Bernoullijeva nejednakost

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Razmatra se Bernoullijeva nejednakost. Primjene spomenute nejednakosti ilustrirane su na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *Bernoullijeva nejednakost*

Bernoulli's inequality

Abstract. *Bernoulli's inequality is considered. Applications of the aforementioned inequality are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *Bernoulli's inequality*

U ovom članku bit će riječi o jednoj nejednakosti koju je 1689. godine izrekao i dokazao švicarski matematičar Jacob Bernoulli (1654.–1705.) i koja je po njemu dobila ime. Dokazat ćemo tu nejednakost i njena dva poopćenja te pokazati primjenu.

Teorem 1 [Bernoullijeva nejednakost]. *Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$ ili $x=0$.

Dokaz. Ako je $n=1$ ili $x=0$, tada je $(1+x)^n = 1+nx$. Za n veći od 1 i $x \neq 0$ nejednakost (i to strogu) dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n=2$ nejednakost vrijedi jer je $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n veći od 1 vrijedi $(1+x)^n > 1+nx$ i dokažimo da ta nejednakost vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &> 1+(n+1)x \end{aligned} \tag{1}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1 i svaki realan broj $x \neq 0$. □

Sljedeća dva teorema su poopćenja Bernoullijeve nejednakosti.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Teorem 2.

(a) Ako je $x > -1$ *i* $0 < \alpha < 1$, *onda je* $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.

(b) Ako je $x > -1$ *i* $\alpha < 0$ *ili* $\alpha > 1$, *onda je* $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Jednakost (u oba slučaja) vrijedi ako i samo ako je $x = 0$.

Dokaz. Rabeći Taylorovu formulu dobivamo

$$(1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2(1 + \theta x)^{\alpha-2} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Kako je $x > -1$ i $0 < \theta < 1$, to je $1 + \theta x > 0$, pa su $(1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$ i $\alpha(\alpha - 1)$ istog predznaka za $x \neq 0$. Odatle slijede navedene nejednakosti. □

Teorem 3. *Za sve realne brojeve* $x_k > -1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost*

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

Dokaz. Za $n = 2$ vrijedi stroga nejednakost jer je

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2.$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) > 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Tada zbog uvjeta $x_ix_j > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ imamo

$$\begin{aligned}
& (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)(1 + x_{n+1}) \\
> \ & (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(1 + x_{n+1}) \\
= \ & (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_{n+1} \\
> \ & 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1. □

Zadatak 1. *Neka su* a *i* b *pozitivni brojevi,* $0 < b < a$, *te neka je* n *prirodan broj veći od* 1. *Dokažite nejednakost*

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1}.$$

Rješenje. Iz pretpostavke slijedi da je $\frac{a}{b} > 1$, tj. $\frac{a}{b} - 1 > 0$. U Bernoullijevu nejednakost $(1 + x)^n > 1 + nx$ uvrstimo $x = \frac{a}{b} - 1$, pa imamo

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^n > 1 + n\Big(\frac{a}{b} - 1\Big),$$

odakle dobivamo

$$a^n > b^n + n \cdot b^{n-1}(a - b)$$

odnosno

$$a^n - b^n > n(a-b)b^{n-1}.$$

Zadatak 2. *Dokažite da za svaki prirodni broj* $n > 1$ *i svaki realni broj* $x > -1$, $x \neq 0$, *vrijedi nejednakost*

$$\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}.$$

Rješenje. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je $(1+x)^n > 1+nx$, tj. $1+x > \sqrt[n]{1+nx}$. Ako u ovu nejednakost umjesto x pišemo $\frac{x}{n}$, dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati.

Zadatak 3. *Dokažite da za svaki prirodni broj* $n > 1$ *vrijedi nejednakost*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2$. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki prirodni broj veći od 1 i dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Imamo

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)n! \\ &< (n+1)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n \\ &= 2\cdot\Big(\frac{n+2}{2}\Big)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}.\end{aligned} \tag{2}$$

Kako iz Bernoullijeve nejednakosti slijedi

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1 + (n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 2,$$

to je

$$(n+1)! < 2\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Zadatak 4. *Rabeći Bernoullijevu nejednakost dokažite da je niz* (a_n), *zadan sa* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, *strogo rastući.*

Rješenje. Kako je

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{2n+1}} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^{n+1}\cdot\frac{1}{n}}{((n+1)^2)^{n+1}}\cdot(n+1) = \frac{(n(n+2))^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &> \left(1+(n+1)\cdot\Big(-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\right)\cdot\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1,\end{aligned}$$

to je $a_{n+1} > a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. *Dokažite da je niz* (a_n)*, zadan sa* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$*, strogo padajući.*

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

Kako je prema Bernoullijevoj nejednakosti

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n(n+2)} \cdot (n+1),$$

to je

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &< \frac{1}{1+\frac{n+1}{n(n+2)}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{n(n+2)}{n^2+3n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1} < 1.\end{aligned}$$

Dakle, $a_{n+1} < a_n$ pa je niz strogo padajući.

Zadatak 6. *Dokažite da je niz* (a_n)*, zadan sa* $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$*, gdje je* k *proizvoljan prirodni broj, omeđen i odozdo i odozgo.*

Rješenje. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{k}{n} = 1 + k,$$

pa je zadani niz odozdo omeđen.

Omeđenost odozgo najprije dokažimo za $k = 1$, tj. za niz $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Prema Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n > 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}} < 4.$$

Kako je

$$1 - \frac{1}{4n^2} < 1,$$

imamo

$$1 + \frac{1}{2n} < \frac{1}{1-\frac{1}{2n}}$$

odakle slijedi

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\right)^{2n} < 4$$

odnosno $a_{2n} < 4$. Kako je niz (a_n) strogo rastući, to je $a_n < a_{2n} < 4$, odnosno

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 4.$$

Omeđenost odozgo sada dokažimo za proizvoljan prirodan broj k. Iz Bernoullijeve nejednakosti slijedi

$$1+\frac{k}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k},$$

pa je

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk} < 4^k.$$

Zadatak 7. *Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 i $-1 < \alpha < 0$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Rješenje. Prema poopćenoj Bernoullijevoj nejednakosti vrijedi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n},$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}.$$

Pomnožimo obje nejednakosti sa $n^{\alpha+1}$:

$$(n+1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < n^{\alpha+1}-(\alpha+1)n^{\alpha}.$$

Odatle je

$$(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1} < (\alpha+1)n^{\alpha},$$

$$(n-1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1} < -(\alpha+1)n^{\alpha}.$$

Podijelimo prvu nejednakost sa $\alpha+1$, a drugu sa $-(\alpha+1)$:

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha},$$

$$\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} > n^{\alpha}.$$

Dakle,

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Zadatak 8. *Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi nejednakost*

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2^n+1}{2^n} > 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Prema poopćenoj Bernoullijevoj nejednakosti je

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2^n+1}{2^n} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \\ > \quad & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Literatura

[1] D. BLANUŠA, *Viša matematika, prvi dio, prvi svezak*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[2] P. JAVOR, *Matematička analiza, Zbirka zadataka*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[3] D. S. MITRINOVIĆ, D. D. ADAMOVIĆ, *Nizovi i redovi*, Naučna knjiga, Beograd, 1971.

[4] D. S. MITRINOVIĆ, D. MIHAILOVIĆ, P. M. VASIĆ, *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1971.

[5] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo i Element, Zagreb, 1996.

[6] A. TAKAČI, Đ. TAKAČI, N. ĐAPIĆ, I. ŠTAJNER-PAPUGA, *Zbirka zadataka iz analize I*, Institut za matematiku PMF-a, Novi Sad, 2000.