

Grafička ilustracija pogreške u rješenju sustava linearnih jednadžbi

MIROSLAV MEŠTROVIĆ*

KRISTIAN SABO†

Sažetak. U članku se razmatra problem pogreške u rješenju sustava linearnih jednadžbi koja nastaje zbog promjene desne strane sustava. Za ilustraciju tog problema koriste se mogućnosti programskog paketa Mathematica.

Ključne riječi: sustav linearnih jednadžbi, kondicija, singularna dekompozicija

Graphical representation of an error occurring in linear system solution

Abstract. The paper considers the problem of an error in solving a linear system, which occurs due to a change of the system right-hand side. This problem is graphically illustrated by the Mathematica software package.

Key words: linear system, condition, singular value decomposition

1. Uvod

Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.5 \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.55 \end{aligned} \quad (1)$$

čija rješenja su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Pretpostavimo da smo greškom malo promijenili desnu stranu sustava te da sustav sada glasi

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.52 \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.51. \end{aligned} \quad (2)$$

Rješenja novog sustava su $x_1 = -0.2$ i $x_2 = 1.42$.

Na *Slici 1* prikazani su uređeni parovi rješenja sustava (1) i (2) dobiveni kao sjecišta odgovarajućih pravaca. Uočimo da je malena promjena desne strane sustava uzrokovala veliku promjenu rješenja.

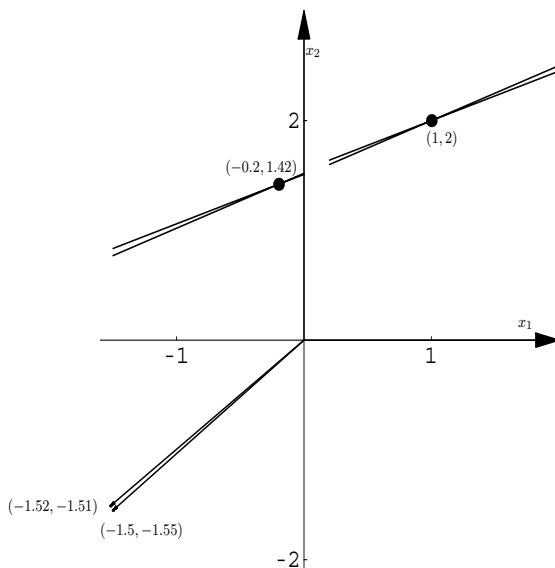
*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, HR-31 000 Osijek, e-mail: mmestrovic@mathos.hr

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, HR-31 000 Osijek, e-mail: ksabo@mathos.hr

Općenito, prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

moгу se u elementima vektora \mathbf{b} kao i matrice \mathbf{A} pojaviti pogreške. Te pogreške kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru mogu ponekad za posljedicu imati izrazito veliku promjenu rješenja sustava. Zanima nas o čemu ta promjena ovisi. U tu svrhu analizirat ćemo problem rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.



Slika 1.

2. Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

Pretpostavimo da je $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ x_2^*]^T$ rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad (3)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1. \quad (4)$$

Označimo s p_1 i p_2 pravce čije su jednadžbe (3) i (4). Neka je $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi = \angle(p_1, p_2)$ kut između pravca pravaca p_1 i p_2 . Vrijedi da je

$$\cos \varphi = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}.$$

Nakon jednostavnog računa dobivamo da rješenja sustava jednadžbi (3)-(4) iznose:

$$x_1^* = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{i} \quad x_2^* = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (5)$$

Zbog pogrešaka umjesto sustava (3)-(4) rješavamo sustav

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 + \Delta b_1 \quad (6)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 + \Delta b_2, \quad (7)$$

gdje su Δb_1 i Δb_2 pogreške. Označimo li s $\tilde{\mathbf{x}}^* = [\tilde{x}_1^* \ \tilde{x}_2^*]^T$ rješenje sustava (6)-(7), nakon jednostavnog računa dobivamo da su:

$$\tilde{x}_1^* = \frac{a_{22}(b_1 + \Delta b_1) - a_{12}(b_2 + \Delta b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{i} \quad \tilde{x}_2^* = \frac{a_{11}(b_2 + \Delta b_2) - a_{21}(b_1 + \Delta b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (8)$$

Relativno odstupanje vektora $\tilde{\mathbf{x}}^*$ od vektora \mathbf{x}^* mjerit ćemo brojem

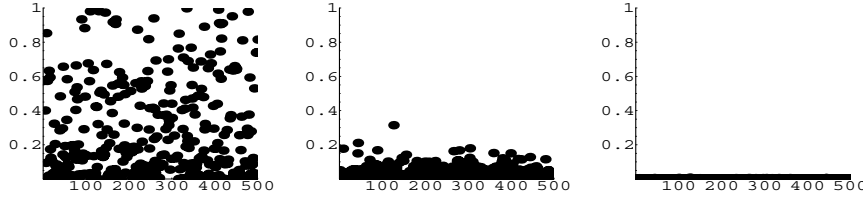
$$\eta_R := \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}^*\|^2}{\|\mathbf{x}^*\|^2} = \frac{(x_1^* - \tilde{x}_1^*)^2 + (x_2^* - \tilde{x}_2^*)^2}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2}.$$

Iz (5) i (8) dobivamo da je

$$\eta_R = \frac{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2 - 2\Delta b_1\Delta b_2 \cos \varphi}{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 \cos \varphi}. \quad (9)$$

Prema (9) očigledno η_R bitno ovisi o kutu φ , što ćemo ilustrirati sljedećim numeričkim eksperimentom.

Primjer 1. Neka su $\Delta b_1^{(i)}, \Delta b_2^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$, $b_1 = 2, b_2 = 0.1$ te $\varphi_1 = \frac{\pi}{100}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{10}$ i $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Na Slici 2. prikazane su točke $(i, \eta_R^{(i)})$, $i = 1, \dots, 500$ redom za kutove φ_1, φ_2 i φ_3 .



Slika 2.

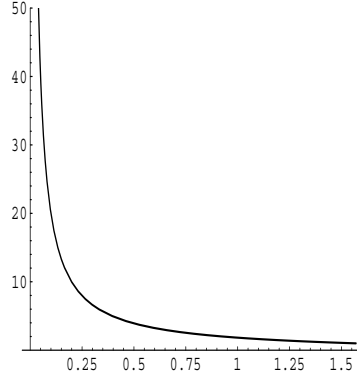
U prethodnom primjeru uočavamo da za male kutove φ dobivamo velike brojeve za η_R . Također primijetimo da je

$$\eta_R = \frac{((\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2)(1 + \cos \varphi) - (\Delta b_1 + \Delta b_2)^2 \cos \varphi}{(b_1^2 + b_2^2)(1 - \cos \varphi) + (b_1 - b_2)^2 \cos \varphi} \leq \kappa^2(\varphi) \frac{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad (10)$$

pri čemu je

$$\kappa(\varphi) := \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}}. \quad (11)$$

Na Slici 3. prikazan je graf funkcije κ odakle vidimo da je κ padajuća funkcija kuta φ .



Slika 3.

Primijetimo da formulu (9) možemo zapisati u obliku

$$(x_1^* - \tilde{x}_1^*)^2 + (x_2^* - \tilde{x}_2^*)^2 = r^2,$$

$$r := \sqrt{((x_1^*)^2 + (x_2^*)^2) \frac{(\Delta b_1)^2 + (\Delta b_2)^2 - 2\Delta b_1 \Delta b_2 \cos \varphi}{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 b_2 \cos \varphi}}, \quad (12)$$

što u geometrijskom smislu znači da točka $(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)$ leže na kružnici polumjera r sa središtem u točki (x_1^*, x_2^*) . Ilustrirat ćemo to na primjerima dvaju bitno različita sustava linearnih jednadžbi.

Primjer 2. Neka su $(\Delta b_1)^{(i)}, (\Delta b_2)^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$, $i = 1, \dots, 250$. Za $i = 1, \dots, 250$ zadani su sustavi

sustav i)

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.5 + (\Delta b_1)^{(i)} \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.55 + (\Delta b_2)^{(i)}, \end{aligned} \quad (13)$$

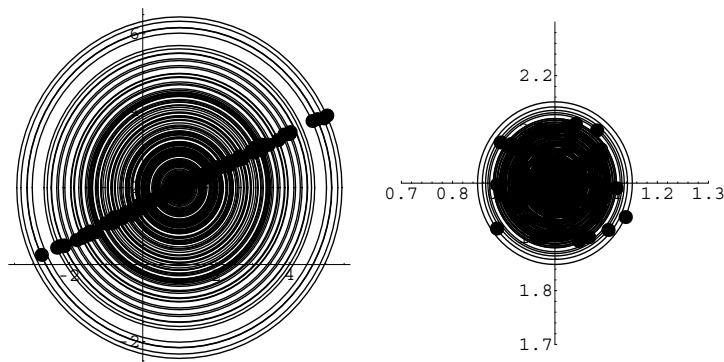
čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Za kut φ_1 između odgovarajućih pravaca vrijedi da je $\cos \varphi_1 = 0.0408$.

sustav ii)

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 2 + (\Delta b_1)^{(i)} \\ x_1 + 4x_2 &= 9 + (\Delta b_2)^{(i)}, \end{aligned} \quad (14)$$

čija rješenja su također $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Za kut φ_2 između odgovarajućih pravaca vrijedi da je $\cos \varphi_2 = 0$, tj. $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Na Slici 3. prikazane su redom kružnice (12) te rješenja za sustave (13) i (14). Primijećujemo da se uređeni parovi rješenja sustava (13) sadržani u elipsi sa središtem u točki $(1, 2)$, koja je izrazito izdužena. Za razliku od toga skup svih uređenih parova rješenja sustava (14) sadržan je u malom krugu sa središtem u točki $(1, 2)$.



Slika 4.

Ovako pravilno geometrijsko mjesto uređenih parova rješenja sustava iz prethodnog primjera nije posve slučajno. Za potpuno razumijevanje ove pojave potrebno nam je nekoliko važnih pojmova i tvrdnji numeričke linearne algebre, koje ćemo navesti u sljedećoj točki.

3. Singularna dekompozicija

Singularna dekompozicija matrice izrazito je važna i koristi se u različitim primjenama numeričke matematike. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1. ([1]) *Neka je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica ranga r . Tada postoji dijagonalna matrica*

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

te ortogonalne matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takve da vrijedi

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T. \quad (15)$$

Brojeve $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ zovemo singularne vrijednosti matrice \mathbf{M} , a rastav (15) zovemo singularna dekompozicija matrice \mathbf{M} .

Kako je $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{V}\Sigma^T\Sigma\mathbf{V}^T$, kvadrati singularnih vrijednosti σ_i^2 su svojstvene vrijednosti simetrične pozitivno semidefinitne matrice $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$, a stupci matrice \mathbf{V} su odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori.

Primjedba 1. *Pretpostavimo da je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratna regularna matrica te da njezina singularna dekompozicija glasi*

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mathbf{V}^T,$$

pri čemu su $\sigma_i \neq 0, i = 1, \dots, m$. Jednostavno se vidi da singularna dekompozicija matrice \mathbf{M}^{-1} glasi

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{V} \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) \mathbf{U}^T.$$

U sljedećem jednostavnom primjeru vidjet ćemo kako odrediti singularnu dekompoziciju matrice iz $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Primjer 3. Zadana je matrica $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Jednostavno se može pokazati da su $\lambda_1 = 9$ i $\lambda_2 = 1$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$, a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \quad i \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T,$$

odgovarajući normirani svojstveni vektori. Prema tome imamo da su

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad i \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da (15) možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{U}\Sigma = \mathbf{M}\mathbf{V},$$

odakle dobivamo je

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Konačno, singularna dekompozicija matrice \mathbf{M} glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

Vratimo se sada sustavu linearnih jednadžbi (3)-(4), odnosno (6)-(7) te primijetimo da za odgovarajuću matricu sustava \mathbf{A} vrijedi da je

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se vidi da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ jednake $\lambda_1 = 1 + \cos \varphi$ i $\lambda_2 = 1 - \cos \varphi$ te da odgovarajuće singularne vrijednosti matrice \mathbf{A} glase:

$$\sigma_1 = \sqrt{1 + \cos \varphi}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1 - \cos \varphi}.$$

To znači da matricu \mathbf{A} možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\sqrt{1 + \cos \varphi}, \sqrt{1 - \cos \varphi}) \mathbf{V}^T,$$

gdje su $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ortogonalne matrice. Uzmemo li u obzir da je \mathbf{x}^* rješenje sustava (3)-(4), a $\tilde{\mathbf{x}}^*$ rješenje sustava (6)-(7) te ako oduzmemo ta dva sustava dobivamo da je

$$\tilde{\mathbf{x}}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b} = \mathbf{x}^* + \mathbf{V} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}\right) \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{b}. \quad (16)$$

Neka je

$$K(0, \|\Delta \mathbf{b}\|) := \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y}\|^2 = \|\Delta \mathbf{b}\|\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $\|\Delta \mathbf{b}\|$. Uočimo da je u tom slučaju skup

$$\mathbf{A}^{-1}K(0, \|\Delta \mathbf{b}\|) := \{\mathbf{V} \text{diag}\left(\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1+\cos \varphi}}, \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1-\cos \varphi}}\right) \mathbf{U}^T \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| = 1\},$$

zarotirana elipsa sa središtem u ishodištu čije poluosi leže na stupcima matrice \mathbf{V} te imaju duljinu $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1+\cos \varphi}}$ i $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1-\cos \varphi}}$.

Prema (16) to znači da se vektor $\tilde{\mathbf{x}}^*$ nalazi na elipsi $E(\mathbf{x}^*)$ sa središtem u točki \mathbf{x}^* čije poluosi leže na stupcima matrice \mathbf{V} te imaju duljinu $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1+\cos \varphi}}$ i $\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\sqrt{1-\cos \varphi}}$. Sada je očito da su duljine poluosi elipse $E(\mathbf{x}^*)$ približno jednake ako je kut $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$. Ako je $\varphi \approx 0$ duljina druge poluosi izrazito velik broj, što znači da se odgovarajuća elipsa degenerira u pravac.

4. Kondicija matrice i opći sustav

Neka su σ_1 i σ_2 , $\sigma_1 \geq \sigma_2$ singularne vrijednosti matrice regularne $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Označimo li s $\text{cond}(\mathbf{A}) := \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ uočavamo da zbog (11) vrijedi da je

$$\kappa(\varphi) = \text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

To znači da formulu (10) možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Broj $\text{cond}(\mathbf{A})$ zovemo kondicija matrice \mathbf{A} .

Općenito, kondiciju proizvoljne matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiramo kao (vidi [2],[3]):

$$\text{cond}(\mathbf{A}) := \frac{\sigma_1}{\sigma_r},$$

pri čemu je σ_1 najveća, a σ_r najmanja pozitivna singularna vrijednost matrice \mathbf{A}

Pretpostavimo da je zadan sustav linearnih jednažbi

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad (17)$$

no zbog pogreške rješavamo sustav

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}. \quad (18)$$

Ako s \mathbf{x}^* označimo rješenje sustava (17), a s $\tilde{\mathbf{x}}^*$ rješenje sustava (18), može se pokazati (vidi [2],[3]) da vrijedi

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (19)$$

Slične se ocjene mogu pokazati i slučajevima kada se pogreška pojavljuje u matrici \mathbf{A} , te kada se pojavljuju istovremeno i u matrici \mathbf{A} i u vektoru \mathbf{b} . Više o tome se može naći u [2], [3].

Literatura

- [1] J. W. DEMMEL, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [2] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [3] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek, 1999.