

Matematički prikaz modela i primjene seizmičke tomografije

M. Arvanitis i B. D. Al-Anazi

PREGLEDNI ČLANAK

Nove su matematičke tehnike, poput vremena prijedena puta u seizmičkoj tomografiji, uvelike pridonijele unapređivanju metoda geofizičkih istraživanja. Zahvaljujući tim novim tehnikama, vrijeme potrebno za rješavanje inverznog problema znatno je smanjeno, što seizmičku tomografiju čini primjenjivom na veći broj problema, čak i trodimenzionalnih. Nove metode trasiranja puta zrake i valne fronte omogućuju fleksibilniju parametrizaciju. Napredak od tehnike najmanjih kvadrata na današnju metodu povratne projekcije unaprijedio je tomografske metode.

Ključne riječi: tomografija, trasiranje puta zrake, valna fronta, točke mreže, vrijeme prijedena puta

UVOD

Što znači riječ tomografija? Porijeklo vuče iz grčke riječi tomo, što znači režanj. U tomu leži osnovna ideja: prema teoremu centralnog presjeka²⁸, ako se načini veliki broj 2D presjeka, može se rekonstruirati cijelu 3D sliku nekog objekta. Zahvaljujući istom teoremu, lako se može načiniti 2D presjek iz 1D profila, što se može izmjeriti eksperimentima.

Tomografija seizmičkog vremena prijedena puta može se definirati kao rekonstrukcija modela brzine valova u zemljinoj kori, i to korištenjem odstupanja vremena putovanja seizmičkih valova od referentnoga modela brzina, poznatijem kao početni ili model pozadine. Početni model je prvi korak u procjeni modela brzina. Seizmička tomografija u današnjem obliku nastala je 1974. godine kao "3D inverzija". Seizmolozi su isprva bili vrlo skeptični glede nove metode i njezinih rezultata. Cjelokupno stajalište se dramatično promijenilo sredinom 80-ih godina prošloga stoljeća, kada su uvedene iterativne metode kako bi se olakšalo računanje velikih i slabo punjenih matrica koje se javljaju u seizmološkim podacima.^{6,23} Povjerenje u metodu povezano je s prvim globalnim rezultatima tomografije^{9,37,11}, koji su na zadovoljavajući način korelirali s geoidom. Kako je kredibilitet metode rastao, seizmolozi su je preimenovali u "3D inverziju", a to danas poznajemo pod imenom seizmička tomografija.

Seizmičku tomografiju možemo podijeliti u dvije glavne kategorije: tomografiju vremena prijedena puta i tomografiju amplitude. U ovom radu usredotočit ćemo se samo na tomografiju vremena prijedena puta. Uzevši u obzir prirodu seizmičkih valova, tomografija vremena prijedena puta može se podijeliti na tomografiju refrakcije, refleksije i difrakcije. S obzirom na izvor energije, bilo da se radi o prirodnom potresu ili o paljenju eksploziva, tomografiju dijelimo na pasivnu i aktivnu.

Seizmička tomografija je tehnika oslikavanja koja koristi seizmičke valove stvorene potresima i eksplozijama kako bi se stvorile kompjutorski generirane trodimenzionalne slike Zemljine unutrašnjosti. Na taj

način seizmolozi zaključuju o različitim slojevima u zemlji. Kako se to postiže? Vrijeme koje je potrebno da seizmički val prijeđe od mjesta nastanka potresa do seizmičke stanice, može se primijeniti pri izračunavanju brzine duž putanja seizmičke zrake. Koristeći vremena prvih nailazaka P valova snimljenih na seizmičkim stanicama diljem svijeta, znanstvenici mogu odrediti regije manjih ili većih brzina duboko u Zemlji.

Najjednostavniji slučaj u seizmičkoj tomografiji je određivanje brzine P vala. U tu je svrhu razvijeno nekoliko metoda, npr. tomografija refrakcijskog vremena prijedena puta, tomografija konačne frekvencije vremena prijedena puta, tomografija vremena prijedena puta refleksije, tomografija valnog oblika.³⁶

Da bi se dobila slika veće rezolucije, treba napustiti aproksimacije beskonačne frekvencije iz teorije zrake, koje su primjenjive na vrijeme početka vala, te umjesto toga korištenjem unakrsne korelacije izmjeriti vremena prijedena puta (ili amplituda) duž vremenskog okvira izvjesne duljine. Tomografija konačne frekvencije uzima u obzir učinke valne difrakcije, što omogućuje oslikavanje manjih objekata ili anomalija.²⁴

Putanje zraka zamijenjene su s volumetrijski osjetljivim jezgrama, često u svjetskoj tomografiji nazvanim 'banana krafna' jezgrama, jer njihov oblik može nalikovati banani, dok njihov poprečni presjek izgleda kao krafna, barem za direktne P i S valove s nultom osjetljivošću vremena prijedena puta na geometrijskoj putanji zrake. U tomografiji konačne frekvencije, anomalije vremena prijedena puta i amplitude ovise o frekvenciji, što dovodi do povećanja rezolucije.

Kako bi se podaci seizmograma maksimalno iskoristili, primjenjuje se tomografija valnog oblika. U ovom slučaju promatrani podaci su seizmogrami. U seizmičkom istraživanju model se obično ravna prema valnoj jednadžbi akustičnog vala. To je aproksimacija širenja elastičnog vala.³⁶ Tomografija elastičnog valnog oblika mnogo je složenija od tomografije akustičnog valnog oblika. Jednadžba gibanja akustičnog vala

(jednadžba akustičnoga vala) se numerički rješava određenim numeričkim postavkama, kao što je metoda konačnih razlika i metoda konačnih elemenata. U globalnoj tomografiji inverzni problem elastičnih valova može se riješiti združenim metodama.

PARAMETRIZACIJA

Razmotrimo dvije bliske točke u mediju - inverzija lokalne brzine vala pridružena ovim točkama je sporost. Postoje tri modela sporosti: homogene i heterogene ćelije (2D) ili blokovi (3D) konstantnih vrijednosti sporosti i pravokutne mreže s vrijednostima sporosti dodijeljenih točkama mreže s drugačijim interpolacijskim shemama kako bi se odredile vrijednosti između točaka mreže. Općenito uzevši, korištenje ćelija je najčešći oblik parametrizacije, no ovdje postoje određene poteškoće jer se ne mogu odrediti jasne granice između ćelija. Osim parametrizacije mreže, postoji i parametrizacija fine pravilne i nepravilne mreže. Koncept prve od ovih parametrizacija je isključivo tomografski, dok je druga parametrizacija bliža modeliranju. Pravilna mreža ima prednost zbog jednostavnosti, ali može izazvati prekomjernu parametrizaciju kada je potrebna visoka rezolucija. Kako bi se izbjegli takvi problemi, novije studije usredotočuju se na nepravilnu mrežu, koristeći Delaunayeve trokute ili Veronoieeve poligone.^{4,41} Vrijeme prijednog puta zrake je:

$$T = \int s_1/V(r) ds \tag{1}$$

Pritom je $V(r)$ nepoznata brzina za valni put S . Želimo odrediti $V(r)$ iz mjerenja N vremena prijednog puta. Neka je T_0 vrijeme prijednog puta za početni model:

$$T_0 = \int s_0 1/V_0(r) ds \tag{2}$$

Ako nismo sigurni u procjenu početnoga modela, možemo za izradu pouzdanog modela početne brzine koristiti tau-p metodu iz pikiranih vrijednosti vremena nailazaka.² Korištenjem Fermatova principa, može se zanemariti stvarna putanja zrake te umjesto nje koristiti putanju zrake iz početnoga modela. Vrijeme kašnjenja je:

$$\delta T = T - T_0 = \int s_1/V(r) ds - \int s_0 1/V_0(r) ds \approx \int s_0(1/V - 1/V_0) ds \approx - \int s_0(\delta V(r) - V_0(r)^2) ds \tag{3}$$

Pritom je:

$$\delta V(r) = V(r) - V_0(r) \tag{3a}$$

Jednadžba (3) sadrži sustav linearnih jednadžbi, koji se može promijeniti tako da bude prikladniji za kompjutorsku obradu.

Parametrizacija medija vrši se I interpolacijom funkcija h_i , što je baza potprostora Hilbertova prostora svih mogućih modela $V(r)$:

$$\delta V(r) = \sum_k \gamma_k h_k(r) \tag{4}$$

Ovdje k obuhvaća cijele brojeve od 1 do I , a funkcija γ_k je težina funkcije h_k . Uzevši u obzir parametrizaciju ćelije:

$h_i(r) = 1$, ako je r u ćeliji i te

$h_i(r) = 0$, ako je r drugdje (5)

jednadžba (3) sada se može definirati kao:

$$\delta T = \sum_k - \int s_0 [1/V_0(r)^2 \gamma_k h_k(r)] ds = \sum_k A_k \gamma_k \tag{6}$$

gdje je:

$$A_k = - \int s_0 [1/V_0(r)^2 h_k(r)] ds \tag{6a}$$

Jednadžba (6) može se formulirati za svako paljenje u matricnom obliku i u članovima za sporost kao:

$$Ms = t \tag{7}$$

Pritom je s vektor sporosti, t vektor vremena, a M je matrica za l_j , a l_j duljina i -te putanje zrake kroz j -tu ćeliju.

RJEŠENJE

Prije svega treba izračunati elemente matrice A_{ik} , što uključuje traženje putanje zrake. Obično se u seizmičkoj tomografiji koriste dvije metode za nalaženje putanje zrake: trasiranje putanje zrake i metode valne fronte. Metodom iscrtavanja putanje zrake s dvjema točkama pronalaze se putanje zraka duž kojih se širi seizmička energija i izračunava se vrijeme prijednog puta. Za uslojeni se medij trasiranje puta zraka postiže rješavanjem diferencijalnih jednadžbi korištenjem Runge-Kutta prediktor-korektor sheme. Za definiciju boljeg načina utvrđivanja geometrije zraka i sporosti postoje uglavnom dvije metode: paljenje i savijanje, obje potaknute trasiranjem puta zrake. Prva se zasniva na kontinuiranim iteracijama dok zraka ne zadovolji granični uvjet ili na interpolaciji između bliskih zraka uz primjenu Hermiteove kubne interpolacije.⁷ Druga metoda koristi parametrizaciju putanje zrake uz pomoć točaka V_i , B-spline krivulje (Bezier krivulje) trećeg reda. Lokacija zrake je funkcija četiriju najbližih točaka:

$$Q_i(u) = b_{-2} V_{i-2} + b_{-1} V_{i-1} + b_0 V_i + b_1 V_{i+1} \tag{8}$$

Pritom b_i ovisi o u , $0 \leq u \leq 1$ i poznat je za različite vrijednosti u . Kako bi se našlo koja od točaka V_i minimalizira vrijeme dobiveno formulom (1), potrebno je primijeniti metodu dvostrukoga konjugiranoga gradijenta (npr. Scales).³³ Červený⁵ koristi kvadratnu sporost $1/V^2$ umjesto sporosti jer ona daje najjednostavnije analitičko rješenje u nehomogenom mediju. Potonja tehnika uzela je u obzir nedostatke iscrtavanja putanje zrake, uključujući radove Zelta i Ellisa⁴⁹ koji su osmislili tehniku trasiranja putanje zrake s trapezoidalnom parametrizacijom, što omogućuje brzo izračunavanje vremena prijednog puta, te rad Sethiana i Popovic³⁴ koji su prezentirali tehniku "fast marching" kojom se mogu modelirati povratne zaokrenute zrake, ali s nezadovoljavajućom točnošću.

Metode valne fronte (površina jednakih vremena prijednog puta) su alternativne tehnike iscrtavanju putanje zrake. Tom metodom se pomoću širenja valne fronte na cijeli model određuju minimalne putanje zraka i vremena prijednog puta. Nedavni napredak metoda

iscrtavanja putanje zrake bio je više usredotočen na metode valne fronte nego na trasiranje putanje zrake, i to iz dvaju osnovnih razloga: trasiranje putanje zrake vrijedi samo za blage brzinske strukture i znatno je sporije od bilo koje metode valne fronte. Vidale^{43,42} je modificirao metodu valne fronte i rješavača eikonalne jednadžbe uvođenjem postupka konačnih razlika za širenje vremena prijednog puta kroz ravnomjerno uzorkovanu mrežu. Eikonalni rješavač pronalazi valnu frontu koja formira koncentrične ljuske oko izvora i upravlja putanjama zraka na osnovu njihova oblika. Nedostatak Vidalove metode²⁷ jest u tome što ona ne uspijeva u slučaju kada je razlika brzina reda

$$u_2 / u_1 > \sqrt{2} \quad (9)$$

Hole i suradnici¹⁴ modificirali su Vidalovu jednadžbu u bržu jednadžbu koja koristi promjenjive koordinate mreže. SPR (Shortest Path Ray-tracing) - najkraći put trasiranja putanje zrake, koji su prvobitno razvili Saito^{32,31} i Moser²⁰, proširuje valnu frontu na cijelu mrežu brzina, pa ona postaje stabilnija u odnosu prema razlikama brzina. Zhang i suradnici^{53,54} razvili su SPR metodu s grafičkim predloškom koji dopušta samo pravocrtne zrake unutar nepromjenjive ćelije. Tom se metodom brzo i sigurno izračunavaju putanje zraka i vremena prijednog puta na velikom broju mreža. U *konstrukciji valne fronte*^{44,45} cijela je valna fronta predstavljena trokutnom mrežom koja pruža zadovoljavajuću točnost uz primjenu dugotrajnih izračunavanja. Za trasiranje puta zraka⁵⁵ u mreži GRT povezuje prednosti *konstrukcije valne fronte* i metodu *fast marching* trasiranjem zraka unutar lokalne mreže. Metoda GRT je oko osam puta brža od bilo koje metode valne fronte.

Glavni nedostatak metoda valne fronte je taj što se njima izračunavaju samo prvi nailasci. Moser²⁰, Hole i Zelt¹³, Zhang i Toksöz⁵⁴ prilagodili su metodu, pa su računati i kasniji nailasci.

Rješenje jednadžbe (7) je izazovno. Uz korištenje stvarnih podataka uvijek postoji mogućnost da nijedna zraka ne presijeca ćeliju (*ill-posed* sustav). Drugi problem je količina podataka koji se koriste pri tehnici iterativnog rješavanja ili inverzije. Rane metode tomografije su za rješavanje dobivenog sustava jednadžbi koristile egzaktne tehnike najmanjih kvadrata, ali dolazilo je do ograničenja modela (zbog ograničenih mogućnosti kompjutera) zbog velikog broja nepoznanica, reda veličine oko 1 000. To nije prevelik broj ili nije kao onaj s kojim se radi danas, npr. tomografske analize Zelta i Bartona⁴⁷ obuhvaćaju više od 50 000 vrijednosti vremena prijednog puta. Kako bi se savladale te poteškoće, uveden je iterativni postupak rješenja u obliku matrice. McMehan¹⁸ te Neumann-Denzau i Behrens¹⁰ unaprijedili su stariju Kaczmarcovu iterativnu metodu i preimenovali je u ART (Algebraic Reconstruction Technique). Ta metoda je za seizmičku tomografiju bila loša i ekstremno spora. Gilbert¹⁰ je pronašao djelotvorniji postupak i nazvao ga SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique). Oba postupka, ART i SIRT, primjenjivi su uglavnom kada se pikseli ili vokseli (trodimenzionalni pikseli) koriste kao bazne funkcije (5). Obje tehnike za rješavanje sustava jednadžbi koriste

povratnu projekciju na iterativni način. Povratna projekcija je iterativni proces za procjenu srednje sporosti. Umjesto povratne projekcije rezidualnih vremena prijednog puta duž puteva zraka uvedene su druge formulacije povratne projekcije faznih reziduala duž puteva valova³⁵, koje uzimaju u obzir učinke konačne frekvencije u podacima vremena prijednog puta.

U cilju rekonstrukcije brzina i granica razdvajanja rješavamo regularizirani inverzni problem. Izravno modeliranje metodom pokušaja i pogreška je dugotrajan i težak proces koji ne uspijeva dati procjenu parametra neodređenosti i rezolucije, ali to čini inverzija. Općenito rečeno, nelinearni sustav jednadžbi (7) se linearizira ako pretpostavimo da je brzina strukture podijeljena s obzirom na referentni ili početni model, za koji se pretpostavlja da je poznat, i nepoznati poremećaj za koji se pretpostavlja da je vrlo malen. U slučaju da se radi o nelineariziranom modelu, rješenje će biti neovisno o parametrizaciji modela, pa se koristi metoda Tikhonova⁴⁰ radi rekonstrukcije modela s Laplaceovim operatorom. U širem smislu, za uređeni se problem mogu invertirati različiti tipovi podataka (tj. refleksije, refrakcije, bušotinski podaci, što je poznato kao skupna izotropnost) za bolje djelovanje i različite vrste parametara modela (tj. sporost, geometrija reflektora). Cilj regularizirane inverzije je minimalizacija parametra kompenzacije koji se odnosi na neprilagođene podatke. U početnim problemima tomografije glavna je briga bila prilagođavanje podataka (Jackson, 1972), ali nove studije dokazuju da se podaci mogu podesiti za svaku malu vrijednost neprilagođenosti, sukladno ograničenjima parametara modela, iako rješenje možda nije fizički konzistentno.³⁸ S obzirom na to da je najvažnija mana inverzije njena nejednoznačnost³⁰ koja dovodi do višestrukih rješenja problema, glavna je pozornost usmjerena na iznalaženje stabilnoga i jednoznačnog rješenja koje neće dati nepotrebne strukture. Prilagođavanje vremena prijednog puta prema kriteriju najmanjih kvadrata ne može uvijek dati najbolje rješenje, iako većina tomografskih metoda primjenjuje neku varijantu osnovne metode najmanjih kvadrata odabirom modela koji minimalizira određenu veličinu greške vremena prijednog puta, npr. metodom prigušenih najmanjih kvadrata¹⁷, metodom stabiliziranoga konjugiranoga gradijenta, algoritma bikonjugiranoga gradijenta, LSQR²⁵ itd. Drugi koncept⁵⁴ je regularizacija srednje sporosti (vrijeme prijednog puta podijeljeno s duljinom zrake) i prividne sporosti (vrijeme prijednog puta derivirano s obzirom na površinsku udaljenost), a onda vremena prijednog puta, ili pak primjenom ograničenog izgladivanja ili derivativnih operatora za pronalaženje najjednostavnije strukture koja prilagođuje podatke u okviru određene tolerancije.

Opće je prihvaćeno mišljenje da 2D seizmička inverzija može dati pogrešnu sliku podzemlja²¹, pa su potrebne 3D inverzije kako bi se dobila bolja predodžba. U posljednjim dvama desetljećima razvijene su trodimenzionalne seizmičke metode, ali su prethodne studije^{39,15} bile suočene s više problema zbog ograničenja računalnih resursa i stupnja prekrivanja podataka. Zelt⁴⁸ je simultano invertirao refrakcijsko i refleksijsko

vrijeme prijednog puta kako bi dobio trodimenzionalni početni model. Novim dostignućima u 3D refrakcijskim metodama^{49,3,8,12} djelomično su riješeni mnogi problemi iz prošlosti, ali je pred nama još dug put, npr. još uvijek se javljaju poteškoće u slučaju kada postoje velike razlike u brzinama, pa se ne mogu riješiti brzine valova u glavnom refraktoru.¹⁶

ZAKLJUČCI

Pomoću novih matematičkih metoda seizmička tomografija razvila se u često korištenu tehniku koja pokriva širok spektar aplikacija, od globalne tomografije do površinske geofizike. Osnovni problem tomografije je inverzija matrica. Potrebna preciznost i zahtjevi današnje tehnike od nas traže rješenje sustava s više od 10 000 nepoznanica. Inverzija takvih matrica ne može se pouzdano izvesti konvencionalnim tehnikama, pa su uvedene nove metode inverzije poput, npr. SIRT-a. Danas se za suočavanje sa sličnim problemima koriste suvremene tehnike povratne projekcije. U posljednje vrijeme mnogi su naponi usmjereni ka naprednijim metodama, poput inverzije upotrebom genetskih algoritama.



Autori:

Michael Arvanitis, Geomorph Instruments, Greece, mike@geomorph.gr

Bandar Duraya Al-Anazi, King Abdulaziz City for Science & Technology, Saudi Arabia, bandar.alanazi@gmail.com

UDK : 550.8 : 550.34 : 51

550.8 geološka istraživanja
550.34 seizmologija
51 matematika