Primjena Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji

Ilija Ilišević*

Sažetak. *U radu je obrađena Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost. Spomenuta nejednakost primijenjena je na rješavanje različitih zadataka namijenjenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *nejednakosti, Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost*

Abstract. *The article deals with the Cauchy–Schwartz–Buniakowsky inequality. The mentioned inequality is applied to solving various tasks designed for high-school pupils.*

Key words: *inequalities, Cauchy–Schwartz–Buniakowsky inequality*

Nejednakost o kojoj će biti riječi zove se Cauchyjeva[1] ili Cauchy–Schwartzova[2] ili Cauchy–Buniakowsky[3] ili Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeva nejednakost. Usvojit ćemo posljednji naziv (kraće, CSB-nejednakost). Izreći ćemo ovu nejednakost, dokazati je i primijeniti na nekoliko geometrijskih zadaća.

Teorem [CSB-nejednakost]. *Neka su $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big). \tag{1}$$

Pri tome jednakost u (1) *vrijedi ako i samo ako su n-torke razmjerne, tj. ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.*

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x \\ &\quad +(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)x^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)x + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

[1] A. L. Cauchy (1789–1857), francuski matematičar

[2] H. A. Schwartz (1843–1921), njemački matematičar

[3] V. J. Buniakowsky (1804–1889), ukrajinski matematičar

Kako je ova funkcija nenegativna ($f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$), njena diskriminanta D ne može biti pozitivna, tj.

$$D = 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 - 4 \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) \leq 0,$$

odakle slijedi tražena nejednakost (1).

Iz (2) zaključujemo da jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako postoji realan broj m takav da je $b_k = ma_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, tj. ako su n-torke $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ razmjerne. □

Riješimo sada nekoliko zadataka.

Zadatak 1. *Neka su a, b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

Rješenje. Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (ab + bc + ca)^2 \\ \leq\; & (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) \\ =\; & (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (c^2 + c^2)^2 = (2c^2)^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi $ab + bc + ca \leq 2c^2$. Primijetimo da u prethodnoj nejednakosti ne može stajati znak jednakosti jer trojke (a, b, c) i (b, c, a) nisu razmjerne. Naime, kada bi one bile razmjerne, postojao bi neki realan broj m takav da je

$$a = mb, \qquad b = mc, \qquad c = ma.$$

Tada bismo imali

$$c^2 = m^2 a^2 = m^2(m^2 b^2) = m^4 b^2 = m^4(m^2 c^2) = m^6 c^2,$$

odakle bi slijedilo $m = 1$, a onda $c = a$, što bi bilo u suprotnosti s Pitagorinim poučkom. Dakle, vrijedi stroga nejednakost.

Zadatak 2. *Neka je T točka unutar trokuta ABC i neka su x, y, z redom udaljenosti te točke od stranica a, b, c trokuta. Neka je R polumjer trokutu opisane kružnice. Dokažite da vrijedi*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan, a točka T središte trokutu upisane kružnice.

Rješenje. Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \\
= \;& \left(\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{by}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{cz}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 \\
\leq \;& \left((\sqrt{ax})^2+(\sqrt{by})^2+(\sqrt{cz})^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right) \\
= \;& (ax+by+cz)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \leq \sqrt{ax+by+cz}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{1}{a}}}=\frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{1}{b}}}=\frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{1}{c}}}$$

što je ekvivalentno sa $a^2x=b^2y=c^2z$. Kako je $ax+by+cz=2P$ i $P=\frac{abc}{4R}$, gdje je P površina trokuta ABC, to je $ax+by+cz=\frac{abc}{2R}$, pa imamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \\
\leq \;& \sqrt{\frac{abc}{2R}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\
= \;& \sqrt{\frac{abc}{2R}}\cdot\sqrt{\frac{bc+ac+ab}{abc}}=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{2R}}.
\end{aligned}$$

Dalje, opet prema CSB-nejednakosti dobivamo

$$\sqrt{ab+bc+ca}\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, tj. $a=b=c$. Konačno imamo

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^2x=b^2y=c^2z$ i $a=b=c$, a to je ako i samo ako je $a=b=c$ i $x=y=z$. Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan, a točka T središte kružnice upisane u taj trokut.

Zadatak 3. *Uz uvjete zadatka 2, dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Rješenje. Najprije dokažimo nejednakost $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$. Prema poučku o sinusima je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, pa je

$$\begin{aligned}
& a^2+b^2+c^2 \\
= \;& 4R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) \\
= \;& 4R^2\Big(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1-\cos 2\beta}{2}+1-\cos^2\gamma\Big) \\
= \;& 4R^2\big(2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\big) \\
= \;& 4R^2\big(2-\cos(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\alpha\cos\beta\big) \\
= \;& 4R^2(2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = 8R^2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).
\end{aligned}$$

Ako je trokut ABC tupokutan, onda je ili $\cos\alpha < 0$, ili $\cos\beta < 0$, ili $\cos\gamma < 0$, pa je $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 0$ i stoga $a^2+b^2+c^2 < 9R^2$. Za pravokutan trokut je $a^2+b^2+c^2 = 8R^2$. Neka je trokut ABC šiljastokutan. Tada su $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma > 0$, pa prema nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^3.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
& \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \;& 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \le 2\sin\frac{\gamma}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
= \;& \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Big(1-2\sin\frac{\gamma}{2}\Big)^2 \le \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

to je

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Slijedi

$$a^2+b^2+c^2 \le 8R^2\Big(1+\frac{1}{8}\Big) = 9R^2.$$

Primjenom prethodnog zadatka zaključujemo

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{\frac{9R^2}{2R}} = 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan, a točka T središte trokutu upisane kružnice.

Zadatak 4. *Neka su a, b, c duljine stranica, a t_a, t_b, t_c redom duljine težišnica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$at_a+bt_b+ct_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Rješenje. Prema CSB-nejednakosti je

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2).$$

Kako vrijedi

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(vidjeti [2]), to je

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \le \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

odakle slijedi

$$at_a + bt_b + ct_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{t_a} = \frac{b}{t_b} = \frac{c}{t_c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, a to je ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Zadatak 5. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, a a_1, b_1, c_1 duljine stranica trokuta $A_1B_1C_1$. Dokažite da je $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ako i samo ako vrijedi*

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)}.$$

Rješenje. Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})^2 \\ \le\ & \big((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\big)\big((\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{b_1})^2 + (\sqrt{c_1})^2\big) \\ =\ & (a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1), \end{aligned}$$

pa je

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} \le \sqrt{(a + b + c)(a_1 + b_1 + c_1)}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, odnosno ako i samo ako je $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Zadatak 6. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \ge 1.$$

Rješenje. Dokažimo najprije da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Iz $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$ slijedi

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Big),$$

pa je

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\Big(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\Big)\\ = & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}})=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\\ = & \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=1. \end{aligned}$$

Kako je prema CSB-nejednakosti

$$\begin{aligned} & \Big(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big)^2\\ \le & \Big(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\Big)\Big(\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\Big)\\ = & \Big(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\Big)^2, \end{aligned}$$

to je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ge 1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

a to je ako i samo ako je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ odnosno $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Zadatak 7. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a s njegov poluopseg. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{8s}.$$

Rješenje. Prema CSB-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & \Big(\frac{\sqrt{a}}{b+c}\cdot\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}\cdot\sqrt{b}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\cdot\sqrt{c}\Big)^2\\ \le & \Big(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\Big)(a+b+c), \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{1}{a+b+c}\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)^2.$$

Dokažimo sada da je

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Prema nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine je

$$\frac{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{(b+c)+(c+a)+(a+b)},$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Kako je

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3,$$

to je

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq (a+b+c)\cdot\frac{9}{2(a+b+c)}-3,$$

tj.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

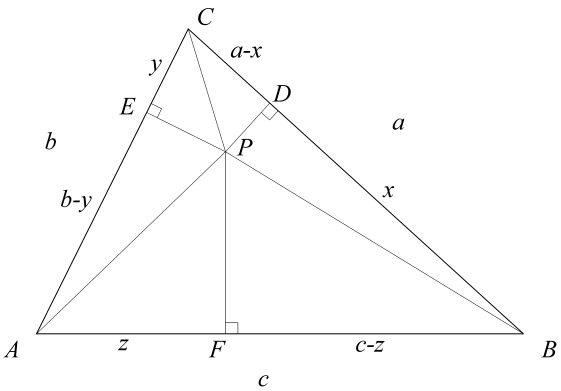
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$. No, $a+b+c=2s$, pa konačno imamo

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2s}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8s}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Zadatak 8. *Neka je dan trokut ABC i točka P unutar njega. Neka su D, E i F redom nožišta okomica iz točke P na pravce BC, CA i AB. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2 \leq 4\big(|AF|^2+|BD|^2+|CE|^2\big).$$



Slika 1.

Rješenje. Neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AF| = z$, $|BD| = x$ i $|CE| = y$. Tada je $|FB| = c - z$, $|DC| = a - x$, $|EA| = b - y$ (*Slika 1*).
Primijenimo Pitagorin poučak na trokute PBD i BPF :

$$|PB|^2 = x^2 + |PD|^2,$$

$$|PB|^2 = (c - z)^2 + |PF|^2,$$

odakle je

$$x^2 + |PD|^2 = (c - z)^2 + |PF|^2. \tag{3}$$

Analogno iz trokuta CPD i PCE odnosno APE i PAF dobivamo

$$y^2 + |PE|^2 = (a - x)^2 + |PD|^2, \tag{4}$$

$$z^2 + |PF|^2 = (b - y)^2 + |PE|^2. \tag{5}$$

Zbrajanjem (3), (4) i (5) dobivamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

odakle je

$$ax + by + cz = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Kako je prema CSB-nejednakosti

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

to je

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2),$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$, a to je ako i samo ako su D, E i F polovišta stranica trokuta i stoga P središte trokutu ABC opisane kružnice.

Literatura

[1] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.

[2] I. ILIŠEVIĆ, *Čebiševljeva nejednakost*, Osječka matematička škola **2**(2004), 65–75.

[3] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[4] D. S. MITRINOVIĆ, J. PEČARIĆ, *Hölderova i srodne nejednakosti*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.