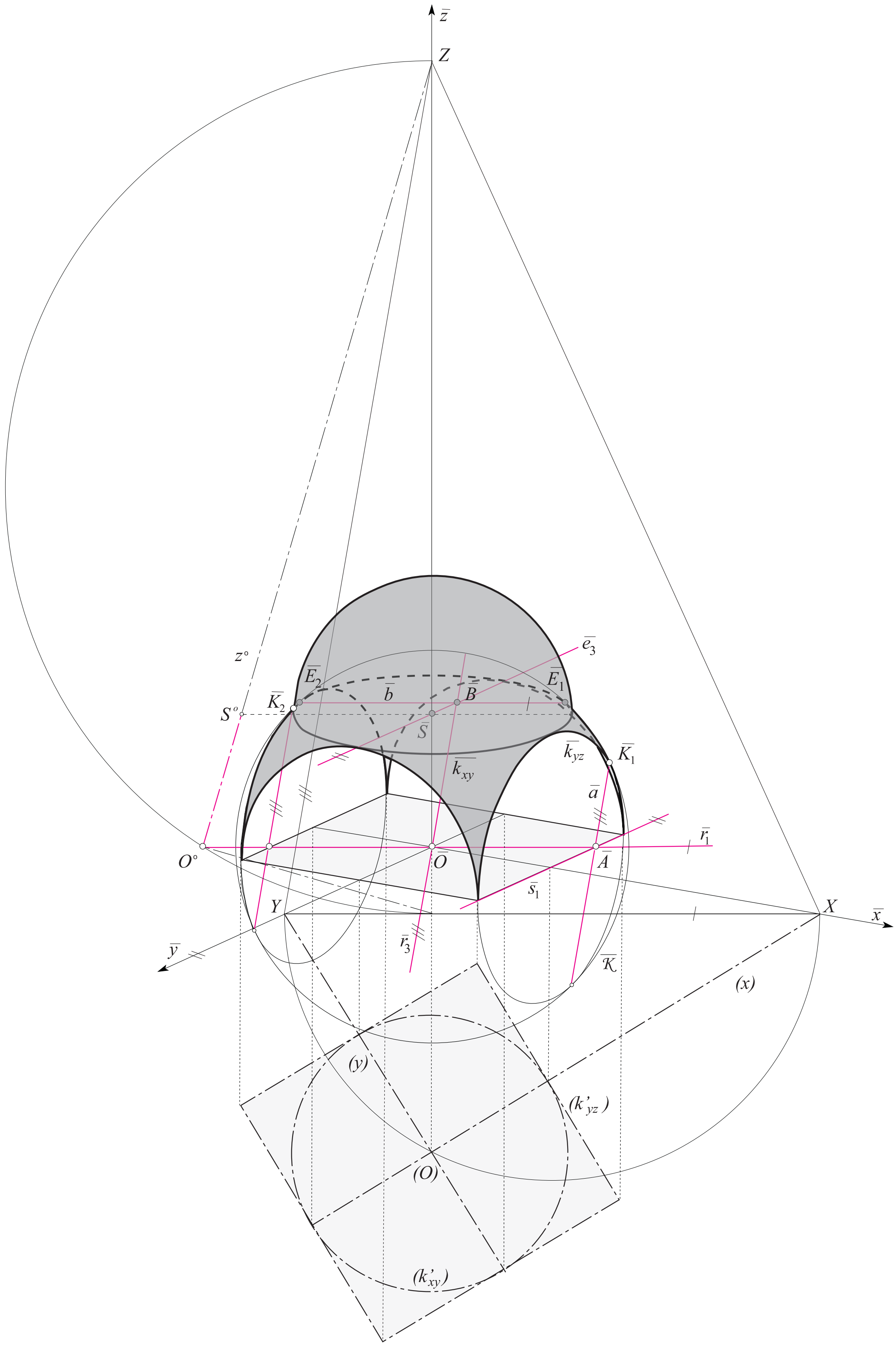

Slika 6: Ortogonalno aksonometrijska slika barokne kupole s pogledom odozdo.

Aksonometrijsku sliku kružnice paralelne s $(x,y)$ ravninom na bizantskoj kupoli (Slika 7) konstruirali smo odredivši joj središte $\overline{S}$ na osi $\overline{z}$. Kao što se vidi u nacrtu slike 3, udaljenost $d(S,O)$ jednaka je polumjeru gornje polukugle (pravu veličinu te udaljenosti nanijeli smo na prevaljeni položaj osi $z^o$).

Za određivanje vidljivosti na aksonometrijskoj slici kupole potrebno je konstruirati točke u kojima rubne elipse dodiruju konturnu kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$. Na slici 7 prikazano je to na primjeru elipse $\overline{k_{yz}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice $k_{yz}$ paralelne s koordinatnom ravninom $(y,z)$. Ona s konturnom kružnicom $\overline{\mathcal{K}}$ ima dvije zajedničke točke. Na kupoli se nalazi samo jedna, točka $\overline{K_1}$. Konstruiramo ju kao presjek pravca $a$ (presječnica ravnine konturne kružnice kugle i ravnine odabrane kružnice) i kružnice $\mathcal{K}$. Pri tom koristimo činjenicu da paralelne ravnine presječene trećom imaju paralelne presječnice. Stoga je pravac $\overline{a}$ paralelan s tragom koordinantne ravnine $(y,z)$. Zbog toga što znamo smjer tog pravca za njegovu kostrukciju dovoljna nam je jedna njegova točka, npr. $\overline{A}$. Konstruiramo ju kao sjecište traga $\overline{r_1}$ ravnine konturne kružnice kugle i koordinantne ravnine $(x,y)$, s tragom $\overline{s_1}$ ravnine odabrane kružnice kugle i iste koordinantne ravnine. Traženi pravac $\overline{a}$ prolazi točkom $\overline{A}$ i siječe kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$ u točki $\overline{K_1}$. Konturna točka dakako mora ležati i na odabranoj poluelipsi kao aksonometrijskoj projekciji polukružnice. Analogno je konstruirana i točka $\overline{K_2}$.

Ta je konstrukcija prikladna za određivanje konturnih točaka bilo koje elipse kao aksonometrijske slike kružnice kugle paralelne s odabranom koordinatnom ravninom. Stoga ju ponavljamo i za elipsu $\overline{k_{xy}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice $k_{xy}$ paralelne s koordinatnom ravninom $(x,y)$. Ona s konturnom kružnicom $\overline{\mathcal{K}}$ ima zajedničke točke $\overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$. Njih konstruiramo kao presjek pravca $\overline{b}$ ($b$ - presječnica ravnine konturne kružnice kugle i ravnine odabrane kružnice) i kružnice $\overline{\mathcal{K}}$. Traženi je pravac $\overline{b}$ paralelan s tragom koordinatne ravnine $(x,y)$ stoga nam je dovoljno poznavati jednu njegovu točku. Tu točku $\overline{B}$ možemo npr. konstruirati kao sjecište traga $\overline{r_3}$ ravnine konturne kružnice kugle i koordinantne ravnine $(y,z)$ s tragom $\overline{e_3}$ ravnine odabrane kružnice kugle i iste koordinatne ravnine. Traženi pravac $\overline{b}$ prolazi točkom $\overline{B}$ i siječe kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$ u točkama $\overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$. Konturne točke dakako leže i na elipsi $\overline{k_{xy}}$.

Taj postupak koristili smo za određivanje konturnih točaka i na slikama 5 i 6, a vrijedi za određivanje bilo kojih konturnih točaka arhitektonskih objekata koji su dijelovi kugline plohe. Npr. pravac $\overline{b}$ (sa slike 7) mogli smo također konstruirati pomoću sjecišta drugog traga ravnine konturne kružnice $\mathcal{K}$ i drugog traga ravnine kružnice $k_{xy}$.




Slika 7: Ortogonalno aksonometrijska slika bizantske kupole s pogledom odozgo.

## Literatura

[1] BRAUNER, H., KICKINGER, W., *Geometrija u graditeljstvu*, Školska knjiga, Zagreb, 1980. (prijevod: P. Kurilj, B. Hajsig)

[2] HOHENBERG, F., *Konstruktivna geomertrija u tehnici*, Građevinska knjiga, Beograd,1966. (prijevod: V. Niče)

[3] JURAS, I., Aksonometrija u arhitektovu crtežu, Crtež u znanosti, Zagreb, 1998, 107-123.

[4] NIČE, V., *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

**Nikoleta Sudeta**
Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: nsudeta@arhitekt.hr
**Ivan Petrunić (student)**
e-mail: ipetrunic@hotmail.com