

Professionelle Arbeit
Angenommen am 27.06.2002

GUNTER WEISS
HANS HAVLICEK

Ecken- und Kantenhöhen im Tetraeder

Vršne i bridne visine tetraedra

SAŽETAK

k -visina nekog n -simpleksa siječe njegovu k -stranicu i njoj nasuprotnu stranicu okomito. Tetraedar T ima četiri "vršne visine" ($k=0$) i tri "bridne visine" ($k=1$). Visine oba tipa izvodnice su posebnih hiperboloida povezanih s tetraedrom T .

Članak obrađuje te hiperboloide na način nacrtnge geometrije i daje sintetičke dokaze nekih dobro poznatih svojstava. Pokazuje se, na primjer, da ako se visine jednog tipa sijeku u jednoj točki da se tada i visine drugog tipa sijeku u jednoj točki te da te točke koincidiraju.

Ključne riječi: tetraedar, hiperboloid visina, centralna projekcija

Vertex- and Edge-Altitudes of a Tetrahedron

ABSTRACT

A k -altitude of an n -simplex meets a k -face and its opposite face orthogonally. A tetrahedron T possesses four "vertex-altitudes" ($k=0$) and three "edge-altitudes" ($k=1$). The altitudes of each type are generators of special hyperboloids connected with T .

The paper treats these hyperboloids in terms of descriptive geometry and gives synthetic proofs for some well-known properties. It turns out, for example, that if the altitudes of one type intersect in one point, then so do the others, and the points of intersection coincide.

Key words: tetrahedron, hyperboloid of altitudes, central projection

MSC 2000: 51N05, 51N20, 51M04

1 Einführung

Die Anregung von A. Sliepčević aufgreifend, elementargeometrischen Fragestellungen wieder mehr Beachtung zu schenken, (vgl. [21]), wird hier u.a. ein elementares Problem der Raumgeometrie vorgestellt: die Bestimmung und Analyse der Gemeinnormalen windschiefer Kantenpaare eines Tetraeders, also dessen "Kantenhöhen" und der "Eckenhöhen". Ziel ist es einerseits, mit diesem Problemkreis jugendlichen Forschern schon in der Endphase ihres Schulunterrichts ein Trainingsgebiet bereitzustellen. Andererseits werden mittels elementarer darstellend-geometrischer Methoden durchaus auch Zugänge zu den nächsten Etagen der "Höheren Geometrie" eröffnet.

2 Zum Höhenbegriff eines Tetraeders

Aus der ebenen Elementargeometrie ist geläufig, dass die Höhen eines Dreiecks kopunktal sind, (kurz, jedes ebene Dreieck besitzt ein Orthozentrum O). Ebenso sind die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten und die Schwerlinien kopunktal (mit den Schnittpunkten C bzw. G). Genau für gleichseitige Dreiecke fallen diese drei Punkte zusammen, sodass diese Dreiecke eine Sonderrolle spielen. Für

alle anderen Dreiecke sind O , C und G verschieden und kollinear mit der sogenannten Euler-Geraden e . Eine erste, dimensionsmäßige Verallgemeinerung des Begriffs "Dreieck" ist der des "Tetraeders" bzw. " n -Simplexes". Ein Tetraeder T besitzt 4 Ecken A_0, \dots, A_3 , 6 Kanten $a_{ij} = A_i A_j$, die als drei windschiefe Paare auftreten, sowie 4 Facettendreiecke $\alpha_l = A_i A_j A_k$.

Ein n -dimensionalen (euklidischen) Raum aufspannender n -Simplex $\mathcal{S}^{(n)}$ besitzt dementsprechend $(n+1)$ Ecken und $\binom{n+1}{k+1}$ k -dimensionale Facetten.

Definition :

Unter einer Höhenggeraden (kurz: "Höhe") h_{j_1}, \dots, h_{j_k} von $\mathcal{S}^{(n)}$ wollen wir das "Gemeinlot" des Facettenraumes $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$ und dessen komplementärer Facette verstehen.

Demnach besitzt ein Dreieck nur eine Art von Höhen, ein Tetraeder hingegen zwei Arten, von denen den "Eckenhöhen" h_j seit G. MONGE weitreichende Untersuchungen gewidmet wurden, (siehe [4], [6], [10], [15], [20]).

Weniger Beachtung fanden die "Kantenhöhen" h_{ij} von T .

Im Folgenden sollen beide Arten von Tetraederhöhen mit darstellend-geometrischen Mitteln behandelt werden.

3 Die Eckenhöhen eines Tetraeders

Bekanntlich gilt (vgl. etwa [10]) der

Satz 1 :

Für jedes Tetraeder \mathbf{T} mit zwei bzw. genau einem bzw. keinem Paar orthogonaler Gegenkanten schneiden die vier Höhenggeraden einander in genau einem Punkt O bzw. zweimal 2 Höhenggeraden in verschiedenen Punkten O_1, O_2 bzw. gehören sie einem Regulus auf einem gleichseitigen Hyperboloid Ψ an.

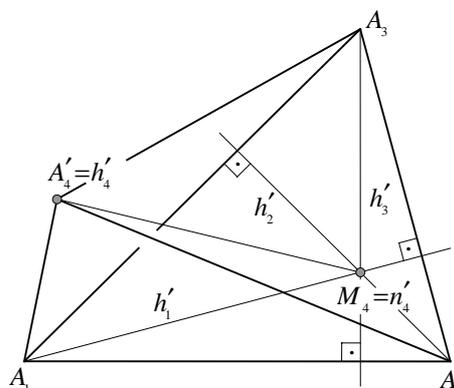
Bemerkung 1: Für Tetraeder \mathbf{T} mit zwei Paaren orthogonaler Gegenkanten ist auch das dritte Kantenpaar orthogonal. Solche Tetraeder heißen “orthozentrisch” mit O als Höhenschnittpunkt.

Bemerkung 2: Der Mittelpunkt M des Regulus Ψ bzw. der Strecke $[O_1, O_2]$ bzw. der Punkt O liegt zur Umphärenmitte C bezüglich des Eckenschwerpunktes G spiegelbildlich. Die Trägergerade e von C, G und M heißt EULER-Gerade von \mathbf{T} . Der Punkt M heißt der MONGE-Punkt von \mathbf{T} ; er verallgemeinert also den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks.

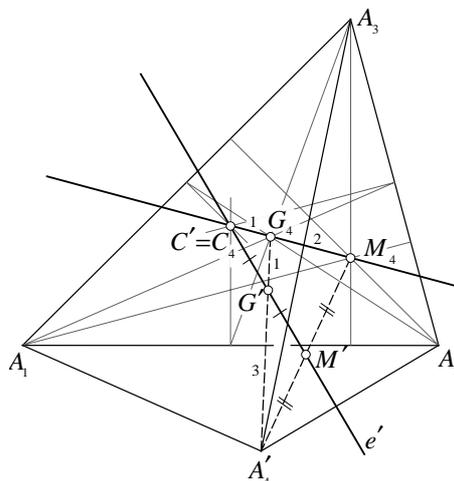
Bemerkung 3: Ein (bekannter) konstruktiv-geometrischer Beweis für die im allgemeinen Fall reguloide Lage der vier Höhenggeraden h_i benützt einen Normalriss von \mathbf{T} auf eine Facettenebene, etwa auf α_4 , siehe Figur 1.

Dann ist h_4 projizierend, ($A'_4 = h'_4$), und h'_1, h'_2, h'_3 fallen in die mit dem Dreieckshöhenschnittpunkt M_4 kopunktalen Höhenggeraden des Dreiecks $(A_1A_2A_3)$. (Der (nichtprojizierende) Normalriss einer Ebenennormalen ist nämlich stets normal zu den Hauptgeraden dieser Ebene, ein Sachverhalt, der als “Satz vom Normalriss eines rechten Winkels” bekannt ist.) Damit existiert eine zu h_4 parallele Treffgerade n_4 an h_1, h_2, h_3 ; ihr Normalriss fällt in den Höhenschnittpunkt M_4 von $(A_1A_2A_3)$. In der projektiven Erweiterung des Anschauungsraumes ist n_4 mithin eine Treffgerade aller vier Tetraederhöhen h_i . Zu jeder der vier Facetten von \mathbf{T} existiert also eine zu dieser normale Treffgerade n_i der Höhen h_i . Da vier nicht-reguloide, windschiefe Geraden höchstens zwei Treffgeraden besitzen können¹, folgt damit, dass die Höhen reguloid liegen und deshalb einer einzigen Quadrik Ψ angehören. Aus der Existenz paralleler Erzeugenden auf Ψ folgt unmittelbar, dass Ψ eine Mittelpunktquadrik sein muss und kein Paraboloid sein kann. Diese Überlegungen lassen allerdings offen, dass Ψ ein gleichseitiges Hyperboloid ist, also eine einparametrische Schar von Tripeln paarweise orthogonaler Erzeugenden besitzt.

¹Drei der vier windschiefen Geraden bestimmen genau einen Treffgeradenregulus, also eine Ringquadrik Φ . Eine Treffgerade aller vier Geraden gehört diesem Treffgeradenregulus an und geht durch einen Schnittpunkt von Φ mit der vierten gegebenen Geraden.



Figur 1: Normalriss eines Tetraeders \mathbf{T} auf eine Facettenebene α_4 .



Figur 2: Die EULER-Geraden e, e_4 eines Tetraeders \mathbf{T} und seines Facettendreiecks $(A_1A_2A_3)$.

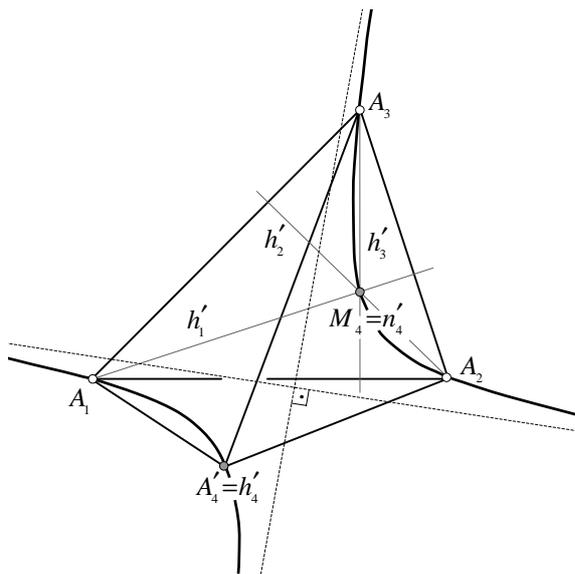
Bemerkung 4: Da parallele Erzeugenden einer Ringquadrik spiegelbildlich zum Mittelpunkt M liegen, erscheint der Normalriss M' dieses Mittelpunktes als der Mittelpunkt der Strecke $[A'_4, m_4]$, vgl. Figur 2. Der Riss C' der Umkugelmittle C von \mathbf{T} koinzidiert mit der Umkreismittle C_4 des Basisdreiecks und ist ein gemeinsamer Punkt des Euler-Geradenbildes $e' = C'M'$ von \mathbf{T} und der Eulergeraden $e_4 := C_4M_4$ des Basisdreiecks $(A_1A_2A_3)$. Liegt A'_4 nicht auf e_4 , dann sind e' und e_4 verschieden. Der Schwerpunkt G_4 von $(A_1A_2A_3)$ ist dann vom Normalriss G' des Schwerpunktes von \mathbf{T} ebenfalls verschieden.

Insgesamt bilden die sechs Punkte M', M_4, G', G_4, A'_4 und C' die Ecken eines vollständigen Vierseits und auf dessen Seiten “merkwürdige Teilverhältnisse”. Im Einzelnen gilt:

$$\begin{aligned} \text{TV}(C', M', G') &= -1, & \text{TV}(A'_4, M_4, M') &= -1, \\ \text{TV}(M_4, C', G_4) &= -2, & \text{TV}(A'_4, G_4, G') &= -3. \end{aligned}$$

Dieser Sachverhalt legt die Untersuchung von Punkt-Konfigurationen nahe, deren Geraden ausschließlich Punkt-tetripel mit ganzrationalem Teilverhältnis enthalten.

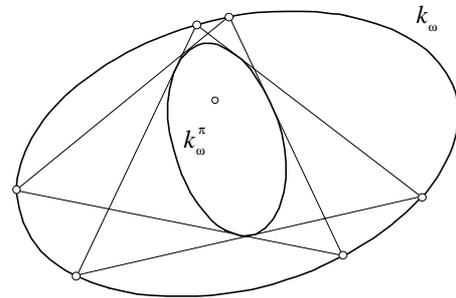
Bemerkung 5: Die Spurkurve k_4 der Trägerquadrik Ψ des Höhenregulus in der Ebene α_4 enthält die Punkte (A_1, A_2, A_3, A'_4) und k_4 ist wie jeder durch die Ecken eines Dreiecks und dessen Höhenschnittpunkt gehende Kegelschnitt eine *gleichseitige* Hyperbel, Figur 3. (Das durch die Punkte (A_1, A_2, A_3) und M_4 bestimmte Kegelschnittbüschel induziert nämlich auf der Ferngeraden seiner Ebene genau die von einer Rechtwinkel-Involution induzierte “absolute Involution” als DESARGUES-Involution.)



Figur 3: Die Spurkurve k_4 des Höhenregulus in der Facettenebene α_4 ist eine gleichseitige Hyperbel.

Auf Ψ existieren somit zu den Asymptoten von k_4 parallele Erzeugenden, die gemeinsam mit der Erzeugenden h_4 ein Tripel paarweise orthogonaler Erzeugenden bilden. Da alle Facettenebenen gleichberechtigt sind, liegen auf Ψ vier solche Tripel paarweise orthogonaler Erzeugenden.

Für den synthetischen Nachweis, dass damit eine einparametrische stetige Schar solcher Erzeugentripel existiert, ist es zweckmäßig, den Anschauungsraum durch die Fernebene ω projektiv abzuschließen und den Fernkegelschnitt k_ω von Ψ zu untersuchen, Figur 4.

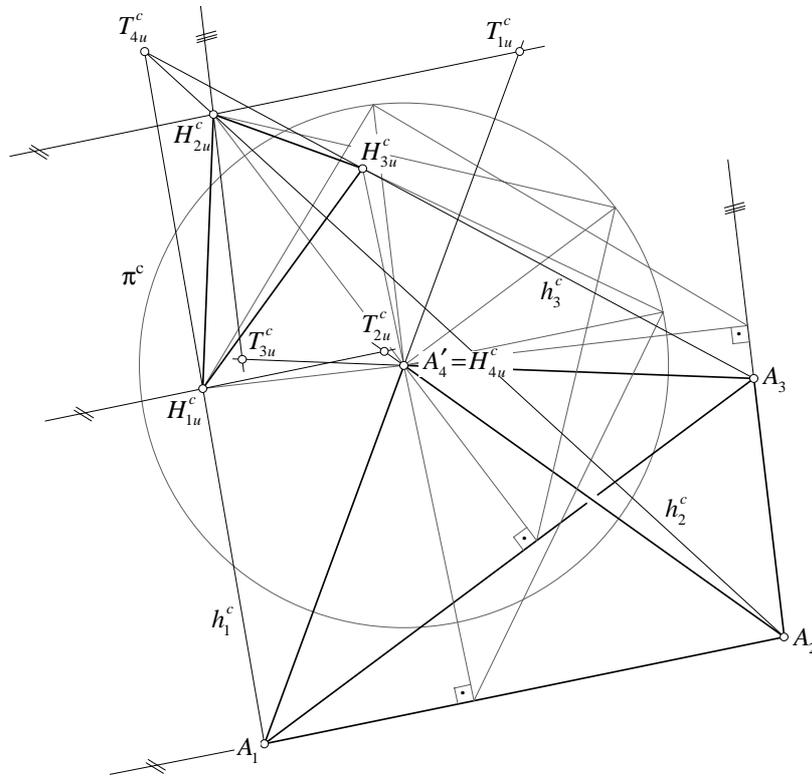


Figur 4: Der Fernkegelschnitt k_ω von Ψ und sein absolut-polarer Bildkegelschnitt k_ω^π als Kegelschnittpaar in ‘PONCELETscher Schließungslage’ für ein- und umbeschriebene Dreiecke.

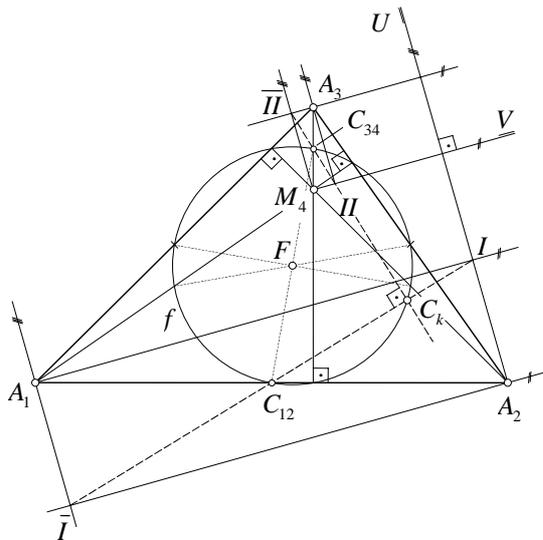
Die Orthogonalitätsstruktur des Anschauungsraumes induziert in ω eine elliptische Polarität π , die sogenannte “absolute Polarität”. (Im Zentralriss aus einem Augpunkt A auf eine Ebene α erscheint diese absolute Polarität π bekanntlich als “Antipolarität” π^c des Distanzkreises von A .) Demgemäß bilden die Fernpunkte der in Rede stehenden Erzeugentripel Poldreiecke in π . Wie jede Polarität sind π und k_ω bereits durch zwei solche Dreiecke bestimmt. Die Seiten dieser Dreiecke sind Tangenten eines zu k_ω absolut polaren Kegelschnittes k_ω^π , sodass das Paar (k_ω, k_ω^π) gemäß einem *poristischen Problem* von PONCELET eine stetige Schar von k_ω^π um- und k_ω einbeschriebenen, Dreiecken besitzt, die nun sämtlich auch Poldreiecke in π sind. Somit ist Ψ ein Hyperboloid mit einer stetigen Schar von Tripeln paarweise orthogonaler Erzeugenden, also ein gleichseitiges Hyperboloid. (Der Asymptotenkegel eines solchen Hyperboloides besitzt ebenfalls eine solche Schar orthogonaler Dreibeine, vgl. [19], [10].)

Bemerkung 6: Der zum Höhenregulus ergänzende Regulus enthält neben den schon betrachteten Normalen n_i durch die Höhenschnittpunkte der Facettendreiecke von \mathcal{T} noch weitere einfach zu konstruierende Erzeugenden: die durch die Ecken A_i legbaren Treffgeraden t_i der Höhen h_i .

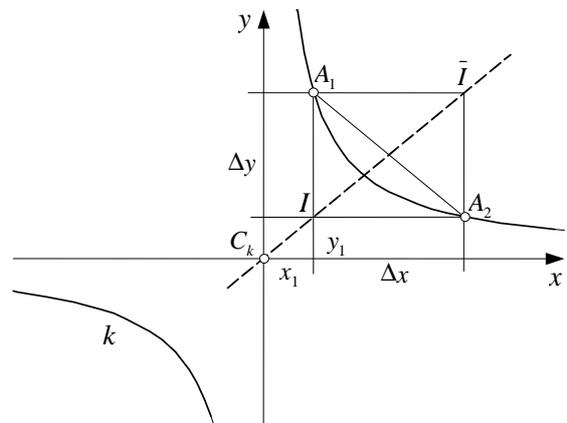
Im Zentralriss aus A_4 auf (A_1, A_2, A_3) erscheint Ψ als ein Punktepaar, bestehend aus dem Punkt A'_4 und dem Schnittpunkt T_4 der Zentralrisse $h_i^c := A_i H_{iu}^c$ der Höhen h_1, h_2, h_3 , vgl. Figur 5. Dabei repräsentiert $T_4 = T_{4u}^c$ den als “elliptischen Höhenschnittpunkt” von $(H_{1u}^c, H_{2u}^c, H_{3u}^c)$ deutbaren Zentralriss der Erzeugenden t_4 durch den Augpunkt A_4 . Die Erzeugende t_i entsteht als Schnitt der Verbindungsebenen $A_i \vee h_4$ und $A_i \vee h_j$. Das Spur-Fluchtpurpaar ersterer fällt in die Gerade $A_i A'_4$ das Spur-Fluchtpurpaar der zweiten besteht aus der Geraden $A_i A_j$ und der zu ihr parallelen durch H_{ju}^c , siehe Figur 5. Damit fällt der Spurpunkt T_i von t_i in A_i und der Fluchtpunkt in den Schnittpunkt T_{ju}^c der genannten Fluchtpuren.



Figur 5: Zentralprojektion des Tetraeders \mathbf{T} aus der Ecke A_4 auf (A_1, A_2, A_3) von \mathbf{T} . Der Fluchpunkt von h_4 fällt in A'_4 die übrigen Höhenfluchpunkte H_{ju}^c sind die Antipole der Seiten des Basisdreiecks (A_1, A_2, A_3) von \mathbf{T} . Die Dreiecke (A_1, A_2, A_3) und $(H_{1u}^c, H_{2u}^c, H_{3u}^c)$ sind perspektiv; das Perspektivitätszentrum ist der (projizierende) Zentralriss der durch A_4 gehenden Erzeugenden des ergänzenden Regulus zum Höhenregulus.



Figur 6a: Der Mittelpunkt jeder gleichseitigen Hyperbel durch ein Dreieck und dessen Höhenschnittpunkt liegt auf dem Feuerbach-Kreis dieses Punktsystems.



Figur 6b: Das zu einer Sehne einer Hyperbel k gehörige asymptotenparallele Parallelogramm besitzt eine durch den Mittelpunkt von k gehende Diagonale.

Bemerkung 7: Die Spurkurve k_4 der Trägerquadrik Ψ des Höhenregulus ist nach Bemerkung 5 eine gleichseitige Hyperbel durch das Viereck (A_1, A_2, A_3, M_4) und den Punkt A'_4 vgl. Figur 3. Man beachte dabei den

Hilfssatz :

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte durch ein Dreieck und dessen Höhenschnittpunkt liegen auf dem FEUERBACH-Kreis des Dreiecks.

Da in einem Punktsystem bestehend aus einem Dreieck und dessen Höhenschnittpunkt jeder Punkt Höhenschnittpunkt des Rest-Dreiecks ist, und jedes dieser Dreiecke ein und denselben FEUERBACH-Kreis f besitzt, sprechen wir im Folgenden vom FEUERBACH-Kreis des Punktesystems.

Zum Beweis von Hilfssatz 1 projiziert man die vier Grundpunkte des Büschels aus Fernpunkten U und V orthogonaler Richtungen. Dabei repräsentieren U und V die Asymptotenfernpunkte einer speziellen gleichseitigen Hyperbel k durch diese Grundpunkte, vgl. Figur 6a und Figur 6b.

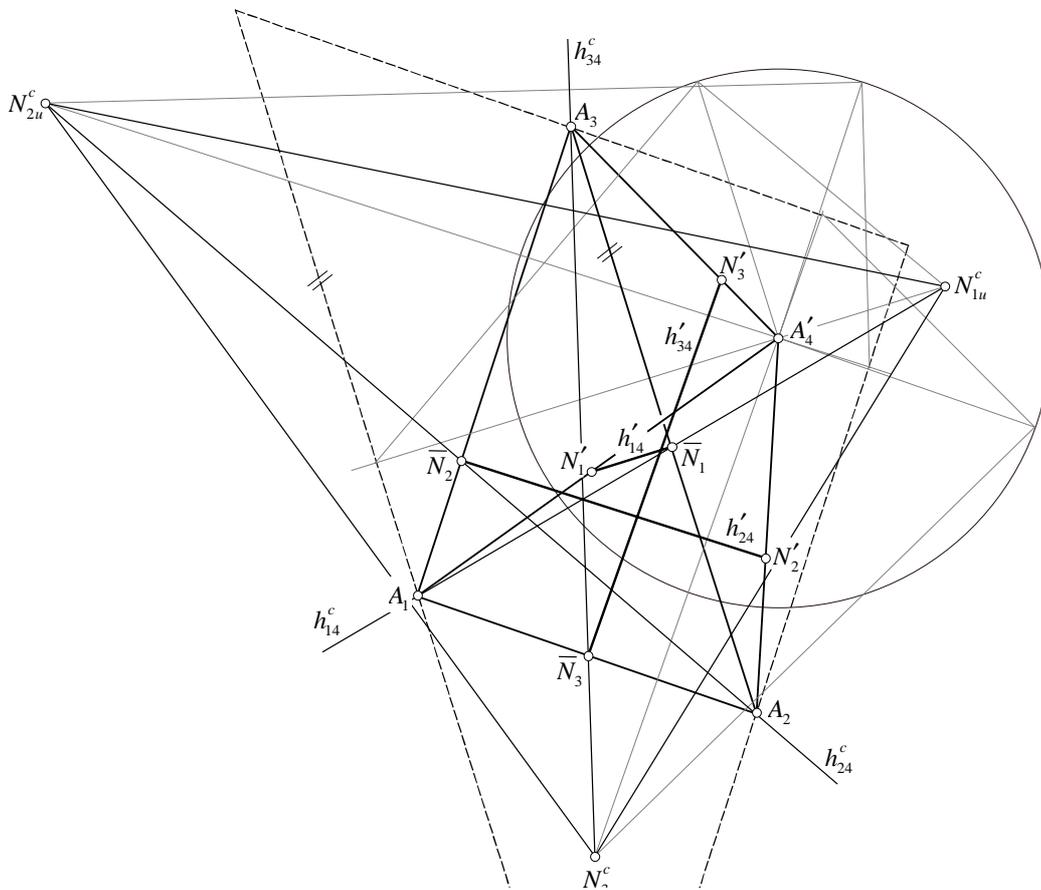
Zu einer Sehne $[A_1, A_2]$ gehörige Projektionsstrahlen geben Anlass zu einem Rechteck, vgl. Figur 6b, dessen zweite

Diagonale ein Durchmesser von k ist. (Mit den Bezeichnungen aus Figur 6b folgt dies unmittelbar aus $x_1(y_1 + \Delta y) = (x_1 + \Delta x)y_1 = \text{const.}$).

Für orthogonale Sehnen sind die entstehenden Rechtecke ähnlich und um $\pi/2$ gegeneinander verdreht. Deren "zweite" Diagonalen sind daher rechtwinklig und gehen durch die Sehnenmittelpunkte. Der Thaleskreis über der Sehnenmittenstrecke $[C_{12}, C_{34}]$ ist aber genau der FEUERBACH-Kreis zu dem aus den vier Sehnenendpunkten bestehenden Punktsystem (vgl. hierzu auch [12]). Der Schwerpunkt dieses Punktesystems fällt übrigens in den Mittelpunkt F des FEUERBACH-Kreises. \square

4 Die Kantenhöhen eines Tetraeders

Im Gegensatz zu den vier Eckenhöhen von \mathbf{T} , die liniengeometrisch abhängig sind und zu weiteren mit \mathbf{T} verknüpften Gebilden in besonderen Relationen stehen, (siehe [4], u.a.), scheinen die Gemeinnormalen der drei Gegenkantenpaare eines Tetraeders, also die Kantenhöhen h_{i4} nur wenige nennenswerten Eigenschaften zu besitzen.

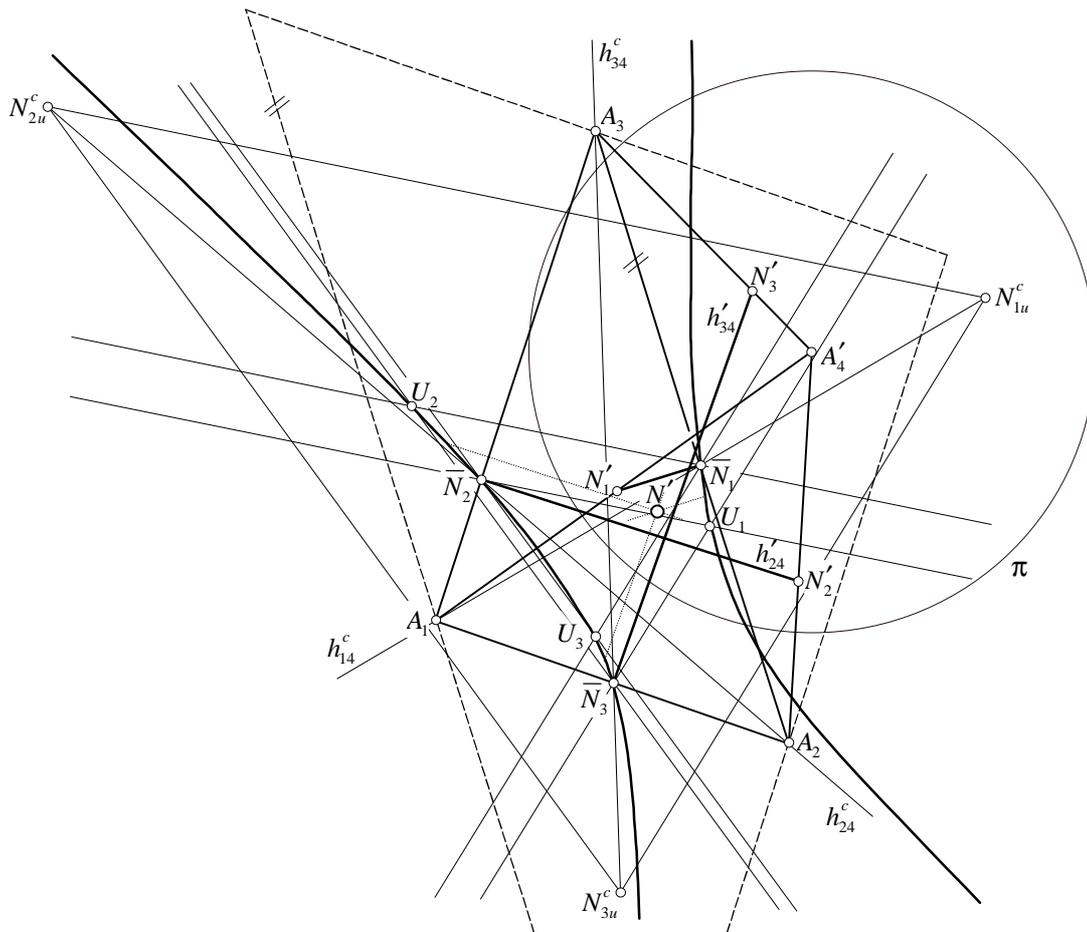


Figur 7: Konstruktion der Zentral- und Grundrisse der Kantenhöhen eines Tetraeders.

Für die konstruktive Behandlung erweist sich ebenfalls die oben verwendete Zentralprojektion aus der Tetraederrecke A_4 auf die Ebene α_4 der übrigen drei Ecken als zweckmäßig.

Die Spur der Richtebene ρ_i des Kantenpaares (A_iA_4, A_jA_k) verläuft durch A_i parallel zur Kante A_jA_k und fällt mit der Fluchtspur von ρ_i zusammen. Demnach ist das Fluchtpunktdreieck $(N_{1u}^c, N_{2u}^c, N_{3u}^c)$ der drei Kantenhöhen h_{i4} jenes Dreieck, welches bezüglich der Antipolarität π^c des Distanzkreises von A_4 antipolar zu dem Basisdreieck von \mathbf{T} seitenparallel umschriebenen Dreiseits ist, Figur 7. Folglich fallen die Zentralrisse h_{i4}^c der Kantenhöhen in die Verbindungsgeraden $A_iN_{iu}^c$, welche die Kante A_jA_k im Höhenfußpunkt \bar{N}_i schneidet. Der Grundriss von h_{i4} ist dann parallel zu $A_4'N_{iu}^c$ und schneidet den Grundriss der Gegenkante A_4A_i im Normalriss des Höhenfußpunktes N_i .

Bemerkung 8: Offenbar bilden die Zentralrisse der Kantenhöhen im allgemeinen Fall ein Dreieck (vgl. Figur 7), andernfalls müssten die Dreiecke $(N_{1u}^c, N_{2u}^c, N_{3u}^c)$ und $(A_1A_2A_3)$ perspektiv sein. Also sind die Kantenhöhen nicht für jedes Tetraeder \mathbf{T} kopunktal und spannen einen Regulus Φ auf. Zur Konstruktion des Mittelpunktes N von Φ gehen wir wie in Bemerkung 3 vor: Wir konstruieren die zu einer Kantenhöhe h_{i4} parallele Treffgerade u_i aller Kantenhöhen als Schnittgerade der Verbindungsebenen eines Höhenfernpunktes mit den beiden übrigen Höhen, vgl. Figur 8. Die Spurkurve k von Φ enthält die drei Spurpunkte \bar{N}_i der Kantenhöhen sowie die Spurpunkte U_i der zu ihnen parallelen Treffgeraden u_i und ist damit bestimmt. Das Zentralbild k_u^c der Fernkurve k_u von Φ besitzt mit k die selben Fernpunkte und ist durch diese und durch die Fluchtpunkte N_{iu}^c der Kantenhöhen festgelegt.



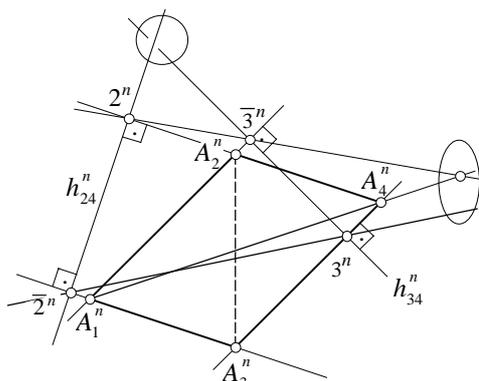
Figur 8: Konstruktion des Mittelpunktes N des Kantenhöhenregulus Ψ unter Benützung des Zentral- und Grundrisses der Kantenhöhen und der zu diesen parallelen Treffgeraden u_i aus dem ergänzenden Regulus.

Bemerkung 9: Auch für die Kantenhöhen ist die Diskussion sinnvoll, unter welchen Bedingungen der von den drei Kantenhöhen gebildete Regulus Φ ausartet oder eine Sonderform bildet.

Wir untersuchen im Folgenden den Fall schneidender Kantenhöhen.

Projiziert man ein Tetraeder T orthogonal auf eine Richtebene ρ zweier Kantenhöhen h_{24}, h_{34} , so muss T wegen des 'Satzes vom Normalriss eines rechten Winkels' als (vollständiges) Parallelogramm $T^n = (A_1^n, \dots, A_4^n)$ erscheinen. Die Kantenhöhenbilder h_{24}^n, h_{34}^n sind gewisse Normalen der parallelen Seitenpaare von T^n ; wir bezeichnen ihre auf den Tetraederkanten liegenden Fußpunkte mit $2, \bar{2}$ bzw. $3, \bar{3}$. Dann gilt, vgl. Figur 9.

Bedingung: Die Verbindung der Fußpunkte $2, \bar{3}$ auf den von A_2 ausgehenden Kanten A_1A_2, A_2A_4 trifft die Kante A_1A_4 in einem Punkt und dieser gehört der Verbindungsgeraden der anderen Fußpunkte $2, \bar{3}$ genau dann an, wenn h_{24} und h_{34} einander schneiden.



Figur 9: Normalprojektion eines Tetraeders auf eine Richtebene zweier schneidender Kantenhöhen.

Zur Realisierung dieser Bedingung fassen wir in Figur 10 das Kantenbild $A_1^n A_4^n$ als Perspektivitätsachse q zweier Parallelbüschel der Richtebene ρ auf, deren Richtungen s und t normal zu h_{24}^n bzw. zu h_{34}^n sind. Dann liegt $Q := 2^n \bar{3}^n \vee 3^n \bar{2}^n$ genau dann auf q , wenn für die Büschelgeraden s_Q bzw. t_Q gilt

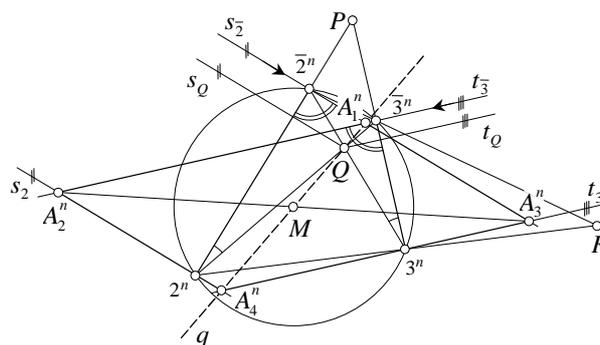
$$TV(s_2, s_{\bar{2}}, s_Q) = TV(t_3, t_{\bar{3}}, t_Q). \quad \oplus$$

Diese Bedingung \oplus kennzeichnet aber auch, dass die Dreiecke $(Q2^n\bar{2}^n)$ und $(Q3^n\bar{3}^n)$ ähnlich sind: Sie besitzen in Q gleiche Winkel und der Höhenfußpunkt auf der Q jeweils gegenüberliegenden Seite $(2^n, \bar{2}^n)$ bzw. $(3^n, \bar{3}^n)$ bildet mit deren Endpunkten gleiches Teilverhältnis, vgl. Figur 10. Daher stimmen auch die Winkel $\angle 2^n\bar{2}^n\bar{3}^n$ und $\angle \bar{2}^n2^n\bar{3}^n$ überein und \oplus ist gleichbedeutend damit, dass $(2^n, \bar{2}^n, 3^n, \bar{3}^n)$ ein Kreisviereck ist. Ist die Bedingung \oplus

erfüllt und legen wir die Richtebene ρ durch den Punkt 2 , so fallen $2, \bar{2}, 3, \bar{3}$ mit ihren Normalprojektionen zusammen. Somit gilt:

Satz 2 :

Ein Tetraeder T besitzt genau dann zwei schneidende Kantenhöhen, wenn ihre Fußpunkte im Normalriss auf die Richtebene dieser Höhen ein Kreisviereck bilden. (Diese Fußpunkte bilden dann dieses Kreisviereck.)



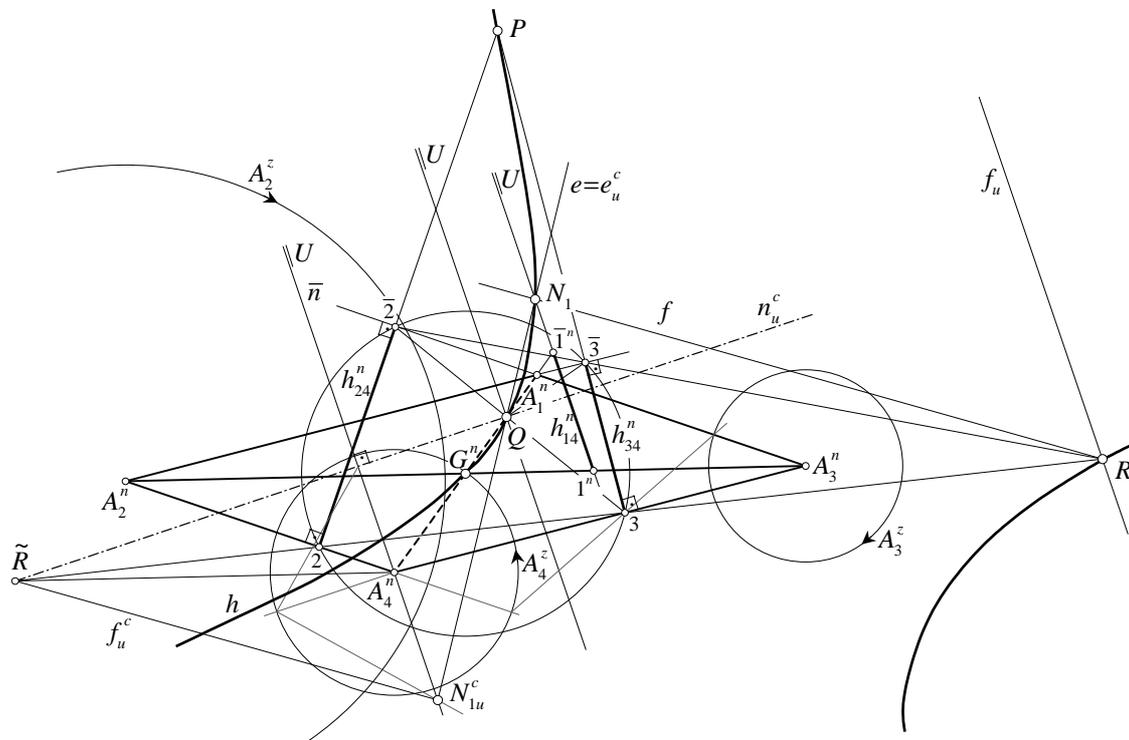
Figur 10: Normalprojektion eines Tetraeders auf eine Richtebene zweier schneidender Kantenhöhen.

Es interessiert die Lage der dritten Kantenhöhe im Fall eines schneidenden Kantenhöhenpaares.

Gibt man gemäß Satz 2 die Normalrisse zweier Kantenhöhen h_{24}, h_{34} auf deren Richtebene ρ durch den Punkt 2 zulässig vor, so sind die Normalrisse A_i^n der Tetraederecken A_i bestimmt. Gibt man dann noch den (orientierten) Distanzkreis $^2 A_i^z$ eines der Punkte A_i vor, so sind die (orientierten) Distanzkreise A_j^z der übrigen Ecken A_j mitbestimmt: z.B. sind A_4^z und A_3^z zentrisch ähnlich, wobei das Ähnlichkeitszentrum ein Diagonalmittelpunkt R des Fußpunktsvierecks der Höhen h_{24}, h_{34} ist. Für die Zykelpaare A_2^z, A_4^z bzw. A_3^z, A_4^z sind 2 bzw. 3 die Ähnlichkeitszentren, vgl. Figur 11. Damit kann die Tetraederkante A_2A_3 durch parallel verschoben werden. Ihr Spurpunkt \tilde{R} und der Spurpunkt Q von A_4A_1 spannen die Fluchtspur n_u^c der Richtebene des dritten Kantenpaares von T auf, wenn man wieder A_4 als Augpunkt einer Zentralprojektion auf ρ auffasst. Der Antipol dieser Fluchtspur bezüglich A_4^z ist somit der Fluchtspurpunkt N_{1u}^c der gesuchten Höhe h_{14} die wiederum als Treffergerade aus N_{1u} an A_1A_4 und A_2A_3 bestimmt wird, vgl. Figur 11:

Die Spur e und die Fluchtspur e_u^c der projizierenden Ebene $N_{1u} \vee (A_4A_1)$ fallen in die Gerade QN_{1u}^c ; die Ebene $N_{1u} \vee (A_2A_3)$ hat die Fluchtspur $f_u^c = \tilde{R}N_{1u}$ und die dazu parallele Spur f durch R , sodass sich der Spurpunkt N_1 von h_{14} im Schnitt von e und f findet. Variiert die Distanz von A_4 ,

²Wir benutzen also zusätzlich zum Normalriss auf die Richtebene ρ noch eine "Zyklographie" genannte Abbildung der Raumpunkte auf ihre orientierten Distanzkreise. Entsprechend heißt das zyklographische Bild eines Raumpunktes dessen "Bildzykel" und als Abbildungszeiger verwenden wir.



Figur 11: Konstruktion möglicher Tetraeder zu gegebenem Paar schneidender Kantenhöhen. Die dritte Höhe hat ihren Spurpunkt auf einer gleichseitigen Hyperbel durch die Diagonalepunkte des Fußpunktvierecks der schneidenden Höhen und den Mittelpunkt des Umkreises dieses Fußpunktvierecks.

so variiert der Spurpunkt N_1 der Höhe h_{14} als Erzeugnis projektiv gekoppelter Büschel um Q und um \tilde{R} auf einem Kegelschnitt. Dieser enthält die Diagonalepunkte des Fußpunktvierecks $(2, \bar{2}, 3, \bar{3})$ und den Mittelpunkt von dessen Umkreis. Letzterer ist Höhenschnittpunkt des Diagonaldreiecks; (vgl. hierzu auch [23, “Schmetterlingssatz”]), also ist der in Rede stehende Kegelschnitt eine *gleichseitige Hyperbel* h .

Da der Fluchtpunkt N_{1u}^c der Kantenhöhe h_{14} auf der zu n_u^c normalen Geraden \bar{n} durch A_4^n und mit dem zugehörigen Spurpunkt projektiv gekoppelt variiert, wobei der gemeinsame Fernpunkt U von \bar{n} und der Hyperbel h dabei selbstentsprechend ist, durchläuft h_1 ein *Paraboloid*.

Zusammenfassend gilt also

Satz 3 :

Es gibt zu vorgegebenem Paar von Kantenhöhen, deren Endpunkte ein Kreisviereck bilden, eine stetige Schar von Lösungstetraedern, die durch orthogonale perspektive Affinität auseinander hervorgehen. Die dritte Kantenhöhe variiert dabei auf einem Paraboloid, welches von der Ebene der beiden gegebenen Höhen nach einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten wird.

Bemerkung 10: Wir schließen nun eine Kennzeichnung derjenigen Tetraeder T an, deren drei Kantenhöhen einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Aus der Schnittbedingung für je zwei Kantenhöhen gemäß Satz 2 folgt, dass sämtliche Höhenfußpunkte einer einzigen Kugel angehören müssen:

- Die Höhenfußpunkte liegen nie sämtlich komplanar, andernfalls die drei Kantenhöhen eine Richtebene ρ besitzen müssten, wobei sich die Gegenkantenpaare von T bei Normalprojektion auf ρ in drei Paare paralleler Geraden projizieren. Ein vollständiges Viereck kann aber höchstens 2 Paare paralleler Gegenseiten haben.³
- Die Umkreise der vier Höhenfußpunkte von h_{14}, h_{24} und von h_{14}, h_{34} haben genau die Höhenfußpunkte $1, \bar{1}$ von h_{14} gemeinsam, liegen also sämtlich auf einer Kugel.
- Im Normalriss auf die Ebene $\rho_j = h_{i4} \vee h_{k4}$ fällt der Mittelpunkt \bar{N} dieser Kugel in den Mittelpunkt G^n des jeweiligen Tetraeder-Normalrisses, also stimmt \bar{N} mit dem Schwerpunkt G von T überein.

Diese im Augenblick konstruktive nicht verwertbare Eigenschaft ergänzen wir durch eine weitere mit folgender, die Figur 11 weitgehend wiederholenden Konstruktion in Figur 12: Wählen wir den Spurpunkt N_1 von h_{14} im

³In affinen Nicht-FANO-Ebenen ist diese Aussage falsch.

Schnittpunkt P der beiden anderen Höhen, so ergibt sich N_{1u}^c als Schnitt von \bar{n} mit $e = e_u^c = Q \vee P$.

Nun ist durch N_{1u}^c und n_u^c als Paar Antipol/Antipolare der Distanzkreis $A_4^z =: \pi$ von A_4 bestimmt und es erweist sich (Q, \tilde{R}, N_{1u}^c) als Antipoldreieck von π^c . Die Kanten A_1A_4 und A_2A_3 mit den bezüglich π konjugierten Fluchtpunkten Q bzw. \tilde{R} sind daher orthogonal!

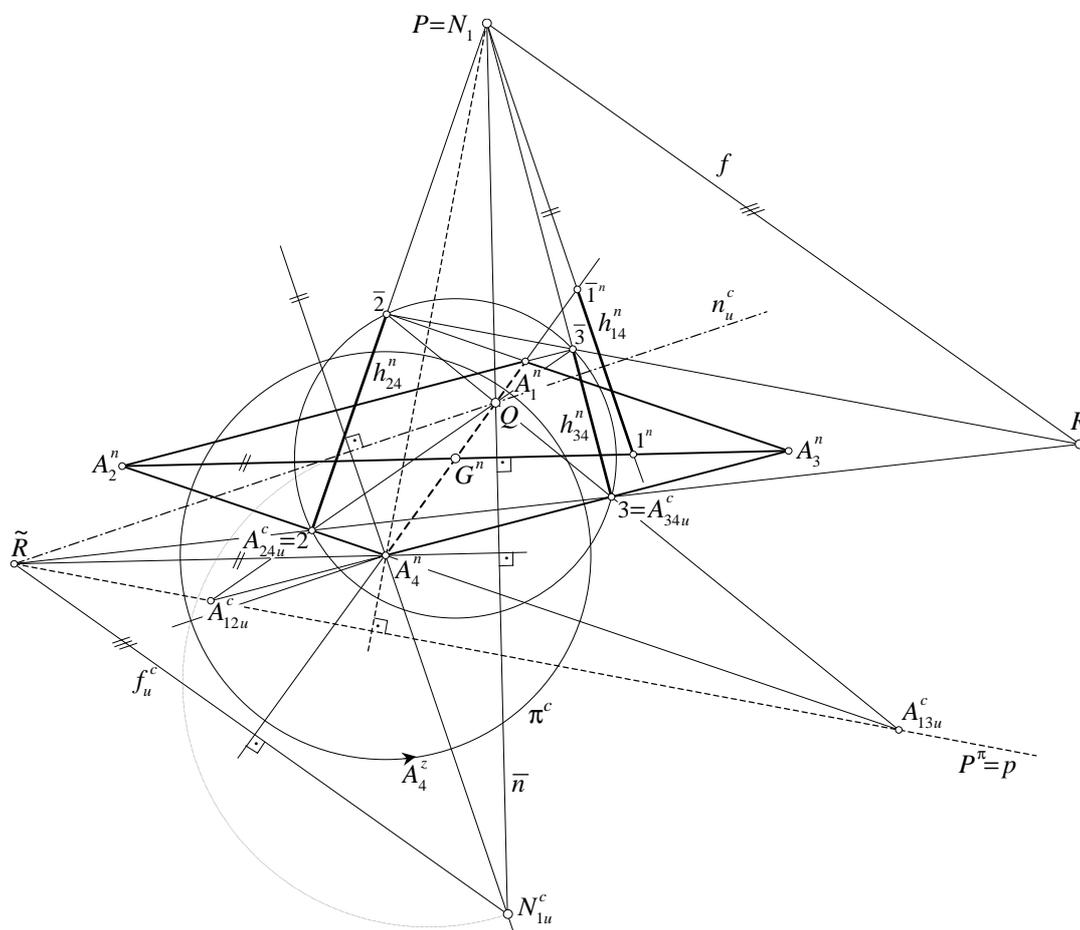
Aus analogen Überlegungen für die Richtebenen $\rho_1 = h_{24} \vee h_{34}$ und $\rho_2 = h_{34} \vee h_{14}$ folgt unmittelbar, dass auch die anderen beiden Kantenpaare Fluchtpunkte $2 = A_{24u}^c, A_{13u}^c$ bzw. $3 = A_{34u}^c, A_{12u}^c$ besitzen, die bezüglich π^c konjugiert sind. Somit besitzt \mathbf{T} drei Paare orthogonaler Gegenkanten und ist damit (bezüglich der Eckenhöhen) orthozentrisch. Umgekehrt besitzt jedes orthozentrische Tetraeder

auch kopunktale Kantenhöhen, wobei deren Schnittpunkt und der Schnittpunkt der Eckenhöhen zusammenfällt.

Zusammenfassend gilt

Satz 4 :

Ein Tetraeder \mathbf{T} besitzt genau dann drei kopunktale Kantenhöhen, (es heißt dann “kantenhöhen-orthozentrisch”), wenn es “eckenhöhen-orthozentrisch” ist, also drei Paare orthogonaler Gegenkanten besitzt. Für ein solches Tetraeder \mathbf{T} fallen der Schnittpunkt der Kantenhöhen und derjenige der Eckenhöhen zusammen, was die Bezeichnung “orthozentrisch” für \mathbf{T} rechtfertigt. Die Kantenhöhenfußpunkte gehören sämtlich einer im Schwerpunkt von \mathbf{T} zentrierten Kugel an.



Figur 12: Konstruktion eines Tetraeders mit kopunktalen Kantenhöhen.

Literatur

- [1] COUDERC, P.; BALLICcioni, A.: *Premier Livre du Tètraèdre*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.
- [2] COURT, N. A.: *On the theory of the tetrahedron*, Bull. Am. Math. Soc., **48** (1942), 583-589.
- [3] COURT, N. A.: *The biratio of the altitudes of a tetrahedron*, Duke Math. J., **13** (1946), 383-386.
- [4] COURT, N. A.: *The tetrahedron and its altitudes*, Scripta Math., **14** (1948), 85-97.
- [5] COURT, N. A.: *The semi-orthocentric tetrahedron*, Am. Math. Mon., **60** (1953), 306-310.
- [6] COURT, N. A.: *Modern Pure Solid Geometry*, Chelsea, 2nd edition, New York, 1964.
- [7] GERBER, L.: *The altitudes of a simplex are associated*, Math. Mag., **46** (1973), 155-157.
- [8] FRITSCH, R.: "Höhenschnittpunkte" für n -Simplizes, Elemente Math., **31** (1976), 1-8.
- [9] GRUENBERG, K. W.; WEIR, A. J.: *Linear Geometry*, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1977.
- [10] HAVLICEK, H.; WEISS, G.: *The Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadric Forms* (eingereicht).
- [11] KOMERELL, K.: *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes*, Koehler Amelang, Leipzig, 1953.
- [12] LAPINE, M.; LAPINE, M.: *Krivulja središta prame-na konika*, KoG **3** (1998), 35-40.
- [13] MANDAN, S. R.: *Altitudes of a simplex in n -space*, J. Aust. Math. Soc., **2** (1962), 403-424.
- [14] MANDAN, S. R.: *Uni- and demi-orthocentric simp-lexes. II*, J. Indian Math. Soc., n. Ser., **26** (1962), 5-11.
- [15] MANDAN, S. R.: *Altitudes of a general n -simplex*, J. Aust. Math. Soc., **5** (1965), 409-415.
- [16] MICULITA, M.: *On a property of the anticentre of a tetrahedron*, Gaz. Mat., Bucur., **93** (1988), 100-102.
- [17] ROSENFELD, B.A.; JAGLOM, I.M.: *Mehrdimen-sionale Räume*, In Alexandroff, P. S. and Markusch-witsch, A. I. and Chintschin, A. J. (ed.): *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Bd. V, VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1969.
- [18] SATYANARAYANA, K.: *The tetrahedron the feet of whose altitudes are coplanar*, Math. Stud., **50** (1982), 275-281.
- [19] SEMPLÉ, J.G.; KNEEBONE, G.T.: *Algebraic Pro-jective Geometry*, Oxford University Press, Oxford, 1998 (Reprint).
- [20] SCHRÖTER, H.: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivistischer Gebilde*, B.G. Teubner, Leipzig, 1880.
- [21] SLIEPČEVIĆ, A.: *Aus dem Erdgeschoß der höheren Geometrie*, KoG **5** (2000/01), 73.
- [22] SLIEPČEVIĆ, A.: *Eine Anwendung der perspektiven Kollineation*, KoG **5** (2000/01), 51-55.
- [23] SLIEPČEVIĆ, A.: *A generalisation of the butterfly theorem* (im Druck).
- [24] THIEME, H.: *Zur Geometrie des Tetraeders*, Z. Math. Phys., **27** (1882), 56-61.
- [25] WUNDERLICH, W.: *Ebene Kinematik*, B.I. Hoch-schultaschenbücher 447, 1970.
- [26] ZACHARIAS, M.: *Elementargeometrie und elemen-tare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Be-handlung*, In Meyer, W.Fr. and Mohrmann, H.: *Enzy-klopädie der Mathematischen Wissenschaften III 1.2*, B.G. Teubner, Leipzig, 1914-1931.

Gunter Weiss

Institute of Geometry

Dresden University of Technology

D-01062 Dresden

tel.: +49-351-463 37516, fax: +49-351-463 36027

e-mail: weiss@math.tu-dresden.de

URL: <http://www.math.tu-dresden.de/~weiss/index.html>**Hans Havlicek**

Institute of Geometry

Vienna University of Technology

Wiedner Hauptstraße 8-10/1133, A-1040 Wien

tel: +43-1-588 01 11330 fax: +43-1-588 01 11399

e-mail: havlicek@geometrie.tuwien.ac.at

URL: <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/>