Stručni rad
Prihvaćeno 18.02.2002.

Miljenko Lapaine

Krivulja središta i krivulja fokusa u pramenu konika zadanom pomoću dviju dvostrukih točaka u izotropnoj ravnini

Krivulja središta i krivulja fokusa u pramenu konika zadanom pomoću dviju dvostrukih točaka u izotropnoj ravnini

SAŽETAK

Razmatraju se pramenovi konika zadani s pomoću dviju dvostrukih točaka. Dokazuje se da se krivulja središta raspada na dva pravca od kojih jedan prolazi dvostrukim temeljnim točkama pramena, a drugi točkom u kojoj se sijeku zajedničke tangente svih konika pramena i polovištem dužine koja spaja temeljne točke. Nadalje, dokazuje se da se krivulja fokusa raspada na pravac i koniku. Taj pravac i konika prolaze dvostrukim temeljnim točkama pramena, a konika još i točkom u kojoj se sijeku zajedničke tangente svih konika pramena.

Ključne riječi: izotropna ravnina, krivulja fokusa, krivulja središta, pramen konika

The Curve of Centres and the Curve of all Isotropic Focal Points in the Conic Section Pencil Given by Two Double Points of an Isotropic Plane

ABSTRACT

Conic section pencils given by two double points are discussed. It is proved that the curve of centres decomposes into two straight lines, one of which is passing through the two double base points, while the other is passing through the intersection of common tanget lines of all conics of the pencil and through the centre of the straight segment joining the base points. Furthermore, it is proved that the curve of all isotropic focal points decomposes into a straight line and a conic. These straight line and conic are passing through the double base points of pencil, and the conic through the intersection of common tangent lines of all conics of the pencil.

Key words: conic section pencil, curve of centres, curve of all isotropic focal points, isotropic plane

MSC 2000: 51N20, 51N15

1 Uvod

Pramen konika određen je općenito s četiri realne i različite točke A, B, C i D koje se nazivaju temeljnim točkama pramena. Pramen konika tipa VI (Ščurić 1996) karakteriziran je svojstvom da se temeljne točke A i B podudaraju i da se temeljne točke C i D podudaraju. Kažemo da je pramen određen s dvije dvostruke točke. U tim točkama sve konike pramena imaju zajedničke tangente.

Grafički prikaz pramena konika može se učinkovito ostvariti primjenom računala i plotera. Matematička osnova razvijenog softvera za pramenove konika opisana je u prethodnom radu (Lapaine 1997) i više puta primijenjena (Lapaine i Lapaine 1998; Lapaine 2001).

Pri klasifikaciji pramenova konika mogu se primijeniti krivulja središta m^2 i krivulja fokusa k_f. Te su krivulje primjenjivane pri klasifikaciji pramenova konika tipa IV izotropne ravnine (Ščurić-Čudovan i Sachs 1995, 1997) i pri klasifikaciji pramenova konika tipa VI izotropne ravnine (Ščurić 1996).

Pri određivanju krivulje središta pramenova konika tipa VI može se primijeniti opći pristup određivanja krivulje središta pramena konika bilo kojeg tipa na način opisan u radu (Lapaine i Lapaine 1998). Drugi način određivanja krivulje središta za pramen konika tipa VI opisan je u ovome radu. Koristeći svojstvo da se radi baš o pramenu tipa VI, dokazuje se da se krivulja središta raspada na dva pravca od kojih jedan prolazi temeljnim dvostrukim točkama pramena, a drugi točkom u kojoj se sijeku zajedničke tangente svih konika pramena i polovištem dužine koja spaja temeljne točke.

U radu (Lapaine i Ščurić 1994) pokazuje se da je izotropna krivulja fokusa k_f pramena konika općenito krivulja trećeg reda, te se izvode i diskutiraju jednadžbe takvih krivulja u parametarskom obliku za 3 slučaja koji obuhvaćaju sve one tipove tih krivulja koji se pojavljuju pri klasifikaciji pramenova konika tipa IV. U ovome se radu dokazuje da se za pramenove tipa VI krivulja fokusa raspada na pravac i koniku. Taj pravac i konika prolaze temeljnim dvostrukim točkama pramena, a konika još i točkom u kojoj se sijeku zajedničke tangente svih konika pramena.

2 Konike

Najopćenitija jednadžba drugog stupnja od dvije varijable x i y može se napisati u obliku

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

gdje su a,b,c,d,e i f realni brojevi, i barem jedan od brojeva a,b i c različit od nule. Skup nul-točaka polinoma $F = F(x,y)$ zove se krivuljom 2. reda, konusnim presjekom, konikom ili čunjosječnicom.

Pretpostavimo da je bar jedan od brojeva a,b,c različit od nule. Pomoću rotacije ravnine oko ishodišta i translacije ravnine moguće je svaku koniku prikazati u standardnom ili kanonskom obliku (vidi npr. Lapaine i Jovičić 1996).

3 Pramen konika

Neka su

$$F(x,y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \tag{2}$$

$$G(x,y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0, \tag{3}$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu \in \mathbf{R}$, sastavimo polinom

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y). \tag{4}$$

Polinom $H = H(x,y)$ je oblika

$$H(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \tag{5}$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2,\ b = b_1 + \mu b_2,\ \ldots,\ f = f_1 + \mu f_2. \tag{6}$$

Za svaki pojedini $\mu \in \mathbf{R}$, izraz

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y) = 0 \tag{7}$$

je jednadžba konike u smislu definicije iz prethodnog poglavlja, ako je barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Za zadane realne brojeve $a_1, b_1, \ldots, f_1, a_2, b_2, \ldots, f_2$, i $\mu \in \mathbf{R}$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (7) zove se pramenom konika. Konike pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe $F(x,y) = 0$ i $G(x,y) = 0$ zovu se osnovnim konikama pramena.

4 Krivulja središta pramena konika

Neka je

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y) = 0 \tag{8}$$

jednadžba pramena konika, gdje su osnovne konike pramena određene jednadžbama

$$F(x,y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \tag{9}$$

$$G(x,y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0. \tag{10}$$

Tada je $H = H(x,y)$ polinom oblika

$$H(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \tag{11}$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2,\ b = b_1 + \mu b_2,\ \ldots,\ f = f_1 + \mu f_2. \tag{12}$$

Reći ćemo da je skup nul-točaka polinoma $H = H(x,y)$ centralno simetričan u odnosu na točku $S(x_S, y_S)$, ako postoji uređeni par realnih brojeva (x_S, y_S) takav da za svaki uređeni par realnih brojeva (x,y) sa svojstvom $H(x,y) = 0$ vrijedi

$$H(2x_S - x,\ 2y_S - y) = 0. \tag{13}$$

Zahtjev (13) može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} &H(x,y) + 4(ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S) \\ &- 4x(ax_S + by_S + d) - 4y(bx_S + cy_S + e) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Kako je po pretpostavci $H(x,y) = 0$, to vidimo da mora biti

$$ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S = 0 \tag{15}$$

$$ax_S + by_S + d = 0 \tag{16}$$

$$bx_S + cy_S + e = 0. \tag{17}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} &ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S \\ &= (ax_S + by_S + d)x_S + (bx_S + cy_S + e)y_S, \end{aligned} \tag{18}$$

što znači da je (15) posljedica relacija (16) i (17). Dakle, koordinate točke S moraju zadovoljavati sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} ax_S + by_S + d &= 0 \\ bx_S + cy_S + e &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Za pojedini čvrsti μ, rješenje tog sustava postoji ili ne postoji, a ako postoji može biti jedinstveno ili jednoparametarsko. Ako za zadani μ postoji uređeni par realnih brojeva (x_S, y_S) koji je rješenje sustava (19), tada se točka $S(x_S, y_S)$ zove centrom ili središtem konike $H(x,y)=0$. Ako postoji, to središte može, ali ne mora biti jedinstveno.

Eliminiramo li parametar μ iz (19), dobijemo

$$\begin{aligned}&(a_1x_S+b_1y_S+d_1)(b_2x_S+c_2y_S+e_2)\\&=(b_1x_S+c_1y_S+e_1)(a_2x_S+b_2y_S+d_2),\end{aligned} \tag{20}$$

odnosno nakon sređivanja

$$a_Sx_S^2+2b_Sx_Sy_S+c_Sy_S^2+2d_Sx_S+2e_Sy_S+f_S=0, \tag{21}$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned}a_S&=a_1b_2-b_1a_2\\2b_S&=a_1c_2-c_1a_2\\c_S&=b_1c_2-c_1b_2\\2d_S&=a_1e_2-b_1d_2+d_1b_2-e_1a_2\\2e_S&=b_1e_2-c_1d_2+d_1c_2-e_1b_2\\f_S&=d_1e_2-e_1d_2.\end{aligned} \tag{22}$$

Na temelju zapisa (21) možemo zaključiti da je skup svih središta pramena konika opet jedna konika, ako je bar jedan od koeficijenata a_S, b_S, c_S različit od nule.

Skup svih središta proizvoljnog pramena konika ne može biti imaginarna konika (imaginarna elipsa ili par imaginarnih pravaca). Naime, ako središte neke krivulje iz pramena postoji, njegove koordinate su rješenje sustava linearnih jednadžbi (19), dakle realni brojevi, jer su takvi svi koeficijenti sustava (19).

5 Krivulja središta pramena konika tipa VI

Ako su zadane četiri točke $P_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4$ u ravnini, od kojih ni koje tri nisu kolinearne, te ako je

$$g_{ik}=a_{ik}x+b_{ik}y+c_{ik}=0, \quad i\neq k, \tag{23}$$

jednadžba pravca P_iP_k, tada je jednadžbom

$$g_{12}g_{34}+\mu g_{13}g_{24}=0 \tag{24}$$

predočen pramen konika kojem su točke P_i temeljne (tj. sve konike pramena prolaze točkama P_i) (Cesarec 1957).

Neka su sada zadane dvije točke A i C i neka je t_1 bilo koji pravac koji prolazi točkom A, ali ne sadrži točku C i neka je t_2 bilo koji pravac koji prolazi točkom C, a ne prolazi točkom A. Označimo s g pravac kroz točke A i C. Ako su

$$t_1=0, \quad t_2=0 \quad \text{i} \quad g=0 \tag{25}$$

jednadžbe navedenih pravaca, tada je

$$g^2+\mu t_1t_2=0 \tag{26}$$

jednadžba pramena konika kojem su A i C temeljne točke, a t_1 i t_2 zajedničke tangente svih konika pramena. Pravac t_1 zajednička je tangenta svih konika pramena jer sa svakom konikom ima samo jednu zajedničku točku. Ta zajednička točka A zove se dvostrukom temeljnom točkom pramena. Pravac t_2 također je zajednička tangenta svih konika pramena i točka C dvostruka temeljna točka pramena.

Neka su s pomoću homogenih koordinata zadane točke

$$A=(x_{0A}, x_{1A}, x_{2A}) \quad \text{i} \quad C=(x_{0C}, x_{1C}, x_{2C}). \tag{27}$$

Lako se može vidjeti da se jednadžba pravca g koji prolazi točkama A i C može napisati u obliku

$$g_xx+g_yy+g_z=0, \tag{28}$$

gdje smo označili

$$g_x=\begin{vmatrix}x_{2C}&x_{2A}\\x_{0C}&x_{0A}\end{vmatrix}, \qquad g_y=-\begin{vmatrix}x_{1C}&x_{1A}\\x_{0C}&x_{0A}\end{vmatrix}, \qquad g_z=\begin{vmatrix}x_{1C}&x_{1A}\\x_{2C}&x_{2A}\end{vmatrix}. \tag{29}$$

Pravac t_1 prolazi točkom A, a njegov smjer neka određuje jedna pomoćna točka T_1 s homogenim koordinatama

$$T_1=(x_{0T_1}, x_{1T_1}, x_{2T_1}). \tag{30}$$

Jednadžba pravca t_1 koji prolazi točkama A i T_1 glasi tada

$$t_{1x}x+t_{1y}y+t_{1z}=0, \tag{31}$$

gdje smo označili

$$t_{1x}=\begin{vmatrix}x_{2T_1}&x_{2A}\\x_{0T_1}&x_{0A}\end{vmatrix}, \qquad t_{1y}=-\begin{vmatrix}x_{1T_1}&x_{1A}\\x_{0T_1}&x_{0A}\end{vmatrix}, \qquad t_{1z}=\begin{vmatrix}x_{1T_1}&x_{1A}\\x_{2T_1}&x_{2A}\end{vmatrix}. \tag{32}$$

Pravac t_2 prolazi točkom C, a njegov smjer neka određuje jedna pomoćna točka T_2 s homogenim koordinatama

$$T_2=(x_{0T_2}, x_{1T_2}, x_{2T_2}). \tag{33}$$

Jednadžba pravca t_2 koji prolazi točkama C i T_2 glasi tada

$$t_{2x}x+t_{2y}y+t_{2z}=0, \tag{34}$$

gdje smo označili

$$t_{2x} = \begin{vmatrix} x_{2T_2} & x_{2C} \\ x_{0T_2} & x_{0C} \end{vmatrix}, \qquad t_{2y} = -\begin{vmatrix} x_{1T_2} & x_{1C} \\ x_{0T_2} & x_{0C} \end{vmatrix}, \tag{35}$$

$$t_{2z} = \begin{vmatrix} x_{1T_2} & x_{1C} \\ x_{2T_2} & x_{2C} \end{vmatrix}.$$

S pomoću relacija (28)-(29) lako se može izvesti da je g^2 oblika

$$g^2 = F(x,y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 \tag{36}$$

uz oznake

$$\begin{array}{lll} a_1 = g_x^2 & b_1 = g_xg_y & c_1 = g_y^2 \\ d_1 = g_xg_z & e_1 = g_yg_z & f_1 = g_z^2. \end{array} \tag{37}$$

Sasvim analogno t_1t_2 je oblika

$$\begin{aligned} t_1t_2 &= G(x,y) \\ &= a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 \end{aligned} \tag{38}$$

uz oznake

$$\begin{array}{ll} a_2 = t_{1x}t_{2x} & b_2 = \frac{1}{2}(t_{1x}t_{2y} + t_{1y}t_{2x}) \\ c_2 = t_{1y}t_{2y} & d_2 = \frac{1}{2}(t_{1x}t_{2z} + t_{1z}t_{2x}) \\ e_2 = \frac{1}{2}(t_{1y}t_{2z} + t_{1z}t_{2y}) & f_2 = t_{1z}t_{2z}. \end{array} \tag{39}$$

Ukoliko dvije pomoćne točke T_1 i T_2 padnu zajedno, tada ćemo s $K = T_1 = T_2$ označiti točku koja istrovremeno pripada pravcima t_1 i t_2.

Uvrstimo li u jednadžbu (20) izraze (37) dobit ćemo jednadžbu krivulje središta u obliku

$$\begin{aligned} &(g_xx_S + g_yy_S + g_z)[(g_xb_2 - g_ya_2)x_S \\ &+ (g_xc_2 - g_yb_2)y_S + g_xe_2 - g_yd_2] = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Odatle se odmah vidi da se krivulja središta raspala na pravac g

$$g_xx + g_yy + g_z = 0,$$

i pravac

$$(g_xb_2 - g_ya_2)x + (g_xc_2 - g_yb_2)y + g_xe_2 - g_yd_2 = 0. \tag{41}$$

Pokažimo sada da ovaj posljednji pravac mora prolaziti točkom K. S obzirom da točka K pripada pravcima t_1 i t_2 to njene koordinate zadovoljavaju (31) i (34). Nije teško vidjeti da odgovarajuće linearne kombinacije izraza (31) i (34) daju

$$b_2x + c_2y + e_2 = 0 \quad \text{i} \quad a_2x + b_2y + d_2 = 0. \tag{42}$$

Napišemo li (41) u obliku

$$g_x(b_2x + c_2y + e_2) - g_y(a_2x + b_2y + d_2) = 0, \tag{43}$$

tada je jasno da točka K zadovljava posljednju jednadžbu, što drugim riječima znači da točka K pripada pravcu (41).

Na kraju ćemo još dokazati da pravac (41) prolazi središtem dužine AC, tj. točkom P s koordinatama

$$P\left(\frac{1}{2}(x_A + x_C),\ \frac{1}{2}(y_A + y_C)\right). \tag{44}$$

U tu svrhu dovoljno je uvrstiti koordinate točke P (44) u jednadžbu pravca (41). Međutim, kad se to napravi, ne vidi se baš odmah da je jednadžba zadovoljena. No, ako najprije izrazimo koeficijente a_2, b_2, c_2, d_2 i e_2 prema (39) te iskoristimo činjenice da točka A leži na pravcu t_1 i točka C na pravcu t_2:

$$\begin{aligned} &t_{1x}x_A + t_{1y}y_A + t_{1z} = 0, \\ &t_{2x}x_C + t_{2y}y_C + t_{2z} = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

dolazimo do izraza

$$(t_{1y}t_{2x} - t_{1x}t_{2y})[g_x(x_A - x_C) + g_y(y_A - y_C)] = 0 \tag{46}$$

koji je identički jednak nuli zbog toga što točke A i C pripadaju pravcu g:

$$\begin{aligned} &g_xx_A + g_yy_A + g_z = 0, \\ &g_xx_C + g_yy_C + g_z = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

6 Krivulja fokusa pramena konika tipa VI

Neka je

$$H = g^2 + \mu t_1t_2 = 0 \tag{48}$$

jednadžba pramena konika tipa VI uz oznake iz prethodnog poglavlja. Izotropna krivulja fokusa pramena konika geometrijsko je mjesto dirališta svih tangenata na pojedine krivulje pramena, uz uvjet da te tangente sadrže i zadanu neizmjerno daleku apsolutnu točku, odnosno da sve tangente imaju jedan te isti smjer. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ta neizmjerno daleka apsolutna točka ima homogene koordinate $(0,0,1)$, tj. da se nalazi u smjeru koordinatne osi y. Na taj je način izotropna krivulja fokusa pramena konika određena uvjetom

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0. \tag{49}$$

Na temelju relacija (48) i (49), a uzevši u obzir (28), (31) i (34) može se napisati jednadžba krivulje fokusa u obliku

$$g(2g_yt_1t_2 - t_{1y}gt_2 - t_{2y}gt_1) = 0. \tag{50}$$

Iz posljednje formule slijedi da se za pramenove tipa VI krivulja fokusa raspada na pravac g i koniku. Lako se vidi da pravac g i konika

$$2g_yt_1t_2 - t_{1y}gt_2 - t_{2y}gt_1 = 0 \tag{51}$$

prolaze temeljnim dvostrukim točkama pramena A i C, a konika još i točkom K u kojoj se sijeku zajedničke tangente svih konika pramena.

Jednadžba konike (51) može se transformirati u standardni oblik

$$(g_y a_2 - g_x b_2)x^2 + (g_y b_2 - g_x c_2)xy + (2g_y d_2 - g_x e_2 - g_z b_2)x + (g_y e_2 - g_z c_2)y + (g_y f_2 - g_z e_2) = 0, \quad (52)$$

kojim se možemo poslužiti za njeno grafičko prikazivanje.

7 Primjer

Na temelju formula izvednih u radu (Lapaine 2001) sastavljen je potprogram za računalo koji polazeći od zadanih homogenih koordinata točaka A, C, T_1 i T_2 određuje koeficijente u jednadžbi pripadnog pramena konika. Točke A i C su dvostruke točke, a točke T_1 i T_2 pomoćne točke. Točke A i T_1 definiraju jednu, a točke C i T_2 drugu zajedničku tangentu svih konika pramena. Točke T_1 i T_2 mogu pasti zajedno i tada tu točku označavamo s K.

Nakon što su izračunani koeficijenti u jednadžbi pramena, primjena odgovarajućeg softvera omogućuje grafičko prikazivanje pramena (Lapaine 1997), te pripadne krivulje središta i krivulje fokusa na temelju formula izvednih u ovome radu.

Neka su zadane dvostruke temeljne točke pramena konika $A(1,-1,0)$, $C(1,5,0)$ i pomoćna točka $K(1,0,-1)$.

Račun daje

$g_x = 0, \quad g_y = -6, \quad g_z = 0,$

jednadžba pravca $\quad g \ldots \quad y = 0,$

$t_{1x} = 0, \quad t_{1y} = -1, \quad t_{1z} = -1,$

jednadžba pravca $\quad t_1 \ldots \quad y = -x-1,$

$t_{2x} = -1, \quad t_{2y} = 5, \quad t_{2z} = 5,$

jednadžba pravca $\quad t_2 \ldots \quad y = \frac{1}{5}x - 1.$

$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 36,$

$d_1 = 0 \quad e_1 = 0 \quad f_1 = 0,$

$a_2 = 1, \quad b_2 = -2, \quad c_2 = -5,$

$d_2 = -2 \quad e_2 = -5 \quad f_2 = -5.$

Jednadžba pramena:

$$y^2 + \mu(x^2 - 4xy - 5y^2 - 4x - 10y - 5) = 0.$$

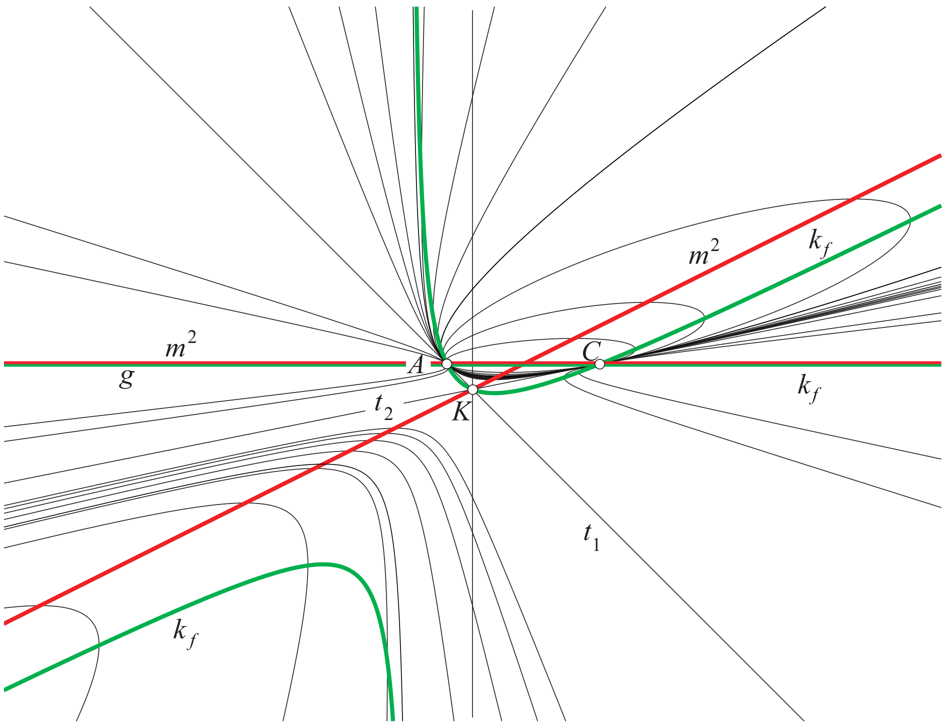
Krivulja središta:

$$m^2 \ldots y(x - 2y - 2) = 0.$$

Krivulja fokusa:

$$k_f \ldots y(x^2 - 2xy - 4x - 5y - 5) = 0.$$

Pramen konika, njegova krivulja središta (crveno) i krivulja fokusa (zeleno) prikazani su na slici 1.



Slika 1. Pramen konika tipa VI

Literatura

CESAREC, R. (1957): Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja, I dio. Školska knjiga, Zagreb.

LAPAINE, M. (1997): Grafički prikaz pramena konika pomoću računala. KoG 2, 43-47.

LAPAINE, M. (1999): Pramen konika zadan pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih realnih točaka. KoG 4, 27-32.

LAPAINE, M. (2001): Pramen konika zadan pomoću dviju dvostrukih točaka. KoG 5, 25-30.

LAPAINE, M., JOVIČIĆ, D. (1996): Grafički prikazi konika pomoću računala. KoG 1, 19-26.

LAPAINE, Milj., LAPAINE Mir. (1998): Krivulja središta pramena konika. KoG 3, 35-40.

LAPAINE, M., ŠČURIĆ, V. (1994): Curve of all Isotropic Focal Points. 6th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Otsuma Women's University, Tokyo, Proceedings, Vol. 2, 338-342.

ŠČURIĆ, V. (1996): Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ VI der Isotropen Ebene. Mathematica Pannonica, 7/1, 47-67.

ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V., SACHS, H. (1995): Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, I. Rad HAZU 470, Matematičke znanosti, sv. 12, 119-137.

ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V., SACHS, H. (1997): Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, II. Rad HAZU 472, Matematičke znanosti, sv. 13, 27-53.

Miljenko Lapaine
Geodetski fakultet Zagreb
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 45 61 273, faks: 48 28 081
e-mail: mlapaine@geof.hr
http://www.kartografija.hr