Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

Zdravko F. Starc*

Sažetak. *Veliki broj različitih zadataka s matematičkih natjecanja može se riješiti primjenom odnosa aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakosti). U radu je naveden jedan elementarni dokaz AG nejednakosti. Također dokazane su i neke posljedice te nejednakosti.*

Ključne riječi: *nejednakosti, AG nejednakost*

Inequalities between the arithmetic and the geometric mean

Abstract. *A lot of various tasks from mathematics competitions can be solved by applying the relationship between the arithmetic and the geometric mean (AG inequalities). An elementary proof of an AG inequality has been given in the paper. Some consequences of that inequality have also been proved.*

Key words: *inequalities, AG inequality*

Neka su $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$ pozitivni realni brojevi. Broj

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

zovemo aritmetička sredina brojeva $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$, a broj

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

zovemo geometrijska sredina brojeva $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$.

Poznato je da vrijedi

$$A\geq G.$$

Prethodnu nejednakost zovemo AG nejednakost. U matematičkoj literaturi nailazimo na mnogobrojne dokaze ove nejednakosti (poznato ih je oko 50). U ovom članku navest ćemo jedan dokaz AG nejednakosti i kroz niz zadataka vidjeti neke njezine primjene. U tu svrhu dokažimo najprije sljedeću tvrdnju.

Teorem 1. *Za pozitivne brojeve $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ vrijedi implikacija*

$$a_1a_2\cdots a_n=1 \quad\Rightarrow\quad a_1+a_2+\cdots+a_n\geq n. \tag{1}$$

*Žarka Zrenjanina 93, 26 300 Vršac, Srbija i Crna Gora, e-mail: zdravkostarc@yahoo.com

Dokaz. Prvo, dokažimo da za svaki $x > 0$ vrijedi nejednakost

$$x \geq 1 + \ln x. \tag{2}$$

Funkcija $f(x) = \ln\ x - x + 1$ na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$ postiže u $x_0 = 1$ maksimum koji iznosi 0, jer je

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad \text{i} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Slijedi da je $f(x) \leq 0$ za sve $x > 0$ tj. nejednakost (2). Očigledno, ako je $x \neq 1$ u nejednakosti (2) vrijedi znak stroge nejednakosti.

Nadalje, zbrajanjem nejednakosti

$$a_i \geq 1 + \ln a_i \qquad\qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

uz korištenje uvjeta da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ dobivamo da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n.$$

Ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, tada u prethodnoj nejednakosti vrijedi znak jednakosti. Ako brojevi $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ međusobno nisu svi jednaki, tada vrijedi znak stroge nejednakosti. □

Primjenom prethodnog teorema jednostavno se može pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar 1. *Ako je $a_1 = a,\ a_2 = \dfrac{1}{a}$, onda iz (1) slijedi da je $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, pri čemu jednakost vrijedi samo ako je $a = 1$.*

Za AG nejednakost vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2. *AG nejednakost ekvivalentna je s implikacijom (1).*

Dokaz. Neka vrijedi AG nejednakost, što zajedno s uvjetom $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ povlači implikaciju (1).

Obratno, neka vrijedi implikacija (1). Iz $G^n = a_1 a_2 \cdots a_n$ slijedi da je

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdots \frac{a_n}{G} = 1$$

pa zbog (1) imamo

$$\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \cdots + \frac{a_n}{G} \geq n.$$

Množenjem ove nejednakosti sa G i dijeljenjem s n dobivamo nejednakost $A \geq G$. Ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ dobivamo $A = G$, a ako brojevi $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ nisu svi međusobno jednako tada vrijedi $A > G$. □

Na osnovi prethodna dva teorema AG nejednakost možemo iskazati na sljedeći način.

Teorem 3. *Ako su $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ pozitivni brojevi, onda je $A \geq G$, pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*

U sljedećim zadacima ilustrirat ćemo neke primjene AG nejednakosti.

Zadatak 1. *Dokažite da za pozitivne brojeve $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ vrijedi nejednakost*

$$a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_n{}^n \geq n \cdot a_1 a_2 \cdots a_n$$

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$\frac{a_1{}^n + a_2{}^n + \cdots + a_n{}^n}{n} > \sqrt[n]{a_1{}^n a_2{}^n \cdots a_n{}^n} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

pa odavde neposredno slijedi tražena nejednakost.

Zadatak 2. *Dokažite nejednakost*

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n! \qquad (n \geq 2).$$

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti imamo

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdots n} = \sqrt[n]{n!}.$$

Kako je $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, potenciranjem s n iz prethodne nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 3. *Dokažite nejednakost*

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti imamo

$$\frac{1 + \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{n}}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Lijeva strana prethodne nejednakosti jednaka je $1 + \dfrac{1}{n+1}$ pa potenciranjem s $n+1$ iz prethodne nejednakosti dobivamo tzraženu nejednakost.

Zadatak 4. *Dokažite nejednakost*

$$3n(3n+1)^2 > 4\sqrt[n]{(3n)!}.$$

Rješenje. Nejednakost
$$\frac{1^3+2^3+\dots(3n)^3}{3n} > \sqrt[3n]{1^3\cdot 2^3\cdots(3n)^3}$$
primjenom
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
postaje
$$\frac{1}{3n}\cdot\frac{(3n)^2(3n+1)^2}{4} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots(3n)}$$
pa nakon sređivanja dobivamo traženu nejedankost.

Zadatak 5. *Dokažite da za pozitivne brojeve $a_1,\ a_2,\dots,\ a_n$ vrijedi nejednakost*
$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geq n.$$

Rješenje. Kako je
$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_1}=1$$
iz teorema 1 dobivamo zadanu nejednakost. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_1}=1,\ \text{tj. } a_1=a_2=\cdots=a_n$$

Zadatak 6. *Dokažite nejednakost*
$$\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a-1}}\geq 2$$

Rješenje. Kako je
$$\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a-1}}=\frac{x^2+a-1}{\sqrt{x^2+a-1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a-1}}=\sqrt{x^2+a-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a-1}}$$
to je zbroj posljednja dva pribrojnika jednak jedinici pa na osnovu Korolara 1 slijedi da vrijedi navedena nejednakost. Znak jednakosti vrijedi onda i samo onda ako je $x^2=2-a$.

Literatura

[1] D.S. Mitrinović, P.M. Vasić, *Uvođenje mladih u naučni rad V–Sredine*, Beograd, 1969.

[2] P.P. Korovkin, *Inequalities*, Moscow, 1975.

[3] I.H. Sivašinskiy, *Neravenstva v zadačah*, Moskva, 1967.