Nekoliko netipičnih trigonometrijskih jednadžbi

VLADO MARJANOVIĆ*

Sažetak.*U radu je riješeno nekoliko netipičnih trigonometrijski jednadžbi, koje osim trigonometrije zahtijevaju i neka druga matematička znanja. Takav tip jednadžbi često se susreće na matematičkim natjecanjima kao i na klasifikacijskim ispitima za upis na fakultet.*

Ključne riječi: *jednadžbe, trigonometrija*

Several untypical trigonometric equations

Abstract. *Several untypical trigonometric equations have been solved in the paper, which, in addition to trigonometry, demand a knowledge of some other mathematical branches. Such type of equations is often present at various mathematics competitions as well as entrance exams selecting students for admission to faculties.*

Key words: *equations, trigonometry*

Premda se trigonometrijske jednadžbe obrađuju u programima gimnazija te nekih strukovnih škola, prvenstveno imam na umu tehničke škole, rijetko se pojavljuju zadaci koji zahtijevaju primjenu i nekih drugih znanja iz matematike osim samih trigonometrijskih funkcija i ponešto algebre. U članku će biti prezentirano nekoliko takvih netipičnih jednadžbi za koje vjerujem da će dobro poslužiti tijekom priprema za natjecanja ili prijamne ispite za upise na fakultete.

Primjer 1. *Riješite jednadžbu* $\log_{\sin x}(1+\cos x) = 2$.

Rješenje. Uvjeti pod kojima postoje rješenja su:

$$1+\cos x > 0 \tag{1}$$
$$0 < \sin x < 1. \tag{2}$$

Antilogaritmiranjem jednadžbe dobivamo

$$1+\cos x = \sin^2 x,$$

što, korištenjem identiteta $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ i sređivanjem daje $\cos^2 x + \cos x = 0$, tj.

$$\cos x(\cos x + 1) = 0.$$

*Svetog Roka 67, HR – 31000 Osijek, e-mail: `marjanovic@inet.hr`

Gornje vrijedi kada je $\cos x = -1$ ili kada je $\cos x = 0$. Prvo ne zadovoljava (1), a drugo ne zadovoljava uvjet (2) pa prema tome jednadžba nema rješenje.

Zadatak 1. *Riješite jednadžbe:*

a) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$,

b) $2\log_{\sin x} \operatorname{tg} x + \log_{\operatorname{tg} x} \sin x = 3$.

Primjer 2. *Riješite jednadžbu* $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$.

Rješenje. Prebacivanjem članova s lijeve strane na desnu i korištenjem identiteta $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ dobivamo $2^{\cos^2 x - \sin^2 x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$ te zbog $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2\cos^2 x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0.$$

Supstitucija $2^{\cos^2 x} = t$ i sređivanje vodi na kvadratnu jednadžbu $t^2 - 6t + 8 = 0$ čija su rješenja $t_1 = 4$ i $t_2 = 2$. Imamo:

1) $t_1 = 4 \Rightarrow 2^{\cos^2 x} = 4 \Rightarrow \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{2}$ što je nemoguće;

2) $t_2 = 2 \Rightarrow 2^{\cos^2 x} = 2 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$, tj. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Dakle, rješenja jednadžbe su brojevi oblika $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 2. *Riješite jednadžbu* $3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \sin 2x + 2\sin^2 x} = 28$.

Primjer 3. *Riješite jednadžbu* $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$

Rješenje. Kako je $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, mora biti $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\cos x}}$, tj.

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1.$$

Uz uvjet da je x takav da su $(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ i $(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ definirani, vrijedi:

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x + \cos x} = 1.$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$(\sin x + \cos x) \cdot \log(\operatorname{tg} x) = 0.$$

Imamo:

1) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

2) $\log(\operatorname{tg} x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

No, za $x = -\frac{\pi}{4}$ su $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\operatorname{tg} x = -1$, pa $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (-1)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ nije definirano te brojevi oblika $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nisu rješenje jednadžbe. Dakle, rješenja su brojevi oblika:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Zadatak 3. *Riješite jednadžbe:*

a) $(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$

b) $(\sin x)^{-\sin x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$

c) $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$

Primjer 4. *Riješite jednadžbu* $\sin(\pi \cdot \ln x) + \cos(\pi \cdot \ln x) = 1$.

Rješenje. Rješenja postoje pod uvjetom $x > 0$. Koristimo tzv. univerzalnu susptituciju $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$. Iz $\operatorname{tg}\frac{\pi \cdot \ln x}{2} = t$ slijedi $\sin(\pi \cdot \ln x) = \frac{2t}{1+t^2}$ i $\cos(\pi \cdot \ln x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, što, uvrštavanjem u jednadžbu i sređivanjem, daje $t(t-1) = 0$. Sada imamo:

1) $t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi \cdot \ln x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi \cdot \ln x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ln x = 2k, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow x = e^{2k}, k \in \mathbb{Z}$

2) $t = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi \cdot \ln x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot \ln x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}+2k}, k \in \mathbb{Z}$.

Rješenja jednadžbe su brojevi oblika

$$x_1 = e^{2k}, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = e^{\frac{1}{2}+2k}, k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 4. *Riješite jednadžbu* $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

Literatura

[1] A. DUJELLA, M. BOMBARDELLI, S. SLIJEPČEVIĆ, *Matematička natjecanja učenika srednjih škola*, HMD i Element, Zagreb, 1996

[2] N. ELEZOVIĆ, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb, 1992

[3] B. PAVKOVIĆ, D. SVRTAN, D. VELJAN, *Matematika 3, Zbirka zadataka s uputama i rješenjima*, Školska knjiga, Zagreb, 1991

[4] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995