STUDENTSKA RUBRIKA

Udaljenost točke do krivulje

IVANA KUZMANOVIĆ*

Sažetak. *U ovom članku razmatra se metoda računanja udaljenosti točke do eksplicitno, parametarski, te polarno zadane krivulje. U literaturi za ovaj problem postoji eksplicitno rješenje za slučaj afine funkcije, te za još neke specijalne slučajeve.*

Ključne riječi: *udaljenost, krivulja, minimizacija*

Abstract. *This article considers the method for calculating the distance of a point to the curve given explicitly, in parameter and polar form. In literature, there exists an explicit solution to this problem for the case of affine fuctions as well as for some other special cases.*

Key words: *distance, curve, minimization*

1. Udaljenost točke do grafa eksplicitno zadane funkcije

Neka su dane točke ravnine $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$. L_1 udaljenost točaka T_1 i T_2 definiramo kao

$$d_1(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

L_2 (euklidska) udaljenost dana je s

$$d_2(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Za udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ do krivulje uzima se najkraća udaljenost između točke T_0 i točaka na krivulji. Preciznije:

Neka je dana točka $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i neprekidna funkcija $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. Želimo odrediti L_1 i L_2 udaljenost točke T_0 do grafa funkcije f. Taj problem se svodi na određivanje točke $T_p^* = (x_p^*, f(x_p^*)) \in \Gamma_f$ takve da je

$$d_p(T_0, T_p^*) = \min_{T \in \Gamma_f} d_p(T_0, T),$$

odnosno na rješavanje problema globalnog minimuma funkcije jedne varijable, tj. treba pronaći točku $x_p^* \in \mathbb{D}$, tako da bude

$$\min_{x \in \mathbb{D}} \phi_p(x) = \phi_p(x_p^*), \tag{1}$$

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: `ikuzmano@mathos.hr`

gdje je

$$\phi_p(x) = \begin{cases} |x - x_0| + |f(x) - y_0| & , p = 1 \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2} & , p = 2 \end{cases} .$$

Tada je $d_p(T_0, \Gamma_f) = d(T_0, T_p^*)$. Ovaj problem je već razmatran u [3].

Lako se može vidjeti da ako neprekidna funkcija $\psi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}_0^+$ postiže svoj minimum u točki x^*, da tada funkcija $\phi(x) = \sqrt{\psi(x)}$ također postiže svoj minimum u točki x^*. Zato ćemo umjesto minimizacije funkcije ϕ_p minimizirati jednostavniju funkciju

$$\psi_p(x) = \begin{cases} |x - x_0| + |f(x) - y_0| & , p = 1 \\ (x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2 & , p = 2 \end{cases} . \tag{2}$$

Primjer 1. Udaljenost točke do grafa logističke funkcije

Neka je $f(x) = \dfrac{5}{1 + 5e^{-2x}}$. Odredimo L_1 i L_2 udaljenost točke $T_0 = (2, 3)$ do grafa funkcije f.

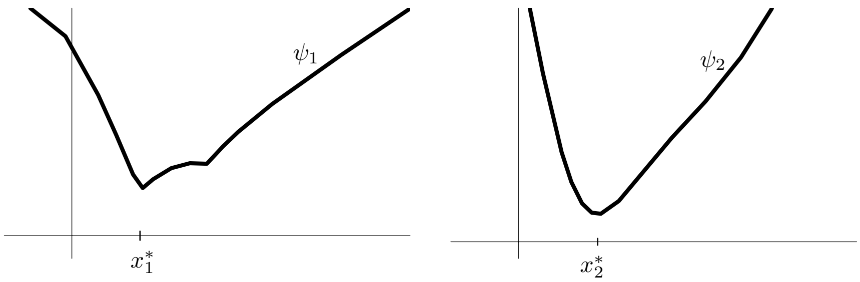
Treba pronaći točku $x_p^* \in \mathbb{R}$ koja je rješenje problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \psi_p(x) = \psi_p(x_p^*), \qquad p = 1, 2$$

gdje je

$$\psi_p(x) = \begin{cases} |x - 2| + \left|\dfrac{5}{1 + 5e^{-2x}} - 3\right| & , p = 1 \\[2ex] (x - 2)^2 + \left(\dfrac{5}{1 + 5e^{-2x}} - 3\right)^2 & , p = 2 \end{cases} .$$

Na Slici 1. prikazani su grafovi funkcija ψ_1 i ψ_2.

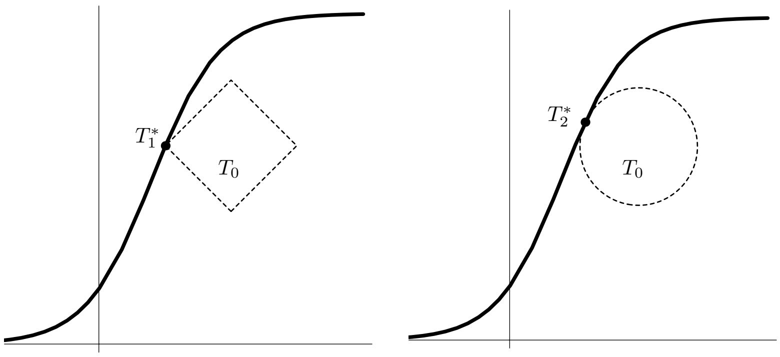


Slika 1. Grafovi funkcija ψ_1 i ψ_2

Udaljenost točke T_0 do grafa Γ_f pri tome iznosi

$$d_p(T_0, \Gamma_f) = \begin{cases} \psi_1(x_1^*) & , \ p = 1 \\ \sqrt{\psi_2(x_2^*)} & , \ p = 2 \end{cases} .$$

Na Slici 2. prikazan je graf funkcije f, točka T_0 i njezine L_1 i L_2 projekcije $T_p^* = (x_p^*, f(x_p^*))$, $p = 1, 2$.[1]



Slika 2. L_1 i L_2 projekcije točke T_0

Napomena: Točka T_p^* je dirālište krivulje Γ_f i kugle u L_p metrici sa središtem u T_0 polumjera $d_p(T_0, \Gamma_f)$. (Slika 2.)

2. Udaljenost točke do parametarski zadane krivulje

Neka je dana točka $T_0 = (x_0, y_0)$ i krivulja Γ zadana u parametarskom obliku

$$\Gamma = \{(f_x(t), f_y(t)) : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Da bi odredili L_1 i L_2 udaljenost točke T_0 do krivulje Γ, slično kao u prethodnom slučaju, treba pronaći $t_p^* \in [t_1, t_2]$ tako da bude

$$\min_{t\in[t_1,t_2]} \psi_p(t) = \psi_p(t_p^*), \tag{1}$$

gdje je

$$\psi_p(t) = \begin{cases} |f_x(t) - x_0| + |f_y(t) - y_0| & , p = 1 \\ (f_x(t) - x_0)^2 + (f_y(t) - y_0)^2 & , p = 2 \end{cases} . \tag{2}$$

Tada je

$$d_p(T_0, \Gamma) = \begin{cases} \psi_1(t_1^*) & , p = 1 \\ \sqrt{\psi_2(t_2^*)} & , p = 2 \end{cases} .$$

Pri tome je točka projekcije dana s $T_p^* = (f_x(t_p^*), f_y(t_p^*))$.

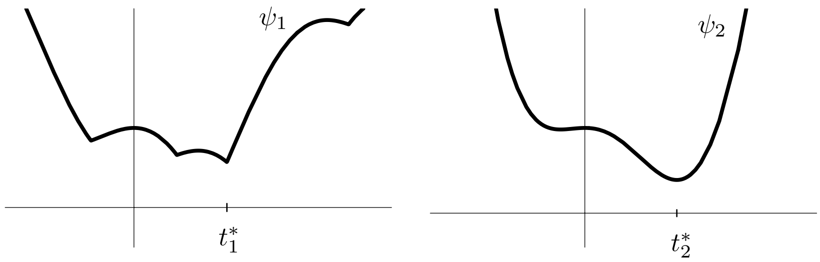
[1]Svi grafovi su izrađeni u programskom paketu *Mathematica*. Za minimizaciju funkcija korištena je *Mathematica* funkcija FindMinimum (vidjeti [4]).

Primjer 2. Zadana je točka $T_0 = (1.5, 0.5)$ i cikloida $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in [0, 2\pi]\}$. Da bismo odredili L_1 i L_2 udaljenosti točke T_0 do krivulje Γ, najprije trebamo odrediti točke t_1^* i t_2^* u kojima funkcije

$$\psi_1(t) = |t - \sin t - 1.5| + |1 - \cos t - 0.5|$$

$$\psi_2(t) = (t - \sin t - 1.5)^2 + (1 - \cos t - 0.5)^2$$

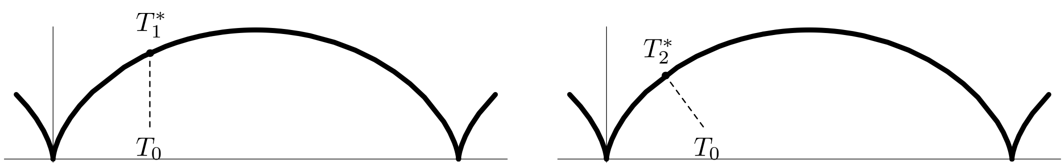
postižu minimum. Na Slici 3. prikazani su grafovi funkcija $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$.



Slika 3. Grafovi funkcija $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$.

Na Slici 4. prikazane su L_1 i L_2 projekcije $T_1^* = (t_1^* - \sin t_1^*, 1 - \cos t_1^*)$ i $T_2^* = (t_2^* - \sin t_2^*, 1 - \cos t_2^*)$ točke T_0 na krivulju Γ

a) L_1 udaljenost b) L_2 udaljenost



Slika 4. L_1 i L_2 projekcije točke T_0 na krivulju Γ

3. Udaljenost točke do polarno zadane krivulje

Polarno zadana krivulja je zadana jednadžbom oblika

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

Kako je veza između polarnih i Kartezijevih koordinata dana s (vidjeti [1])

$$x = r \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi,$$

onda se problem udaljenosti točke do polarno zadane krivulje može svesti na računanje udaljenosti do parametarski zadane krivulje.

Primjer 3. Neka je $r = \frac{3}{\varphi}, \varphi \in [0, 3\pi]$ polarno zadana krivulja i $T_0 = (1, 1)$. Tada je u parametarskom obliku ta krivulja dana s $\Gamma_\varphi = \{(\frac{3}{\varphi}\cos\varphi, \frac{3}{\varphi}\sin\varphi) : \varphi \in [0, 3\pi]\}$. Da bi odredili L_1 i L_2 udaljenosti točke T_0 do krivulje Γ_φ, najprije trebamo odrediti točke φ_1^* i φ_2^* u kojima funkcije

$$\psi_1(\varphi) = |\frac{3}{\varphi}\cos\varphi - 1| + |\frac{3}{\varphi}\sin\varphi - 1|,$$

$$\psi_2(\varphi) = (\frac{3}{\varphi}\cos\varphi - 1)^2 + (\frac{3}{\varphi}\sin\varphi - 1)^2$$

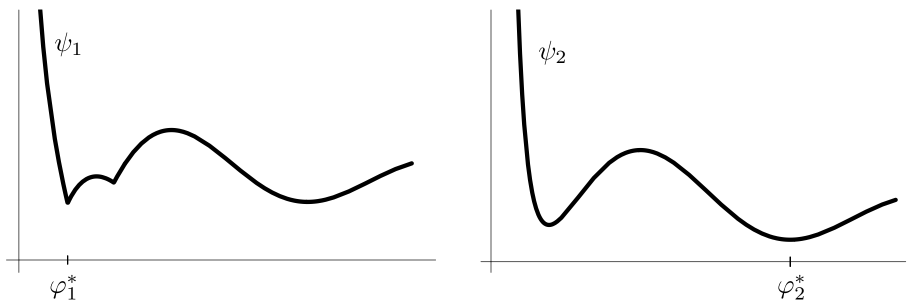
postižu globalni minimum. L_1 i L_2 udaljenosti točke T_0 do krivulje Γ_φ tada iznose

$$d_1(T_0, \Gamma_f) = \psi_1(\varphi_1^*),$$

odnosno

$$d_2(T_0, \Gamma_f) = \sqrt{\psi_2(\varphi_2^*)}.$$

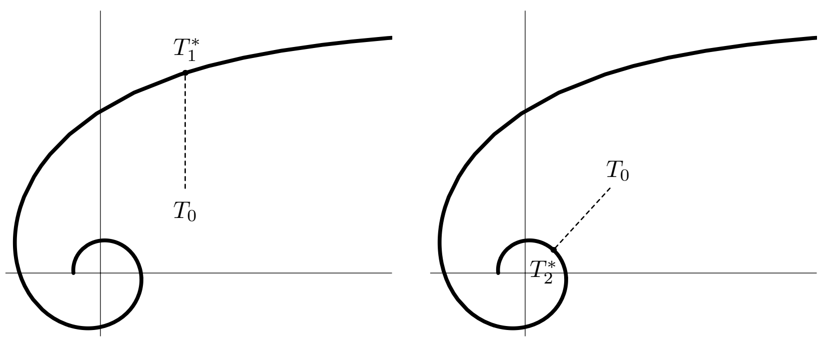
Na Slici 5. prikazani su grafovi funkcija $\psi_1(\varphi)$ i $\psi_2(\varphi)$.



Slika 5. Grafovi funkcija $\psi_1(\varphi)$ i $\psi_2(\varphi)$.

Na Slici 6. prikazane su L_1 i L_2 projekcije $T_1^* = (\frac{3}{\varphi_1^*}\cos\varphi_1^*, \frac{3}{\varphi_1^*}\sin\varphi_1^*)$ i $T_2^* = (\frac{3}{\varphi_2^*}\cos\varphi_2^*, \frac{3}{\varphi_2^*}\sin\varphi_2^*)$ točke T_0 na krivulju Γ_f.

a) L_1 udaljenost b) L_2 udaljenost



Slika 6. L_1 i L_2 projekcije točke T_0 na krivulju Γ_f

Zadatak 1. *Odredite* L_1 *i* L_2 *udaljenosti točke* $T_0 = (2,1)$ *do pravca danog jednadžbom* $y = x + 1$. (Rješenje: $d_1 = 2$, $d_2 = \sqrt{2}$)

Zadatak 2. *Odredite* L_1 *i* L_2 *udaljenosti točke* $T_0 = (1,4)$ *do grafa funkcije* $f(x) = x^2 + 1$. (Rješenje: $d_1 = 0.732$, $d_2 = 0.702$)

Zadatak 3. L_∞ *udaljenost točaka* $T_1 = (x_1, y_1)$ *i* $T_2 = (x_2, y_2)$ *definira se kao*

$$d_\infty(T_1, T_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Odredite L_∞ *udaljenosti točaka* T_0 *do krivulja iz zadataka 1 i 2.*

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.

[2] K. Sabo, *Minimizacija realne funkcije jedne varijable*, Osječka matematička škola **2**(2001)

[3] I. Soldo, K. Sabo, *Računanje udaljenosti točke do krivulje*, PrimMath[2003], 2003.

[4] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, Champaign, 1999.