# Bobillierova formula

Alija Muminagić*

**Sažetak**. *U članku je dokazan identitet poznat kao Bobillierova formula. Formula je također ilustrirana na elementarnim zadacima za učenike srednjih škola.*

**Ključne riječi:** *Bobilierova formula, trigonometrija*

**Bobillier formula**

**Abstract**. *Identity known as Bobillier formula is proved in the paper. The formula is also illustrated by elementary tasks adapted to be solved by high-school pupils.*

**Key words:** *Bobillier formula, trigonometry*

U ovom članku dajemo jedan od mnogih dokaza teorema poznatog kao Bobillierova formula. Teorem glasi:

**Teorem 1.** *Ako su $R$ i $r$ polumjeri trokutu $ABC$ opisane i upisane kružnice te $r_a$, $r_b$ i $r_c$ polumjeri tom trokutu pripisanih kružnica, tada vrijedi*

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r. \tag{1}$$

Dokazat ćemo najprije nekoliko identiteta koje zadovoljavaju kutovi trokuta, a koje ćemo koristiti u dokazu *Teorema 1.*

a) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{r}{R}$

b) $-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_a}{R} - 1$

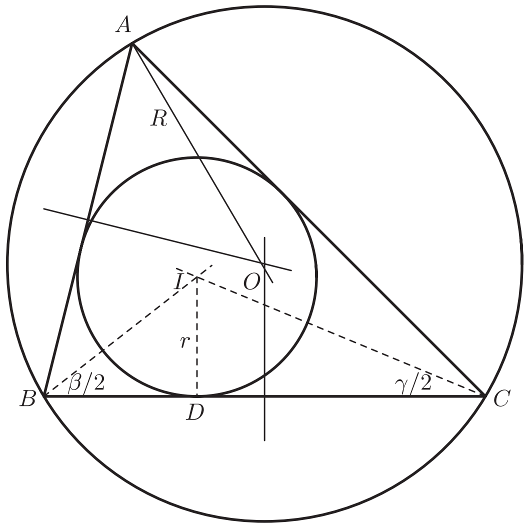
c) $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r_b}{R} - 1$

d) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \frac{r_c}{R} - 1.$

*Enighedsvej 58.1.th., 4800 Nykobing F, Denmark

Identitet a) dokazat ćemo na dva načina.
**Prvi dokaz:** Kako je $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to imamo redom

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\
&= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\
&= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)+1\\
&= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+1\\
&= 2\sin\frac{\gamma}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+1\\
&= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1. \qquad (2)
\end{aligned}$$




*Slika 1.*

Neka je točka $D$ nožište normale spuštene iz središta trokutu upisane kružnice $I$ na stranicu $\overline{BC}$ (vidi *Sliku 1*). Iz pravokutnih trokuta $\triangle BDI$ i $\triangle CDI$ je $|BD|=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ te $|CD|=r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, pa zbog $a=|BC|=|BD|+|CD|$ imamo

$$\begin{aligned}
a &= r\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)=r\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\\
&= r\cdot\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}=r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}},
\end{aligned}$$

tj.

$$\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) koristeći formulu $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+1\\ &= 2\cdot\frac{r}{a}\cdot\sin\alpha+1=\frac{2r}{a}\cdot\frac{a}{2R}+1\\ &= 1+\frac{r}{R},\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

**Drugi dokaz:** Koristeći formule $R=\frac{abc}{4P}$ i $r=\frac{P}{s}$ gdje je s $P$ označena površina trokuta, a sa $s$ poluopseg trokuta dobivamo redom

$$\begin{aligned}1+\frac{r}{R} &= \frac{R+r}{R}=\frac{\frac{abc}{4P}+\frac{P}{s}}{\frac{abc}{4P}}=\frac{sabc+4P^2}{sabc}\\ &= 1+\frac{4P^2}{sabc}=1+\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}\\ &= \frac{abc+4\cdot\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)}{abc}\\ &= \frac{2abc+(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc},\end{aligned}$$

odakle zbog

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc$$

i kosinusovog poučka slijedi

$$\begin{aligned}1+\frac{r}{R} &= \frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2abc}\\ &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.\end{aligned}$$

Treba primijetiti da je prikazani dokaz "s desna na lijevo" jednostavniji.

Dokažimo sada b). Nakon množenja s $2abc$ zbog $R=\frac{abc}{4P}$ b) možemo zapisati u obliku

$$2abc(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)=8\cdot P\cdot r_a. \tag{4}$$

Označimo lijevu stranu jednakosti (4) s $L$. Iz kosinusovog poučka slijedi da je

$$\begin{aligned}2bc\cos\alpha &= -a^2+b^2+c^2\\ 2ac\cos\beta &= -b^2+a^2+c^2\\ 2ab\cos\gamma &= -c^2+a^2+b^2\end{aligned}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}
L &= -a(-a^2+b^2+c^2)+b(a^2-b^2+c^2)+c(a^2+b^2-c^2)+2abc\\
&= a^3+a^2(b+c)-a(b^2+c^2-2bc)-b^3+bc^2+b^2c-c^3\\
&= a^3+a^2(b+c)-a(b-c)^2-(b^3+c^3)+bc(b+c)\\
&= a^3+a^2(b+c)-a(b-c)^2-(b+c)(b^2-bc+c^2-bc)\\
&= a^3+a^2(b+c)-a(b^2+c^2-2bc)-(b+c)(b-c)^2\\
&= a^2(a+b+c)-a(b-c)^2-(b+c)(b-c)^2\\
&= a^2(a+b+c)-(b-c)^2(a+b+c)=(a+b+c)\left[a^2-(b-c)^2\right]\\
&= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=2s(2s-2b)(2s-2c)\\
&= 8s(s-b)(s-c)=\frac{8P^2}{s-a}=8\cdot P\cdot r_a
\end{aligned}$$

gdje je za dobivanje posljednje jednakosti korištena Heronova formula za površinu trokuta $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Dokaz identiteta c) i d) ostavljamo čitateljima.

**Dokaz teorema.** Zbrajanjem jednakosti

$$\begin{aligned}
-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= \frac{r_a}{R}-1\\
\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma &= \frac{r_b}{R}-1\\
\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma &= \frac{r_c}{R}-1
\end{aligned}$$

dobivamo $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3$ odakle, zbog a), slijedi $1+\frac{r}{R}=\frac{1}{R}(r_a+r_b+r_c)-3$ što nakon množenja s $R$ daje $R+r=r_a+r_b+r_c-3R$ tj. (1) što je i trebalo dokazati.

**Zadatak 1.** *Dokazati da za kutove trokuta vrijedi*

*1)* $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ge 1$,

*2)* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$.

**Rješenje.** Pored dokazanog identiteta (1) koristit ćemo formule

$$r_a=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \ \mathrm{r_b}=\mathrm{s}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ \ \mathrm{r_c}=\mathrm{s}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \tag{5}$$

te Eulerovu nejednakost $R\ge 2r$. Posljednja nejednakost posljedica je poznatog Eulerovog teorema $|OI|^2=R^2-r^2$, gdje je $|OI|$ udaljenost središta $O$ opisane kružnice i središta $I$ upisane kružnice trokutu $ABC$. (Formule (5) pokušajte sami dokazati.)

Uvedimo oznake $S_1=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ i $S_2=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$. Tada koristeći (5), (1) i Eulerovu nejednakost dobivamo

$$S_1=\frac{r_a}{s}+\frac{r_b}{s}+\frac{r_c}{s}=\frac{r_a+r_b+r_c}{s}\overset{(1)}{=}\frac{4R+r}{s}\ge\frac{9r}{s}. \tag{6}$$

Znak jednakosti u (6) vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan, a kako za jednakostraničan trokut vrijedi $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3}s = \frac{\sqrt{3}}{9}s$ to iz (6) slijedi $S_1 \geq \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}s}{s} = \sqrt{3}$.

Nakon kvadriranja $S_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ dobivamo

$$S_1^2 = S_2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

i zbog $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$ (pokušajte sami dokazati) vrijedi $S_1^2 = S_2 + 2$, tj. $S_2 = S_1^2 - 2 \geq (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$.

Pokušajte ovaj zadatak riješiti i na neki drugi način. Postoji još nekoliko dokaza *Teorema 1.* Pokušajte ih pronaći.