Veza između linearnog operatora s prostora $\mathbf{X}$ u $\mathbf{X}$ i matrica ostvaruje se na osnovu činjenice da je svaki linearni operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ potpuno određen svojim vrijednostima na vektorima baze prostora $\mathbf{X}$ (6,str.60; 1,str.182).

Neka je npr. $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ baza (1,str.244) 3-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbf{X}$ i $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ linearni operator određen svojim vrijednostima $A\mathbf{e_1}, A\mathbf{e_2}, A\mathbf{e_3}$ na bazi. Rastavimo li vektore $A\mathbf{e_1}, A\mathbf{e_2}, A\mathbf{e_3}$ po vektorima baze $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ dobivamo

$$\begin{aligned} A\mathbf{e_1} &= a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2} + a_{31}\mathbf{e_3} \\ A\mathbf{e_2} &= a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + a_{32}\mathbf{e_3} \\ A\mathbf{e_3} &= a_{13}\mathbf{e_1} + a_{23}\mathbf{e_2} + a_{33}\mathbf{e_3} \end{aligned} \tag{2}$$

gdje smo komponente vektora $A\mathbf{e_1}$ u bazi $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ označili sa a_{11}, a_{21}, a_{31}, itd.

Matricu

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{3}$$

zovemo *matricom operatora* A u bazi $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$.

Dakle, u bazi $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ je svakom linearnom operatoru $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ pridružena matrica (3) i obratno, za matricu (3) postoji jedinstveni linearni operator A takav da vrijedi (2), što je posljedica teorema o jedinstvenom prikazu vektora u bazi (6,str.59).

Jednakost linearnih operatora kao i operacije s linearnim operatorima svode se na jednakost i operacije s matricama.

Služit ćemo se sljedećim operacijama s linearnim operatorima (6,str.56):

- *Zbroj linearnih operatora*;
- *Produkt skalara i linearnog operatora*;
- *Kompozicija linearnih operatora*.

Navest ćemo bez dokaza svojstva tih operacija:

- *Zbroj linearnih operatora je linearni operator*;
- *Produkt skalara i linearnog operatora je linearni operator*;
- *Kompozicija linearnih operatora linearni je operator (produkt operatora)* (6,str.59).

Osim toga, potrebna je i operacija skalarnog produkta te pojam ranga i defekta operatora.

Skalarni produkt

Definicija 1 *Neka su* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *zadani vektori iz vektorskog prostora* $\mathbf{X}$ *i neka je* φ *kut među njima. Skalarni produkt (umnožak) vektora* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *definira se sa:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{4}$$

Time je definirano preslikavanje: $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}$.

Skalarni umnožak dvaju vektora danih u matričnom zapisu sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

glasi:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \text{ odnosno } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{6}$$

Rang i defekt operatora. Regularni operator

Neka je A matrica pridružena linearnom operatoru $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$. Tada je jednadžba

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

ekvivalentna homogenom linearnom sustavu (3, str.63)

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Promatramo li skup

$$KerA = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} | A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \tag{9}$$

koji nazivamo *jezgrom* ili *nulpotprostorom* operatora A, vidimo da je potprostor rješenja homogenog linearnog sustava jednak jezgri operatora. Taj je potprostor razapet s $n - r$ vektora, gdje je n dimenzija prostora $\mathbf{X}$, a r rang matrice A (3, str.48). Dimenziju tog potprostora odnosno jezgre nazivamo *defektom operatora* i označavamo k.

Svakom linearnom operatoru pridružen je i skup

$$ImA = \{\mathbf{y} \in \mathbf{X} | \mathbf{y} = A(\mathbf{x}),\ za\ neki\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}, \tag{10}$$

koji nazivamo *slikom* operatora A, a koji je i sam vektorski potprostor. Njegovu dimenziju označavamo r.

Nije teško dokazati sljedeći teorem koji je sada intuitivno jasan:

Teorem 1 *Ako je* n *dimenzija prostora* $\mathbf{X}$, k *dimenzija jezgre, a* r *dimenzija slike operatora* $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, *tada vrijedi:* $n = r + k$.

Dokaz (3,str.138).

Posebnu skupinu operatora tvore takozvani *regularni operatori*. To su bijektivna preslikavanja pa stoga postoji njihov inverz i mora biti $\dim(KerA) = 0$. Kao što smo i ranije napomenuli, operacije s linearnim operatorima svode se na operacije s matricama pa stoga vrijedi: *Operator je regularan ako i samo ako je pripadna matrica regularna*.

3. Slične matrice

Linearnom operatoru su u različitim bazama pridružene različite matrice. Bit će od posebnog interesa potražiti takvu bazu u kojoj će prikaz linearnog operatora biti najjednostavniji.

Postavljamo stoga pitanje koja je veza između dviju matrica A i B koje su prikaz istog operatora $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ ali u različitim bazama $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ odnosno $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Poznato je (3,str.129; 1,str.428) da, ako je A prikaz operatora A u bazi $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ prostora $\mathbf{X}$ i T matrica prijelaza (3,str.129) iz te baze u novu bazu $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, u novoj bazi operatoru A odgovara matrica

$$\mathrm{B} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}. \tag{11}$$

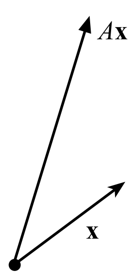
Za dvije matrice A i B, za koje postoji *regularna* (invertibilna) matrica T sa gornjim svojstvom kažemo da su slične. Dakle, operatoru A odgovaraju u različitim bazama slične matrice. Od zajedničkih svojstava sličnih matrica ovdje ćemo izdvojiti da slične matrice imaju istu determinantu (3,str.129; 6,str.195), tj.

$$det(\mathrm{B}) = det(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}) = det(\mathrm{T}^{-1})det(\mathrm{A})det(\mathrm{T}) = det(\mathrm{A}) \tag{12}$$

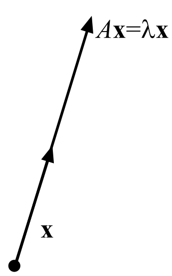
jer za regularne matrice vrijedi: $det(\mathrm{T}^{-1}) = 1/det(\mathrm{T})$.

4. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Neka je $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ linearni operator, a $\mathbf{x}$ vektor iz $\mathbf{X}$. Općenito djelovanje linearnog operatora prikazano je slikom 1.



Slika 1.



Slika 2.

Definicija 2 *Za realan broj* λ *kažemo da je svojstvena (karakteristična) vrijednost linearnog operatora* $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *ako postoji vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *takav da je*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{13}$$

Za takav vektor kažemo da je *svojstven (karakterističan)* vektor operatora A i da pripada svojstvenoj vrijednosti λ (slika 2).

Jednakost (13) može se napisati u obliku

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{14}$$

odnosno matrično

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}, \qquad (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathbf{0}, \tag{15}$$

gdje je A matrica pridružena operatoru A, čime se nalaženje svojstvenih vrijednosti λ svodi na rješavanje linearnog homogenog sustava jednadžbi. Poznato je (3,str.145) da takav sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je

$$det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}) = |\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Jednadžba (16) po λ - *karakteristična (svojstvena) jednadžba* matrice A (operatora A);

$k_{\mathrm{A}} = det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})$ - *karakterističan (svojstven) polinom* matrice A (operatora A).

Gornju tvrdnju možemo sada izreći i ovako: Skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ je svojstvena vrijednost operatora A (matrice A) ako i samo ako je λ korijen karakteristične jednadžbe $k_{\mathrm{A}} = 0$.

Važno je napomenuti da karakteristični polinom ne ovisi o izboru baze. Naime, karakteristični polinom se računa preko determinante matrice $(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})$. Sama matrica ovisi o izboru baze, ali ne i njena determinanta. Svake takve dvije matrice su slične i zbog toga imaju isti svojstveni polinom tj. $|\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}| = |\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}^{-1}\mathrm{BT}|$.

Kako su svojstvene vrijednosti nul-točke karakterističnog polinoma, to ni one ne ovise o izboru baze. Zato pri računanju svojstvene vrijednosti možemo uzeti povoljniju bazu za prikaz operatora A.

5. Dijagonalizacija

U ovom ćemo se dijelu posvetiti problemu pronalaženja baze vektorskog prostora $\mathbf{X}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora dane matrice A (operatora A). Tako odabrana baza može se upotrijebiti za izučavanje geometrijskih svojstava dane matrice kao i za pojednostavljenje računa u koji je ona uključena.

Definicija 3 *Za matricu* A *(operator* A*) kažemo da dopušta dijagonalizaciju ako postoji regularna matrica* T *takva da je* $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ *dijagonalna matrica. Za matricu* T *se kaže da dijagonalizira* A.

Sljedeći teorem pokazuje da je problem svojstvenih vrijednosti ekvivalentan problemu dijagonalizacije.

Teorem 2 *Za kvadratnu matricu* A *reda* n *su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) A *dopušta dijagonalizaciju.*

(ii) A *ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora.*

Dokaz (1, str. 365).

Navedeni teorem osigurava da se svaka matrica reda n sa n linearno nezavisnih svojstvenih vektora može dijagonalizirati, dok je njihova linearna nezavisnost osigurana sljedećim teoremom.

Teorem 3 *Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su linearno nezavisni.*

Dokaz (3,str.147).

Važna posljedica ovog teorema: Ako su sve nul-točke karakterističnog polinoma različite, tada postoji baza prostora koju čine svojstveni vektori promatranog operatora. Neka su to, za $n = 3$, vektori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$. Budući da vrijedi $A(\mathbf{v_1}) = \lambda_1\mathbf{v_1}, A(\mathbf{v_2}) = \lambda_2\mathbf{v_2}, A(\mathbf{v}_3) = \lambda_3\mathbf{v}_3$, njegova je matrica u ovoj bazi dijagonalna (3,str.148).

Napomenimo, ako je $\mathbf{v}$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, odgovaraju joj i svi vektori $\alpha\mathbf{v}, (\alpha \neq 0)$. Osim toga, ako su $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, tada je zbog linearnosti operatora i $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2}$ svojstveni vektor za istu vrijednost λ. Drugim riječima, za svaku svojstvenu vrijednost λ je svaki vektor ($\neq \mathbf{0}$) iz potprostora $Ker(\lambda I - A)$ svojstveni vektor operatora A, budući da

$$(\lambda I - A)(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\,.$$

Potprostor $Ker(\lambda I - A)$ nazivamo svojstveni potprostor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Postupak nalaženja matrice T koja dijagonalizira matricu A, ukratko je, za $n = 3$, sljedeći:

Korak 1. Odredimo karakterističan polinom $k_{\mathrm{A}}(\lambda) = 0$ matrice A;

Korak 2. Odredimo nul-točke $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ karakterističnog polinoma, što su svojstvene vrijednosti matrice A;

Korak 3. Rješavanjem homogenih sustava $(\lambda_i \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3$ dobiju se svojstveni vektori matrice A;

Korak 4. Ukoliko matrica dopušta dijagonalizaciju formiramo matricu T kojoj su stupci svojstveni vektori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$;

Korak 5. Matrica $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ (operatora A) je dijagonalna sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ na glavnoj dijagonali:

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Primjer: Za danu matricu F odredimo matricu T koja ju dijagonalizira.

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Korak 1. Karakterističan polinom matrice F glasi

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0.$$

Korak 2. Nul-točke karakterističnog polinoma, odnosno svojstvene vrijednosti matrice F su:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Korak 3. Rješavanjem homogenih sustava dobiju se tri linearno nezavisna svojstvena vektora:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Korak 4. Formiranje matrice T:

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 17 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korak 5. Matrica $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{FT}$ glasi:

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{FT} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Simetrični operator, simetrična matrica

Jedan od specijalnih tipova linearnih operatora je *simetričan* operator. Za linearni operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ kažemo da je simetričan, ako vrijedi

$$A\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} \tag{18}$$

za sve $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{X}$. Matrica pridružena simetričnom linearnom operatoru je simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu.

Neka je operatoru A pridružena realna matrica A. Označimo li s A^{T} transponiranu matricu polazne matrice, A će biti simetrična onda i samo onda ako vrijedi

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}. \tag{19}$$

Navest ćemo neka važnija svojstva simetrične matrice.

Teorem 4 *Ako je* A *simetrična matrica, onda su sve njezine svojstvene vrijednosti realne.*

Dokaz (4.str.147).

Teorem 5 *Ako je* A *simetrična matrica, tada su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno okomiti.*

Dokaz (4.str.147).

7. Ortonormirana baza, ortogonalne matrice

Za bazu prostora **X** kažemo da je *ortonormirana* ako su vektori baze među sobom okomiti (ortogonalni) i svaki ima duljinu (normu) jedan. Iz ortogonalnog skupa ne-nul vektora možemo dobiti ortonormirani, dijeljenjem svakog vektora njegovom normom. Cilj nam je dalje pokazati da je svaka simetrična matrica slična dijagonalnoj matrici te da postoji ortogonalna baza koju čine njeni svojstveni vektori.

Neka je T matrica čiji su stupci ortonormirani svojstveni vektori matrice A.

Definicija 4 *Za matricu* T *kažemo da je ortogonalna ako su njeni stupci ortonormirani vektori.*

Iz svojstva simetrične matrice možemo zaključiti da postoji ortogonalna matrica T takva da je $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{AT}$ dijagonalna. Za ortogonalne se matrice može pokazati da vrijedi:

1) $\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}$, tj. inverzna matrica matrice T jednaka je transponiranoj matrici od T;

2) Determinanta ortogonalne matrice jednaka je 1 ili -1. (3,str.172)

Iz definicije ortogonalnog operatora (ortogonalne matrice) lako se može provjeriti da ortogonalni operator prevodi ortonormiranu bazu ponovno u ortonormiranu bazu. Da bi baze bile jednako orjentirane mora determinanta operatora (matrice) biti veća od nule (6, str. 42), što u jeziku ortogonalnih operatora znači da determinata mora biti jednaka 1.

8. Dijagonalizacija simetrične matrice

Željeli bismo dalje pokazati da je svaka simetrična matrica slična dijagonalnoj matrici. Uz teorem 4 nameće se pitanje što se događa sa svojstvenim vektorima koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti, tj. kolika je dimenzija svojstvenog potprostora koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ čija je kratnost veća od 1. Odgovor ćemo preuzeti iz (3, str.173), naime, ima li svojstvena vrijednost kratnost k, odgovarajući svojstveni potprostor će biti k-dimenzionalan i unutar njega možemo pronaći k međusobno okomitih vektora.

Kao zaključak svega do sada rečenog, za $n = 3$, vrijedi:

Svaka simetrična matrica A trećeg reda posjeduje točno 3 realne svojstvene vrijednosti (brojeći njihovu višestrukost) i 3 međusobno okomita svojstvena vektora. Ona je dakle slična dijagonalnoj matrici B tj. postoji ortogonalna matrica T i realni brojevi λ_1, λ_2, λ_3, tako da je

$$\mathrm{B} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{AT} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Odnosno, za svaku simetričnu matricu postoji ortonormirana baza koju čine normirani svojstveni vektori te matrice.

9. Kvadratna forma, dijagonalizacija kvadratne forme

Linearna forma.

Linearna forma od 3 varijable je izraz oblika

$$L(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \equiv [a_1\, a_2\, a_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

To je funkcija od 3 varijable x_1, x_2, x_3 prvog stupnja, pa u razvoju ne može biti članova koji bi sadržavali umnožak varijabli.

Kvadratna forma.

Kvadratna forma od 3 varijable x_1, x_2, x_3 je izraz koji se može zapisati kao

$$K(x_1,x_2,x_3) = [x_1\, x_2\, x_3]\,\mathrm{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

gdje je A matrica reda 3. Uz oznaku

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

može se pisati u obliku

$$K(x_1,x_2,x_3) = x^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j. \tag{23}$$

Članove oblika $a_{ij}x_i x_j$, $(i \neq j)$ zovemo *mješovitim članovima* kvadratne forme.

Dijagonalizirati kvadratnu formu podrazumijeva riješiti se mješovitih članova, čime se postiže takozvana *kanonska forma*.

10. Plohe drugog reda

Pod pojmom ploha drugoga reda podrazumijevamo skup točaka u prostoru koji je određen jednadžbom drugog stupnja u kartezijevim pravokutnim koordinatama x, y, z tj.

$$\begin{aligned} F(x,y,z) \equiv\, & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

gdje su koeficijenti $a_{11},\dots,a_{44}$ realni brojevi i barem jedan od brojeva a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} različit od nule. Funkciju F možemo zapisati matrično:

$$F(x,y,z) = [x\,y\,z\,1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{A}_{44} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{26}$$

su realne i simetrične.

Jednadžbu (24) moguće je zapisati i u obliku:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = & [x\,y\,z]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ & + 2[a_{14}\,a_{24}\,a_{34}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Postupak svođenja kvadratne forme unutar jednadžbe (24) na kanonski oblik je sljedeći:

Realna i simetrična matrica A_{44} može se napisati u obliku

$$\mathrm{A}_{44} = \mathrm{TBT}^{\mathrm{T}} \tag{28}$$

gdje su matrice B i T oblika:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{T} = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}]. \tag{29}$$

Napomenimo da za centralnu kvadriku matrica A_{44} mora biti regularna i da su u tom slučaju sve svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2, λ_3 matrice B različite od nule. Osim toga, budući da se radi o realnoj simetričnoj matrici svojstvene su vrijednosti realne.

Stupci ortogonalne matrice T komponente su jediničnih svojstvenih vektora $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ matrice A_{44} koji pripadaju svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2, λ_3, poredani tako da bude $det\mathrm{T} = 1$.

Matrica T predstavlja matricu prelaza iz jednog desnog kartezijevog sustava u drugi također desni kartezijev sustav. Neka su sustavi $(O;x,y,z)$ i $(O;x',y',z')$.

S pravom se može postaviti pitanje kako odrediti svojstvene vektore u slučaju da svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2, λ_3 nisu međusobno različite. Ukoliko su sve međusobno jednake, lako se vidi da je svaki vektor u prostoru svojstven vektor matrice A_{44}. Ako su dvije svojstvene vrijednosti međusobno jednake, na primjer $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, odrede se pripadni svojstveni vektori, $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_3}$, dok se treći vektor dobije kao njihov vektorski produkt, uz uvijet da $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ čine desni sustav vektora, tj. $det[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}] = 1$.

Dakle, transformacijom

$$\mathrm{T} = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}] \tag{30}$$

prelazimo na nove koordinate x', y', z':

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Zbog ortogonalnosti matrice T vrijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{32}$$

dok izraz (27) prelazi u

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= [x\,y\,z]\,\mathrm{TBT}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 2[a_{14}\,a_{24}\,a_{34}]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + a_{44} = 0, \\ F(x',y',z') &= [x'\,y'\,z']\,\mathrm{B}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 2[a_{14}\,a_{24}\,a_{34}]\,\mathrm{T}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + a_{44} = 0, \\ F(x',y',z') &= [x'\,y'\,z']\,\mathrm{B}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + 2[\alpha\beta\gamma]\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + a_{44} = 0, \\ F(x',y',z') &= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' + 2\gamma z' + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

gdje smo označili

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathrm{T}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Linearni se članovi x', y', z', u (33) mogu eliminirati translacijom koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \tfrac{\alpha}{\lambda_1} \\ y'' &= y' + \tfrac{\beta}{\lambda_2} \\ z'' &= z' + \tfrac{\gamma}{\lambda_3} \end{aligned} \;,\ \text{odnosno}\quad \begin{aligned} x' &= x'' - \tfrac{\alpha}{\lambda_1} \\ y' &= y'' - \tfrac{\beta}{\lambda_2} \\ z' &= z'' - \tfrac{\gamma}{\lambda_3} \end{aligned}\;. \tag{35}$$

Jednadžba kvadrike poprima **kanonski oblik**

$$F(x'',y'',z'') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + a'_{44} = 0 \tag{36}$$

gdje je

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2} - \frac{\gamma^2}{\lambda_3}. \tag{37}$$

Nije teško pokazati da vrijedi:

$$a'_{44} = \frac{det(A)}{det(A_{44})}. \tag{38}$$

11. Klasifikacija centralnih kvadrika

Kanonski oblik jednadžbe kvadrike (36) zapišimo u obliku

$$\frac{x''^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_1}}+\frac{y''^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_2}}+\frac{z''^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_3}}=-1 \tag{39}$$

i označimo

$$a=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{\lambda_1}\right|},\quad b=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{\lambda_2}\right|},\quad c=\sqrt{\left|\frac{a'_{44}}{\lambda_3}\right|}. \tag{40}$$

Vrijednosti a, b, c nazivamo poluosima kvadrike.

1) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1=\mathrm{sgn}\lambda_2=\mathrm{sgn}\lambda_3=\mathrm{sgn}a'_{44}$ i $a'_{44}\neq 0$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=-1 \tag{41}$$

koju nazivamo jednadžbom **imaginarnog elipsoida** s poluosima a, b, c.

2) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1=\mathrm{sgn}\lambda_2=\mathrm{sgn}\lambda_3\neq\mathrm{sgn}a'_{44}$ i $a'_{44}\neq 0$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=1 \tag{42}$$

koju nazivamo jednadžbom **realnog elipsoida** s poluosima a, b, c.

3) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1=\mathrm{sgn}\lambda_2=\mathrm{sgn}\lambda_3$ i $a'_{44}=0$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{z''^2}{c^2}=0 \tag{43}$$

koju nazivamo jednadžbom **točke** ili **imaginarnog stošca** s poluosima a, b, c.

4) Ako je $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\cdot(\mathrm{sgn}\lambda_2)=1$ i $(\mathrm{sgn}\lambda_3)\cdot(\mathrm{sgn}a'_{44})=1$ i $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\neq(\mathrm{sgn}\lambda_3)$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=1 \tag{44}$$

koju nazivamo jednadžbom **jednoplošnog hiperboloida** s poluosima a, b, c.

5) Ako je $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\cdot(\mathrm{sgn}\lambda_2)=1$ i $(\mathrm{sgn}\lambda_3)\cdot(\mathrm{sgn}a'_{44})=-1$ i $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\neq(\mathrm{sgn}\lambda_3)$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=-1 \tag{45}$$

koju nazivamo jednadžbom **dvoplošnog hiperboloida** s poluosima a, b, c.

6) Ako je $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\cdot(\mathrm{sgn}\lambda_2)=1$ i $(\mathrm{sgn}\lambda_1)\neq(\mathrm{sgn}\lambda_3)$ i $a'_{44}=0$ tada (39) možemo napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-\frac{z''^2}{c^2}=0 \tag{46}$$

koju nazivamo jednadžbom **realnog stošca** s poluosima a, b, c.

12. Primjeri

Primjer 1.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z+30=0.$

Karakteristična jednadžba:

$\lambda^3-15\lambda^2+66\lambda-80=0$

Svojstvene vrijednosti:

$\lambda_1=5,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=2.$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix},$$

$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

$a'_{44}=25\ \Rightarrow\ \mathrm{sgn}\lambda_1=\mathrm{sgn}\lambda_2=\mathrm{sgn}\lambda_3=\mathrm{sgn}a'_{44}\ \&\ a'_{44}\neq 0.$

Radi se o imaginarnom elipsoidu.

Kanonski oblik jednadžbe: $5x''^2+8y''^2+2z''^2+25=0.$

Primjer 2.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0.$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^3-15\lambda^2+66\lambda-80=0$

Svojstvene vrijednosti: $\lambda_1=5,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=2.$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix},$$

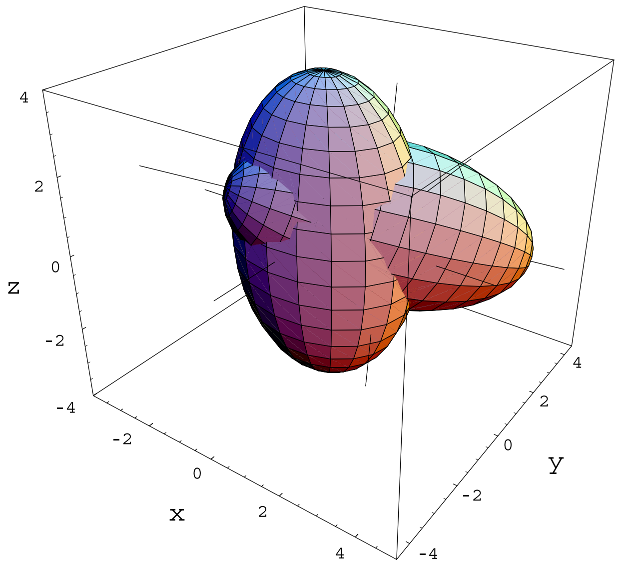
$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

$a'_{44}=-32\ \Rightarrow$

$\mathrm{sgn}\lambda_1=\mathrm{sgn}\lambda_2=\mathrm{sgn}\lambda_3\neq\mathrm{sgn}a'_{44}\ \&\ a'_{44}\neq 0.$

Radi se o realnom elipsoidu.

Kanonski oblik jednadžbe: $5x''^2+8y''^2+2z''^2-32=0.$



Primjer 3.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$4x^2+6y^2+6z^2+4xy+6xz+8x+4y+6z+4=0.$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^3-16\lambda^2+71\lambda-66=0$

Svojstvene vrijednosti:

$\lambda_1=1.25834, \lambda_2=6, \lambda_3=8.74166.$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}0\\-3\\2\end{bmatrix}, \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}-1.58055\\0.666667\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}0.913886\\0.666667\\1\end{bmatrix},$$

$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

$a'_{44}=0 \Rightarrow \text{sgn}\lambda_1=\text{sgn}\lambda_2=\text{sgn}\lambda_3 \,\&\, a'_{44}=0.$

Radi se o imaginarnom stošcu.

Kanonski oblik jednadžbe:

$1.25834x''^2+6y''^2+8.74166z''^2=0.$

Primjer 4.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$4x^2-2y^2+6z^2+10xy+2xz-8yz+8x+10y+2z+4=0.$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^3-8\lambda^2-38\lambda+300=0$

Svojstvene vrijednosti:

$\lambda_1=-6.14143, \lambda_2=6, \lambda_3=8.14143.$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}-1.42008\\2.68034\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}-0.579916\\0.680336\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix},$$

$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

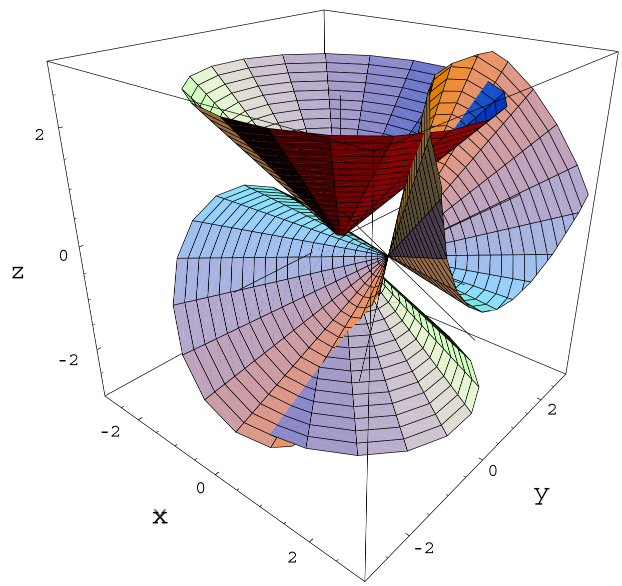
$a'_{44}=0 \Rightarrow$

$(\text{sgn}\lambda_1)\cdot(\text{sgn}\lambda_2)=1 \,\&\, \text{sgn}\lambda_1 \neq \text{sgn}\lambda_3 \,\&\, a'_{44}=0.$

Radi se o realnom stošcu.

Kanonski oblik jednadžbe:

$6x''^2+8.74166y''^2-6.1414z''^2=0.$



Primjer 5.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0.$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^3-10\lambda^2+8\lambda+64=0$

Svojstvene vrijednosti: $\lambda_1=4, \lambda_2=8, \lambda_3=-2.$

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

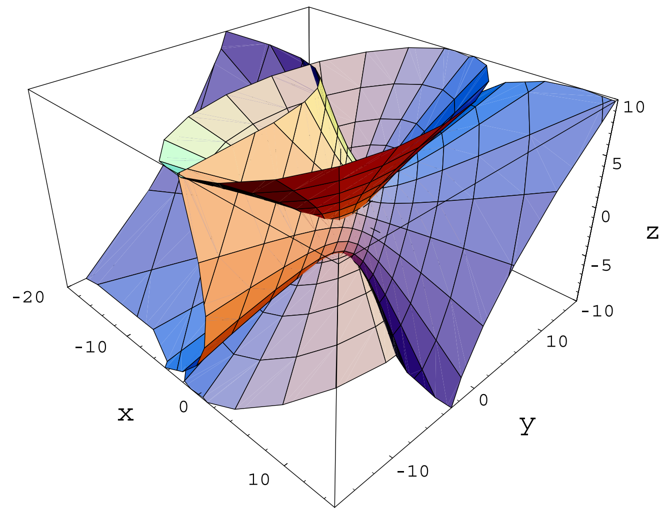
$a'_{44}=-5 \Rightarrow$

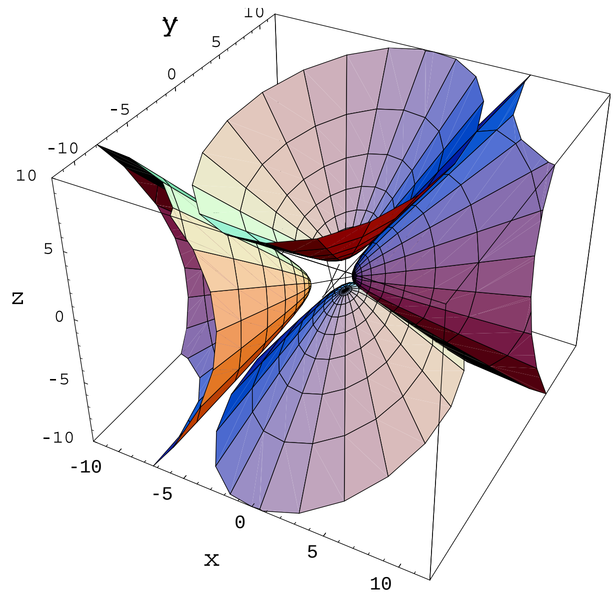
$(\text{sgn}\lambda_1)\cdot(\text{sgn}\lambda_2)=1 \,\&\, (\text{sgn}\lambda_3)\cdot(\text{sgn}a'_{44})=1$
$\&\, \text{sgn}\lambda_1 \neq \text{sgn}\lambda_3.$

Radi se o jednoplošnom hiperboloidu.

Kanonski oblik jednadžbe:

$4x''^2+8y''^2-2z''^2-5=0.$





Primjer 6.

Neka je ploha zadana jednadžbom:

$x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0.$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^3-7\lambda^2+36=0$

Svojstvene vrijednosti: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$.

Svojstveni vektori:

$$\mathbf{v_1}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v_2}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v_3}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$det[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}]=1.$

$a'_{44}=6 \Rightarrow (\text{sgn}\lambda_1)\cdot(\text{sgn}\lambda_2)=1\,\&\,(\text{sgn}\lambda_3)\cdot(\text{sgn}a'_{44})=-1\,\&\,\text{sgn}\lambda_1\neq\text{sgn}\lambda_3.$

Radi se o dvoplošnom hiperboloidu.

Kanonski oblik jednadžbe: $3x''^2+6y''^2-2z''^2+6=0.$

Literatura

[1] ANTON, H., RORRES, C.: *Elementary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[2] BLANUŠA, D.: *Viša matematika*, 1 dio, drugi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

[3] ELEZOVIĆ, N.: *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.

[4] GURSKIJ, E. I.: *Osnove linearne algebre i analitičke geometrije*, (na ruskom), Višejšaja škola, Minsk, 1982.

[5] HORVATIĆ K.: *Linearna algebra*, II dio, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1995.

[6] KUREPA, S.: *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[7] LAPAINE, M., JOVIČIĆ, D.: *Grafički prikaz konika pomoću računala*, KOG, broj 1, Zagreb, 1996.

Dr. sc. Jelena Beban–Brkić
e-mail: jbeban@geodet.geof.hr

Ivan Medved, student
e-mail: medved91@hotmail.com

Sveučilište u Zagrebu
Geodetski fakultet