

Professionell Arbeit
Angenommen 25. 05. 2001.

ANA SLIEPČEVIĆ

Eine Anwendung der perspektive Kollineation

Jedna primjena perspektivne kolineacije

SAŽETAK

Cilj je ovog rada da, podsjećanjem na neke stare geometrijske konstrukcije izvedene pomoću perspektivne kolineacije i afineteta, ponovno aktualizira crtež u geometriji, čija je izrada danas olakšana upotrebom računala. Zadaci se rješavaju metodom perspektivno kolinearno pridruženih figura, tj. svaki se problem u vezi s konikom perspektivnom kolineacijom preslika u elementarno rješiv zadatak u vezi s kružnicom, što rezultira geometrijski točnim rješenjem početnog problema.

Cljučne riječi: konika, perspektivna kolineacija, perspektivna afinost

One Application of Perspective Collineation

ABSTRACT

The aim of this paper is to remind us of some previous geometrical constructions derived by the means of a perspective collineation and an affinity. It should refresh the drawing in geometry. Nowadays it is much easier by using the computer. The tasks are solved with the method of the collinear corresponded figures. Each problem connected with a conic by using the method of a perspective collineation can be transformed into the elementary problem connected with a circle. It results with the geometrically correct solution of the initial problem.

Key words: conic, perspective collineation, affinity

MSC 2000: 51N05

Die im folgenden initiierte Reihen unternimmt den Versuch, einige Themen aus dem "Erdgeschoß der Geometrie" wiederzubeleben. Es sind alte, bekannte Sachverhalte, die noch immer gefallen finden können. Sie sollten aber vorallem die Leserschaft des KoG anregen und ermuntern "ihre Lieblingsjuwelen" aus dem Erdgeschoß der Geometrie im KoG vorzustellen. Vielleicht hat jemand in der Tischlade eine besondere elegante Konstruktion oder weiß von einer modernen Anwendung alten konstruktiven Materials? Wenn jemand dieser Einladung nachkommt und so eine Reihe von Veröffentlichungen initiiert wird, die zu einer Sammlung interessanten konstruktiven Materials führt, dann ist das Ziel der Autorin erreicht.

Die folgenden, mit konstruktiv einfachen und bekannten Mitteln lösbaren Aufgaben betreffen *Kegelschnitte*, also eine in der Technik sehr häufig angewendete Kurvenklasse. Diese Kurven sind bekanntlich dadurch ausgesuchend, daß sie sämtlich untereinander kollinear sind. Sie können also durch eine lineare Bijektion, die sogenannte *Kollineation* oder im Spezialfall eine *Affinität* ineinander übergeführt werden. Insbesondere läßt sich jeder Kegel-

schnitt der Anschauungsebene als kollineares Bild eines (euklidischen) Kreises auffassen, wobei die Kollineation, bzw. Affinität, speziell durch eine perspektive Kollineation (bzw. perspektive Affinität) realisiert werden kann.

Der Schauplatz für die konstruktive (und zweckmäßige analytische) Behandlung der Kegelschnitte ist demgemäß die *projektiv abgeschlossene Anschauungsebene P*, wie sie vom Umgang mit der Zentralprojektion (Perspektive) vertraut ist. Für Ellipsen reicht hingegen schon die Anschauungsebene als Schauplatz der Behandlung aus. Im CAGD kommt unter anderen die Aufgabe vor, durch eine Anzahl von Stützstellen, also Punkten in Π , eine möglichst glatte Kurve möglichst niedriger Ordnung hindurchzulegen. Durch fünf solche Punkte allgemeiner Lage ist eine solche glatte Kurve ein eindeutig bestimmter Kegelschnitt. Durch technisch-physikalischen Erfordernisse kann dabei die Frage nach den Stellen extremaler Krümmung, also den Scheiteln dieser "Splein-Kurve", motiviert sein.

Im folgenden werden einige solchen Aufgabe konstruktiv dadurch gelöst, daß die Angabepunkte (bzw. Anga-

betangenten) des Kegelschnittes mittels einer geeigneten perspektiven Kollineation in Punkte (bzw. Tangenten) eines Kreises transformiert werden. Diese Methode setzt nur die Kenntnisse der Perspektivdarstellung eines Kreises, also elementar geometrische Überlegungen - eventuell räumlich interpretierbar - voraus. Andere Methoden zur Lösung solcher Aufgaben setzen Kenntnisse der Projektiven Geometrie voraus, die dem Konstruktor unter Umständen nicht zur Verfügung stehen. Vom Standpunkt "geometrischen Abbildungsmethoden" (siehe [2]) werden im folgenden vorgeführten Aufgaben mittels der *Methode kollinearier bzw. affiner Hilfsfiguren* gelöst und elementargeometrisch interpretiert.

Aufgabe 1.

Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden p mit jenem Kegelschnitt c , der durch fünf allgemein liegenden Punkte A, B, C, D, E hindurch geht.

Lösungsansatz:

Unter allen möglichen Kollineationen, die c in einen Kreis c' überführen, wählen wir eine perspektive Kollineation κ , die z. B. A, B, C, D in ein Rechteck $A'B'C'D'$ überführen soll. Der fünfte Punkt E muß dabei in einen Kreisbogen E' übergehen, sodaß E' , verbunden mit gegenüberliegenden Rechteckspunkten B', D' zwei orthogonale Geraden liefert (Thales).

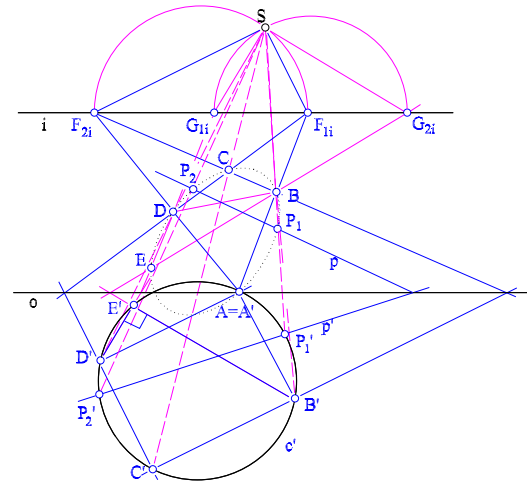
Konstruktive Lösung:

$AB \cap CD = F_{1i}$, $BC \cap DA = F_{2i}$. Diese beiden Punkte müssen unter κ in Fernpunkte F'_{1i}, F'_{2i} , orthogonaler Richtungen übergehen, also die Verschwindungsgerade i der gesuchten perspektiven Kollineation κ aufspannen. Die Geraden EB und ED schneiden i in G_{1i} , und G_{2i} , die zu einem weiteren Paar von Fernpunkten orthogonaler Richtungen gehören. Aus dem gesuchten Kollineationszentrum S müssen sich also F_{1i} und F_{2i} , sowie G_{1i} , und G_{2i} , durch orthogonale Geradenpaare projizieren, weshalb S der Schnittpunkt der beiden Thales-Kreise über (F_{1i}, F_{2i}) bzw. (G_{1i}, G_{2i}) sein muß.

Nun kann noch die Kollineationsachse o beliebig parallel zu i ($o \neq i$) gewählt werden. In Figur 1. ist o durch A gelegt worden, was $A = A'$ zur Folge hat.

Als Ergebnis müssen A', B', C', D' ein Rechteck bilden, also einen Umkreis c' besitzen der auch E' enthält.

Mittels der Umkehrung κ^{-1} der Kollineation κ kann nun jeder weitere Punkt X' von c' auf einen Punkt X von c übertragen werden. Insbesondere kann man so die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden p mit dem Kegelschnitt c als Urbilder der Schnittpunkte von p' mit c' bestimmen.



Figur 1.

Aufgabe 2.

Bestimmung der konjugierten Durchmesser des Kegelschnittes c aus Aufgabe 1.

Lösungsansatz:

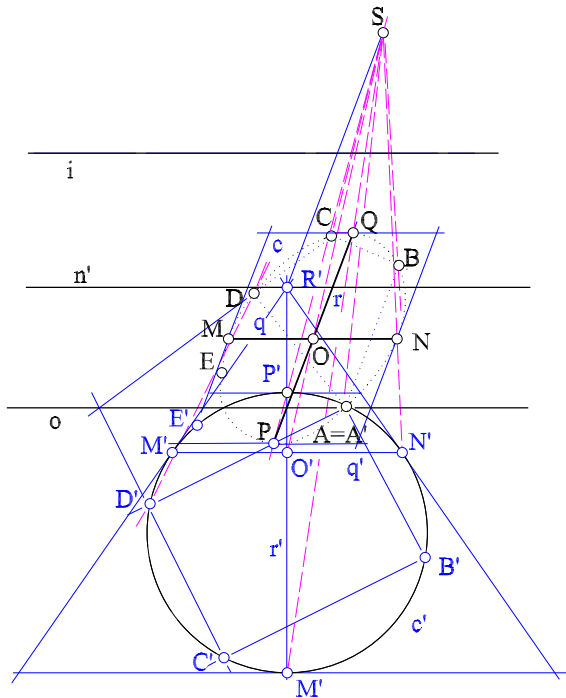
Zwei Durchmesser eines Kegelschnittes heißen konjugiert, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen parallel zum anderen sind.

Die Bilder der Fernpunkte dieser Durchmesser gehören der Fluchtgeraden n' von κ an. Je nach der Lage von n' zu c' (Passante oder Tangente oder Sehne), ist c eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Für die Fluchtgerade n' ergibt die konstruktive Vervollständigung von κ die Gleichheit der (orientierten) Abstände $d(i, S)$ und $d(o, n')$. (Die elementargeometrischen Lösungsstrategien für die Bestimmung etwa der Achsen von c sind vom Kegelschnitt-Typs abhängig und werden in den nächsten Aufgaben vorgeführt.)

Konstruktive Lösung:

Der Schnittpunkt R' der Fluchtgerade n' mit dem zur o orthogonalen Kreisdurchmesser r' ist jedenfalls dem Fernpunkt eines Kegelschnittsdurchmesser r zugeordnet. Dabei geht r durch den Schnittpunkt $r' \cap o$ und ist parallel zum Kollineationstrahl SR' . Existieren durch den Punkt R' zwei reelle Kreistangenten, also c eine *Ellipse*, so sind diese den zum Durchmesser r parallelen Ellipsentangenten zugeordnet, und die Verbindungsgerade q' ihrer Berührungspunkte M', N' ist deshalb dem zur Durchmesser r konjugierten Durchmesser zugeordnet. Der Schnittpunkt $r' \cap q' = O'$ entspricht dem Mittelpunkt O des Kegelschnittes.

Unter Benützung der der Projektiven Geometrie zugehörigen Begriffswelt “Polarsystem”, “Spurinvolution”, “Paare konjugierter Punkte” etc. würde eine einheitliche Formulierung der typenabhängigen Konstruktion möglich sein: Paaren konjugierter Durchmesser von c entsprechen dabei durch O' gehende Sehnenpaare von c' , deren Schnittpunkte mit n' in der Spurinvolution von c' in n gekoppelt sind. Damit ist jedes Paar konjugierter Durchmesser, insbesondere die Achsen, bestimmbar. In den Aufgaben 3, 4, 5 ist Achsenkonstruktion aber weitergehend elementar gelöst.



Figur 2.

Aufgabe 3.

Eine Ellipse c' sei durch konjugierte Durchmesser $M'N'$ und $P'Q'$ gegeben. Konstruiere eine perspektive Kollineation κ und einen Kreis c so daß es gilt $\kappa(c) = c'$.

Lösungsansatz

Es bestehen unendlich viele Möglichkeiten, um eine solche perspektive Kollineation und den zugehörigen Kreis c zu bestimmen. Bekanntlich bildet sich nur ein Kreisdurchmesser r unter κ in einen Ellipsendurchmesser r' ab. Die Tangenten in den Endpunkten solcher zugeordneter Durchmesser müssen dabei zur Kollineationsachse o parallel sein.

Sei $r' = P'Q'$ nicht der zu o parallele Ellipsendurchmesser; dann steht r senkrecht zum dazu konjugierten Durchmesser $M'N'$ und nach willkürlicher Wahl von o gilt $r \cap r' \in o$.

Es gibt ein tangential gleichschenkelige Kreistrapez das sich unter κ in ein tangential Ellipsenparallelogramm abbildet.

Das der Ellipse c' eingeschriebene Dreieck $N'P'Q'$ muss dabei Kollineationsbild eines dem Kreis c eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecks NPQ sein.

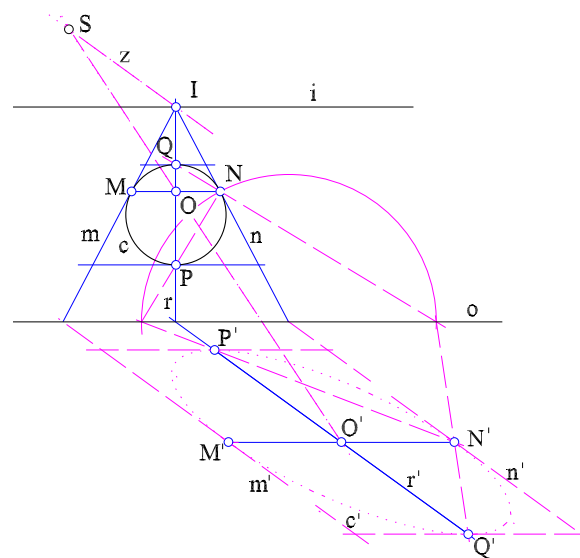
Konstruktive Lösung

Die Kollineationsachse o und die Verschwindungsgerade i wählt man beliebig zum Durchmesser $M'N'$ parallel. Der Kreisdurchmesser r geht dann durch $o \cap r'$ und steht zur o senkrecht.

Der Punkt $I = i \cap r$ muß in den Fernpunkt I' der Geraden r' übergehen sodaß ein Kollineationstrahl z parallel zu r' durch I festgelegt ist. Die Urbilder m, n der Ellipsentangenten m', n' schneiden diese auf o und gehen den Punkt I durch. Der Kreis c ist mit den Tangenten m und n und Berührungspunkt N bestimmt.

Die Schnittpunkte $o \cap N'P'$ und $o \cap N'Q'$ sind die Endpunkte des Thaleskreis-Durchmessers, der auf der Kreistangente n den Berührungspunkt N ausschneidet. Das Urbild des Ellipsendurchmessers $M'N'$ ist die zur o parallele Kreissehne MN , und der Punkt $O = MN \cap r$ ist das Urbild des Ellipsenzentrum O' .

Der Schnittpunkt der Strahlen z und OO' ist das Kollineationszentrum S .



Figur 3.

Aufgabe 4.

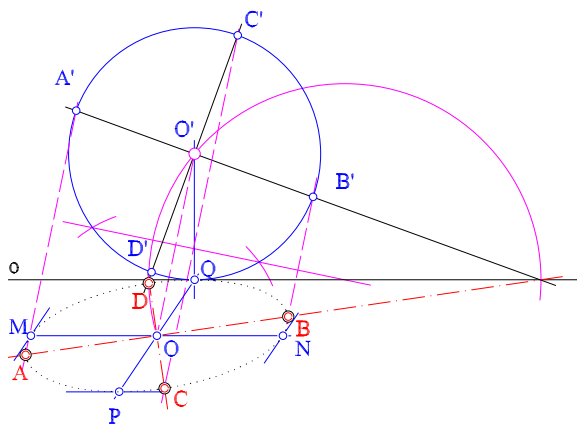
Die Bestimmung der Achsen der durch konjugierten Durchmesser MN, PQ gegebene Ellipse mittels perspektiven Affinität.

Lösungsansatz:

Ist der Kreis in den vorgegangenen Aufgaben so beschaffen, daß sein Durchmesser gleich jenem Ellipsendurchmesser ist, welcher zur Kollineationsachse o parallel ist, so werden die Kurven c und c' in *perspektiv affinen Verwandtschaft* gekoppelt sein. Die Achsen von c stammen dann, wie alle Paare konjugierter Durchmesser, von rechtwinkligen Kreisdurchmessern und schneiden diese natürlich auf der Kollineationsachse. Wählt man die Kollineationsachse nicht durch O , so kann für die Bestimmung der einander entsprechenden rechten Winkel in O und O' ein geeigneter Thaleskreis herangezogen werden.

Konstruktive Lösung:

Insbesondere kann im Sinne des Lösungsansatzes die (zum einen Ellipsendurchmesser parallele) Affinitätachse mit der Ellipsentangente in einem Punkt des anderen Durchmessers (etwa in Q) zusammenfallend gewählt werden. Der Kreisdurchmesser ist dem Ellipsendurchmesser $d(MN)$ gleich. Die Verbindungsgerade OO' der Mittelpunkte ist der Affinitätstrahl. Der durch die Punkte O und O' gehenden Thaleskreis, dessen Mittelpunkt an der Achse o liegt, schneidet o in Punkten der gesuchten Ellipsenachsen.



Figur 4.

Aufgabe 5.

Eine perspektive Kollineation κ ist mit dem Zentrum S , der Achse o und Verschwindungsgerade i gegeben. Man soll die Parabel als kollineares Bild eines i berührendes Kreises c konstruieren und deren Achse und Scheitelpunkt bestimmen.

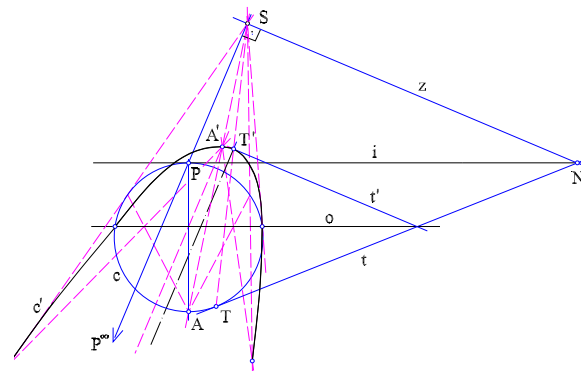
Lösungsansatz:

Der Berührungspunkt P des Kreises mit der Verschwindungsgerade i bildet sich in den Fernpunkt der Parabel ab. Somit ist die Parabelachse parallel zu dem Strahl SP . Der

zu SP orthogonale Strahl durch S legt den Fernpunkt der Scheiteltangente der Parabel fest. Mittels der Kollineation κ wird dieser Fernpunkt in den Punkt N von i übergeführt, wobei die aus N an c legbare Resttangente dann das Urbild der Scheiteltangente ist.

Konstruktive Lösung:

Der Berührungspunkt T der aus dem Punkt N legbaren, von i verschiedenen Kreistangente t geht in den Scheitelpunkt T' der Parabel über. Die Parabelachse geht durch diesen Punkt und ist zu SP parallel. Für die Feststellung des Brennpunktes der Parabel kann die elementare Parabelei-genschaft, dass nämlich der Lotfußpunkt aus dem Brennpunkt auf jede Parabeltangente in ihren Schnittpunkt mit der Scheiteltangente fällt.



Figur 5.

Aufgabe 6.

Eine perspektive Kollineation κ ist durch ihr Zentrum S , der Achse o und Verschwindungsgerade i gegeben. Man soll eine Hyperbel als kollineares Bild eines i schneidenden Kreises c konstruieren und die Achsen und Scheitelpunkte der Bildhyperbel bestimmen.

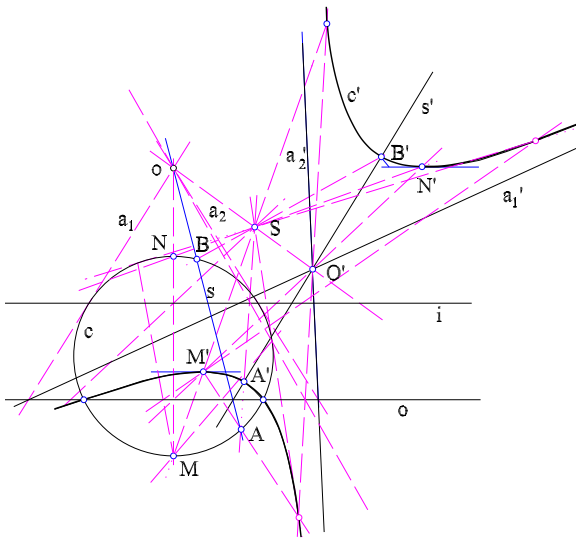
Lösungsansatz:

Die Schnittpunkte A_1, A_2 des Kreises c mit Verschwindungsgerade i bilden sich in die Fernpunkte der Hyperbel ab und die in diesen Punkten existierenden Kreistangenten a_1, a_2 in die Hyperbelasymptoten. Die Achsen der Hyperbel fallen dann in die Winkelsymmetralen dieser Asymptoten.

Konstruktive Lösung:

Der Schnittpunkt O der Kreistangenten a_1 , und a_2 bildet sich in den Mittelpunkt O' der Hyperbel ab und ist ein Außenpunkt von c . Der Punkt O' kann als Schnittpunkt der Asymptoten $a'_1 = \kappa(a_1)$ und $a'_2 = \kappa(a_2)$ bestimmt werden. Die Hyperbel-Hauptachse s' ist jene Symmetrale des Asymptotenwinkels, der von einer Sehnes von c stammt.

Die Schnittpunkte A, B der Gerade $s = \kappa^{-1}(s')$ mit dem Kreis c bilden sich in Scheitelpunkte der Hyperbel ab.



Figur 6.

Aufgabe 7.

Ein Kegelschnitt k sei durch fünf Tangenten a, b, c, d, e gegeben. Bestimme eine perspektive Kollineation κ , dadurch bestimmten Kegelschnitt in einen Kreis k' überführt.

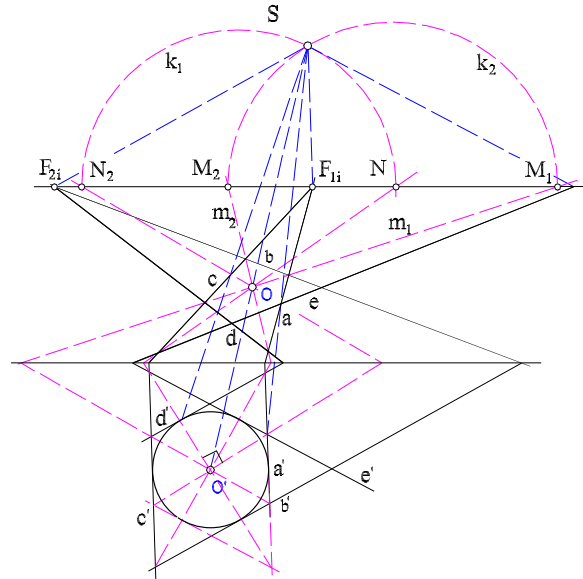
Lösungsansatz:

Unter allen möglichen Kollineationen, die k in einen Kreis k' überführen, wählen wir eine solche perspektive Kollineation κ , die das Tangentenvierseit $abcd$ in einen Kreistangenten-Rhombus überführen soll. Die fünfte Tangente e muß dabei in eine Kreistangente e' übergehen, so daß e' mit gegenüberliegenden Rhombuseiten a' und c' einen neuen Rhombus bestimmt.

Konstruktive Lösung:

Die Geradenpaare a, c und b, d müssen in parallelen Geraden übergehen, so daß die Punkte $a \cap c = F_{1i}$ und $b \cap d = F_{2i}$ die Verschwindungsgerade i der gesuchten perspektiven Kollineation κ aufspannen. Der Schnittpunkt O der Diagonalen m_1 und m_2 der tangentialen Vierseiten $abcd$ geht in den Kreismittelpunkt O' über. Die Geraden m_1 und m_2 schneiden i in Punkten M_1 und M_2 , die zu einem Paar von Fernpunkten orthogonale Richtungen gehören, wie auch

die Schnittpunkte N_1 und N_2 der Diagonalen der zweiten tangentialen Vierseits. Das Kollineationszentrum S bestimmt man als der Schnittpunkt der Thales-Kreise k_1 und k_2 über (M_1, M_2) bzw. (N_1, N_2) , da sich diese Paare aus S rechtwinklig projizieren müssen. Die Kollineationachse wählt man beliebig zu i parallel.



Figur 7.

Literatur

- [1] CESAREC, R.: *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja I*, Školska knjiga, Zagreb, 1957.
- [2] MÜLLER, E.: *Vorlesungen über Darstellende Geometrie, I. Bd.*, Leipzig-Wien, 1923.

Dr. sc. Ana Sliepčević

Universität Zagreb

Fakultät für Bauwesen

e-mail: anasli@juraj.gradnz.grad.hr