Stručni rad
Prihvaćeno 29. 11. 2000.

MILJENKO LAPAINE

Pramen konika zadan pomoću dviju dvostrukih točaka

Pramen konika zadan pomoću dviju dvostrukih točaka

SAŽETAK

Prikazan je algoritam za određivanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika kad je pramen zadan s četiri točke od kojih su dvije dvostruke. Da bi se moglo raditi s neizmjerno dalekim točkama uvedene su homogene koordinate. Postupak je ilustriran s nekoliko primjera.

Ključne riječi: pramen konika, homogene koordinate, računalna grafika

Conic Section Pencil Given by two Double Points

ABSTRACT

The algorithm is presented for the determination of coefficients in the equation of conic section pencils when the pencil is given by four base points two of which are double points. In order to work with the points in infinity, the homogeneous coordinates are introduced. The approach is illustrated by several examples.

Key words: conic section pencil, homogeneous coordinates, computer graphics

MSC 2000: 51N20, 51N15

1. Uvod

Pramen konika općenito je određen s četiri realne i različite točke A, B, C i D. Pramen konika tipa VI (Ščurić 1996) karakteriziran je svojstvom da se temeljne točke A i B te C i D podudaraju. Tim dvostrukim točkama prolaze zajedničke tangente svih konika pramena.

Grafički prikaz pramena konika može se učinkovito ostvariti primjenom računala i priključenog crtala. Matematička osnova razvijenog softvera opisana je u radu (Lapaine 1997). U jednom prethodnom radu (Lapaine 1999) opisan je algoritam za računanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV, gdje je pramen zadan s tri točke (od kojih je jedna dvostruka) i zajedničkom tangentom svih konika pramena. Na analogan način, u ovome radu daje se algoritam za računanje koeficijenata u jednadžbi pramena tipa VI, gdje je pramen zadan s dvije dvostruke točke. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmjerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti posve analogno kao i točke u konačnosti.

2. Pramen konika

Neka su

$$F(x,y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \quad (1)$$

$$G(x,y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0, \quad (2)$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu \in \mathbf{R}$ sastavimo izraz

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y). \quad (3)$$

Polinom H je oblika

$$H(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad (4)$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2, \ \ldots, \quad f = f_1 + \mu f_2. \quad (5)$$

Za svaki pojedini $\mu \in \mathbf{R}$, izraz

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y) = 0 \quad (6)$$

je jednadžba konike ako je barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Ako je $a=b=c=0$ tada se radi o specijalnim, ali jednostavnim slučajevima (Lapaine 1997).

Za zadane realne brojeve $a_1, b_1, \ldots, f_1, a_2, b_2, \ldots, f_2$, i $\mu \in \mathbf{R}$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (6) naziva se pramenom konika. Konike pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe

$$F(x,y)=0 \quad \text{i} \quad G(x,y)=0$$

nazivaju se osnovnim konikama pramena.

Za svaki čvrsti $\mu \in \mathbf{R}$ jednadžba (4) predstavlja jednu krivulju iz pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Jedan način određivanja tipa konike s mogućnošću grafičkog prikazivanja pomoću računala objašnjen je u radu (Lapaine i Jovičić 1996).

3. Pramen konika zadan pomoću dviju dvostrukih točaka

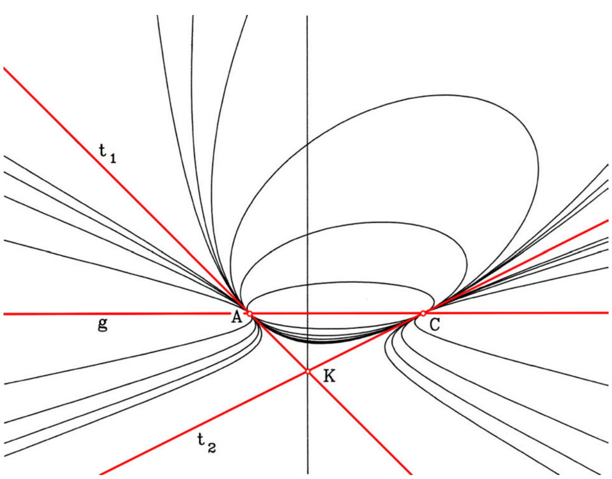
Ako su zadane četiri točke $P_i(x_i, y_i)$ $i=1,2,3,4$ u ravnini, od kojih ni koje tri nisu kolinearne, te ako je

$$g_{ik}=a_{ik}x+b_{ik}y+c_{ik}=0, \quad i \neq k, \tag{7}$$

jednadžba pravca P_iP_k, tada je jednadžbom

$$g_{12}g_{34}+\mu g_{13}g_{24}=0 \tag{8}$$

predočen pramen konika kojem su točke P_i temeljne. Sve konike pramena prolaze točkama P_i (Cesarec 1957).



Slika 1. *Pramen konika tipa* VI

Neka su sada zadane dvije točke A i C i neka je t_1 bilo koji pravac koji prolazi točkom A, ali ne sadrži točku C i neka je t_2 bilo koji pravac koji prolazi točkom C, a ne prolazi točkom A. Označimo s g pravac kroz točke A i C (vidi sliku 1). Ako su

$$t_1=0, \quad t_2=0 \quad \text{i} \quad g=0 \tag{9}$$

jednadžbe navedenih pravaca, tada je

$$g^2+\mu t_1 t_2=0 \tag{10}$$

jednadžba pramena konika kojem su A i C temeljne točke, a t_1 i t_2 zajedničke tangente svih konika pramena. Zaista, točka A je temeljna točka pramena jer leži na pravcima g i t_1, a točka C je temeljna jer je sjecište pravaca g i t_2. Za svaki zadani μ jednadžba (10) predstavlja jednu koniku pramena. Za točku (x,y) koja je zajednička proizvoljnoj konici pramena i pravcu $t_1(x,y)=0$ mora biti

$$g(x,y)=0, \tag{11}$$

što vrijedi samo za točku koja je istovremeno na pravcima t_1 i g. Dakle, radi se o točki A. Odatle zaključujemo da je pravac t_1 zajednička tangenta svih konika pramena jer sa svakom konikom ima samo jednu zajedničku točku. Ta zajednička toča A naziva se dvostrukom temeljnom točkom pramena.

Analogno se pokazuje da je pravac t_2 zajednička tangenta svih konika pramena i točka C dvostruka temeljna točka pramena. Može se također reći i da je pramen zadan s četiri točke od kojih su dvije i dvije pale zajedno.

4. Jednadžba pramena konika zadanog pomoću dviju dvostrukih točaka

Neka su s pomoću homogenih koordinata (vidi npr. Lapaine 1999) zadane točke

$$\begin{aligned} A &= (x_{0A}, x_{1A}, x_{2A}) \\ C &= (x_{0C}, x_{1C}, x_{2C}). \end{aligned} \tag{12}$$

Može se vidjeti da se jednadžba pravca g koji prolazi točkama A i C može napisati u obliku

$$g_x x+g_y y+g_z=0, \tag{13}$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} g_x &= \begin{vmatrix} x_{2C} & x_{2A} \\ x_{0C} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ g_y &= -\begin{vmatrix} x_{1C} & x_{1A} \\ x_{0C} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ g_z &= \begin{vmatrix} x_{1C} & x_{1A} \\ x_{2C} & x_{2A} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Pravac t_1 prolazi točkom A, a njegov smjer neka određuje jedna pomoćna točka T_1 s homogenim koordinatama

$$T_1 = (x_{0T_1}, x_{1T_1}, x_{2T_1}). \tag{15}$$

Jednadžba pravca t_1 koji prolazi točkama A i T, glasi tada

$$t_{1x}x + t_{1y}y + t_{1z} = 0, \tag{16}$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} t_{1x} &= \begin{vmatrix} x_{2T_1} & x_{2A} \\ x_{0T_1} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ t_{1y} &= -\begin{vmatrix} x_{1T_1} & x_{1A} \\ x_{0T_1} & x_{0A} \end{vmatrix}, \\ t_{1z} &= \begin{vmatrix} x_{1T_1} & x_{1A} \\ x_{2T_1} & x_{2A} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{17}$$

Pravac t_2 prolazi točkom C, a njegov smjer neka određuje jedna pomoćna točka T_2 s homogenim koordinatama

$$T_2 = (x_{0T_2}, x_{1T_2}, x_{2T_2}). \tag{18}$$

Jednadžba pravca t_2 koji prolazi točama C i T_2 glasi tada

$$t_{2x}x + t_{2y}y + t_{2z} = 0, \tag{19}$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} t_{2x} &= \begin{vmatrix} x_{2T_2} & x_{2C} \\ x_{0T_2} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ t_{2y} &= -\begin{vmatrix} x_{1T_2} & x_{1C} \\ x_{0T_2} & x_{0C} \end{vmatrix}, \\ t_{2z} &= \begin{vmatrix} x_{1T_2} & x_{1C} \\ x_{2T_2} & x_{2C} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

U 3. smo poglavlju ustanovili da je

$$g^2 + \mu t_1 t_2 = 0$$

jednadžba pramena konika kojem su A i C dvostruke temeljne točke. S pomoću relacija (12)-(20) može se izvesti daje g^2 oblika

$$\begin{aligned} &g^2 = F(x,y) = \\ &= a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 \end{aligned} \tag{21}$$

uz oznake

$$\begin{aligned} &a_1 = g_x^2 \qquad b_1 = g_xg_y \\ &c_1 = g_y^2 \qquad d_1 = g_xg_z \\ &e_1 = g_yg_z \qquad f_1 = g_z^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Analogno t_1t_2 je oblika

$$\begin{aligned} &t_1t_2 = G(x,y) = \\ &= a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 \end{aligned} \tag{23}$$

uz oznake

$$\begin{aligned} &a_2 = t_{1x}t_{2x} \qquad b_2 = \frac{1}{2}(t_{1x}t_{2y} + t_{1y}t_{2x}) \\ &c_2 = t_{1y}t_{2y} \qquad d_2 = \frac{1}{2}(t_{1x}t_{2z} + t_{1z}t_{2x}) \\ &e_2 = \frac{1}{2}(t_{1y}t_{2z} + t_{1z}t_{2y}) \qquad f_2 = t_{1z}t_{2z}. \end{aligned} \tag{24}$$

Pomoću izvedenih formula možemo sastaviti program za računalo koji na temelju zadanih točaka A, C, T_1 i T_2 određuje koeficijente u jednadžbi pramena

$$\begin{aligned} &F(x,y) + \mu G(x,y) = \\ &= a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 + \\ &+ \mu(a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2) = 0. \end{aligned}$$

5. Primjeri

Prethodna razmatranja izvedena su 1994. radi izrade crteža za rad ”Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ VI der Isotropen Ebene”, V. Ščurić koji je objavljen 1996.

Za proučavanje geometrije izotropne ravnine može se npr. uzeti monografija H. Sachsa (1987). Budući da računala sama po sebi još ne poznaju geometriju izotropne ravnine, trebalo je pojedine jednadžbe ”prevesti” na jezik geometrije euklidske ravnine. U tu je svrhu, na temelju u ovome radu prikazanih formula, bio sastavljen odgovarajući potprogram za računalo u Basicu, koji polazeći od zadanih homogenih koordinata točaka A, C, T_1 i T_2 određuje koeficijente u jednadžbi pripadnog pramena konika. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmjerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti analogno kao i one u konačnosti. Točke A i C su dvostruke točke, a točke T_1 i T_2 pomoćne točke. Točke A i T_1 definiraju jednu, a točke C i T_2 drugu zajedničku tangentu svih konika pramena.

Ukoliko dvije pomoćne točke T_1 i T_2 padnu zajedno, tada se radi o točki $K = T_1 = T_2$ koja istovremeno pripada pravcima t_1 i t_2.

Nakon što su izračunani koeficijenti u jednadžbi pramena, primjena odgovarajućeg programa omogućila je grafičko prikazivanje pramena (Lapaine 1997). Postupak se odvija na taj način da se najprije za pojedinu krivulju pramena izračunaju koordinate niza uzastopnih točaka. Pritom se gustoća točaka uzduž pojedine krivulje i gustoća krivulja u pramenu mogu interaktivno regulirati. Gustoća točaka uzduž pojedine krivulje bira se tako da se pri iscrtavanju ne primijeti izlomljenost linije, ali da se istovremeno prevelikom gustoćom ne preopterećuje memorija i vrijeme izvođenja. Gustoća krivulja u pramenu određuje se odabirom koraka parametra na taj način da na slici ne bude previše linija i time slika nečitljiva i na djelovima precrna, ali da se istovremeno prikažu sve karakteristične krivulje pramena.

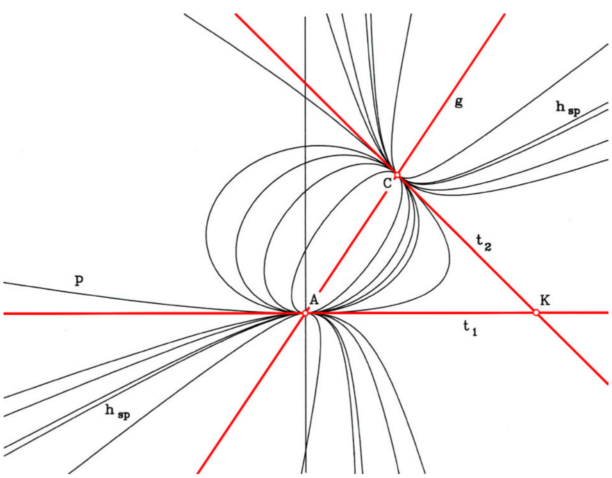
Nakon što smo zadovoljni s prikazom na ekranu monitora, slika se sprema u .DXF zapisu kako bismo je mogli učitati u AutoCAD i dalje uređivati. Tu se prvenstveno misli na opis slike, eventualno brisanje suvišnih elemenata te zadavanje boje, odnosno debljine onih linija koje na slici želimo posebno istaknuti.

Primjeri koji slijede označeni su u skladu s radom (Ščurić 1996).

Primjer 1. *Pramen tipa* VI_{1a}

Zadane su točke u homogenim koordinatama $A(1,0,0)$, $C(1,2,3)$ i pomoćna točka $K(1,5,0)$. Jednadžba pramena je:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + \mu(xy + y^2 - 5y) = 0$$

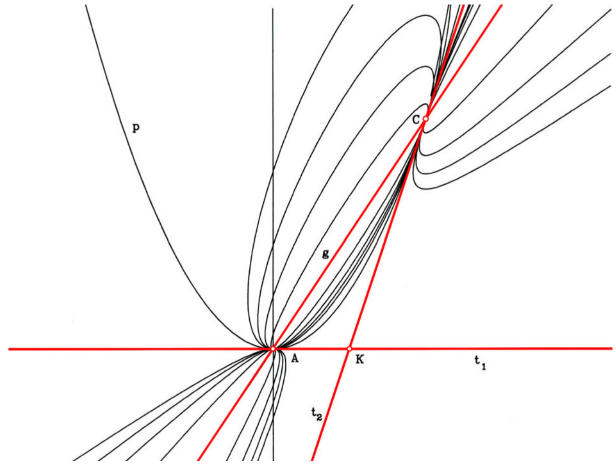


Slika 2. *Pramen tipa* VI_{1a}

Primjer 2. *Pramen tipa* $VI_{1,1a}$

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama $A(1,0,0)$, $C(1,4,6)$ i pomoćna točka $K(1,2,0)$. Jednadžba pramena je:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + \mu(3xy - y^2 - 6y) = 0$$

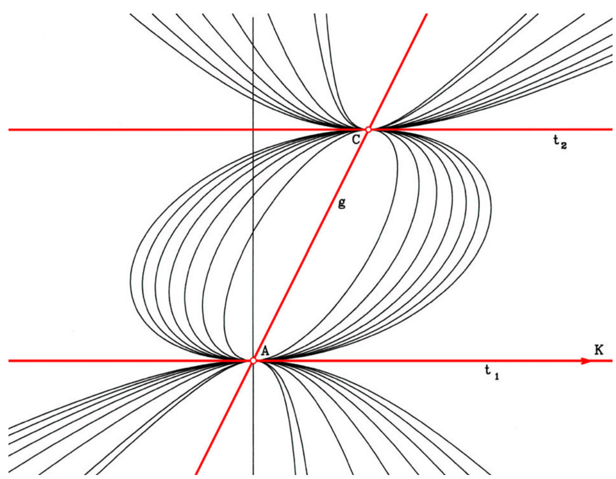


Slika 3. *Pramen tipa* $VI_{1,1a}$

Primjer 3. *Pramen tipa* VI_{1c}

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(1,0,0)$, $C(1,4,8)$ i pomoćna točka $K(0,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + \mu(y^2 - 8y) = 0$$

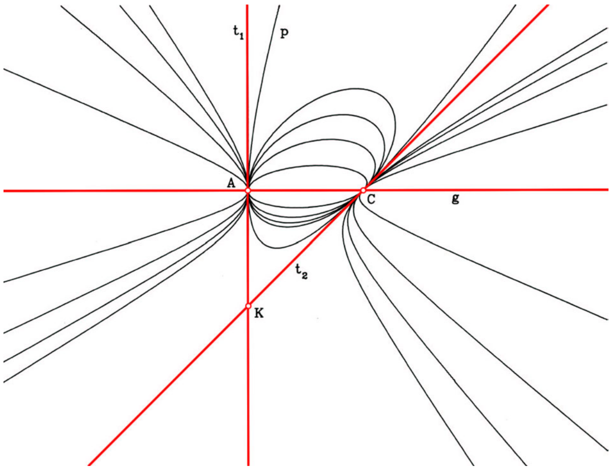


Slika 4. *Pramen tipa* VI_{1c}

Primjer 4. *Pramen tipa* VI_{2a}

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(1,0,0)$, $C(1,4,0)$ i pomoćna točka $K(1,0,-4)$. Jednadžba pramena je:

$$16y^2 + \mu(-4x^2 + 4xy + 16x) = 0$$

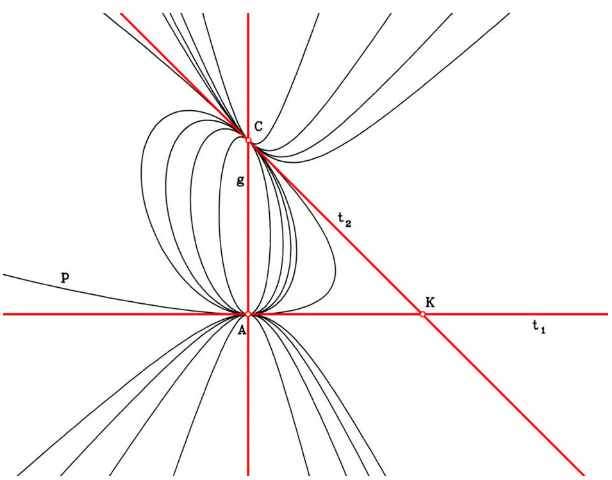


Slika 5. *Pramen tipa* VI_{2a}

Primjer 5. *Pramen tipa* VI_{3a2}

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(1,0,0)$, $C(1,0,6)$ i pomoćna točka $K(1,6,0)$. Jednadžba pramena je:

$$x^2 + \mu(xy + y^2 - 6y) = 0$$

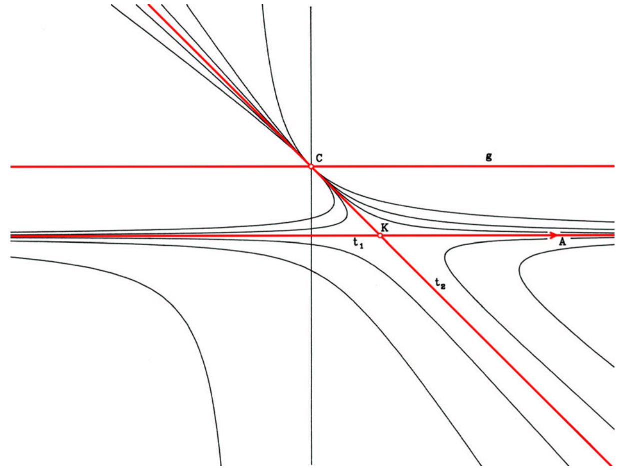


Slika 6. *Pramen tipa* VI_{3a2}

Primjer 6. *Pramen tipa* VI_4

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,0)$, $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $K(1,6,0)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 - 12y + 36 + \mu(xy + y^2 - 6y) = 0$$

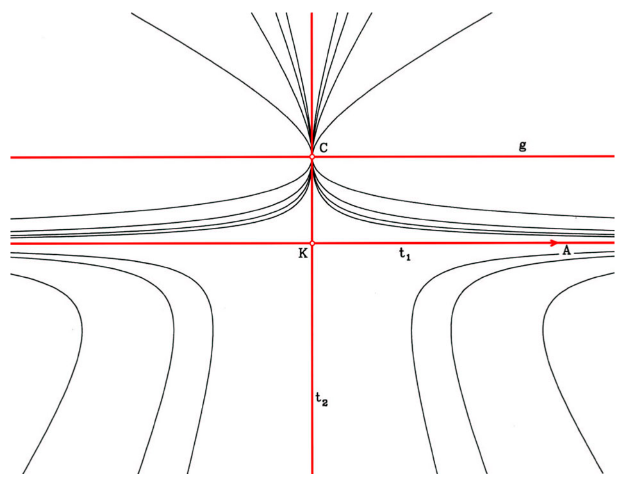


Slika 7. *Pramen tipa* VI_4

Primjer 7. *Pramen tipa* VI_5

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,0)$, $C(1,0,3)$ i pomoćna točka $K(1,0,0)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 - 6y + 9 + \mu xy = 0$$

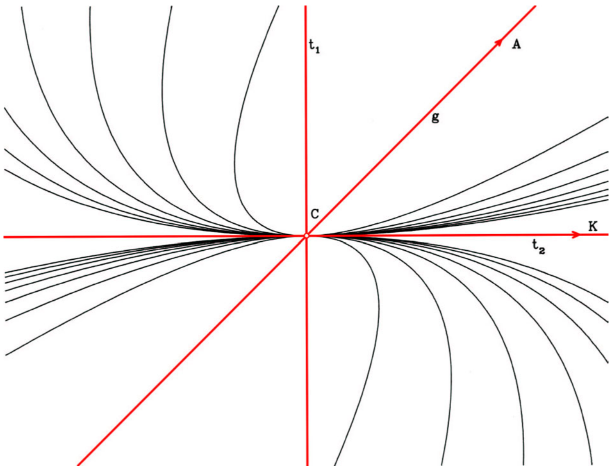


Slika 8. *Pramen tipa* VI_5

Primjer 8. *Pramen tipa* VI_{13}

Zadane dvostruke točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,1)$, $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $K(0,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$x^2 - 2xy + y^2 + \mu y = 0$$



Slika 9. *Pramen tipa* VI_{13}

Literatura

CESAREC, R. (1957): Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja, I dio. Školska knjiga, Zagreb.

LAPAINE, M. (1997): Grafički prikaz pramena konika pomoću računala. KoG 2, 43-47.

LAPAINE, M. (1999): Pramen konika zadan pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih točaka. KoG 4, 27-32.

LAPAINE, M., JOVIČIĆ, D. (1996): Grafički prikazi konika pomoću računala. KoG 1, 19-26.

SACHS, H. (1987): Ebene Isotrope Geometrie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.

ŠČURIĆ, V. (1996): Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ VI der Isotropen Ebene. Mathematica Pannonica, 7/1, 47-67.

Dr. sc. Miljenko Lapaine, dipl. inž. mat.
Sveučilište u Zagrebu
Geodetski fakultet
e-mail: mlapaine@public.srce.hr