STUDENTSKA RUBRIKA

Feurbachov teorem

Zdenka Kolar–Begović*, Ana Tonković †

Sažetak. *Polovišta stranica trokuta, nožišta visina i polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta leže na jednoj kružnici tzv. Eulerovoj kružnici trokuta. Feuerbach je 1882. godine otkrio i dokazao da Eulerova kružnica dira upisanu i tri trokutu pripisane kružnice. Ta tvrdnja je poznata u literaturi kao Feuerbachov teorem. Postoje mnogobrojni dokazi ovog teorema. U radu je dan jedan analitički dokaz teorema te su razmatrane činjenice o trokutu upisanoj i pripisanim kružnicama potrebne za provođenje dokaza. U radu se proučava i Eulerova kružnica te navode elementi iz povijesti otkrića svojstava ovog pojma.*

Ključne riječi: *trokut, Eulerova kružnica, Feuerbachov teorem*

Feuerbach's theorem

Abstract. *The mid–points of the sides of a triangle, the feet of the altitudes, and the mid–points of the segments from the orthocenter to the vertices lie on one circle the so called Euler circle. In 1822 Feuerbach discovered and proved that Euler circle of a triangle is a tangent to the inscribed circle and to each of the escribed circles. In the literature this statement is known as Feuerbach's theorem. There are numerous proofs of this famous statement. An analytic proof of this theorem is considered in this paper. Some facts concerning inscribed and escribed circles of a triangle necessary for derivation of the proof are also explored. Some properties of Euler circle are also considered as well as some historical elements of this concept.*

Key words: *triangle, Euler circle, Feuerbach's theorem*

1. Iz povijesti Feuerbachovog teorema

U razmatranju povijesnih činjenica o otkriću Feuerbachovog teorema treba svakako posebnu pažnju posvetiti povijesti otkrića Eulerove kružnice.

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, Osijek, e-mail: `zkolar@mathos.hr`

†OŠ Vladimir Nazor, Virovitica, e-mail: `ana.tonkovic1@skole.hr`

Veliki švicarski matematičar Leonhard Euler dokazao je 1765. godine da šest točaka, polovišta stranica trokuta i nožišta visina, leže na jednoj kružnici. U čast Eulera ova kružnica se u literaturi često može naći pod imenom Eulerova kružnica.

Prema povijesnim istraživanjima J. S. MacKaya (1892. godine) postoji nekoliko nezavisnih otkrića Eulerove kružnice. Navodi se da se prvi put spominje u članku Johna Butterwortha (1804. godine) u dokazu Bevanova teorema.

U članku Brianchona i Ponceleta (1820. god.) navodi se da i preostale tri točke, polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta, također leže na Eulerovoj kružnici tog trokuta. U njihovom članku daje se prvi potpuni dokaz teorema o koncikličnosti navedenih devet točaka i prvi put se koristi termin "kružnica devet točaka". Mnogi autori koriste upravo termin "kružnica devet točaka".

Njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach (1800.–1834.) dokazao je da kružnica koja prolazi nožištima visina trokuta dira sve četiri kružnice koje diraju stranice trokuta, odnosno njihova produženja.

Feuerbach je teorem dokazao 1822. godine u svojoj 22. godini života u radu *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* u kojem je proučavao značajne točke u geometriji trokuta i dao niz novih i važnih tvrdnji vezanih za Eulerovu kružnicu.

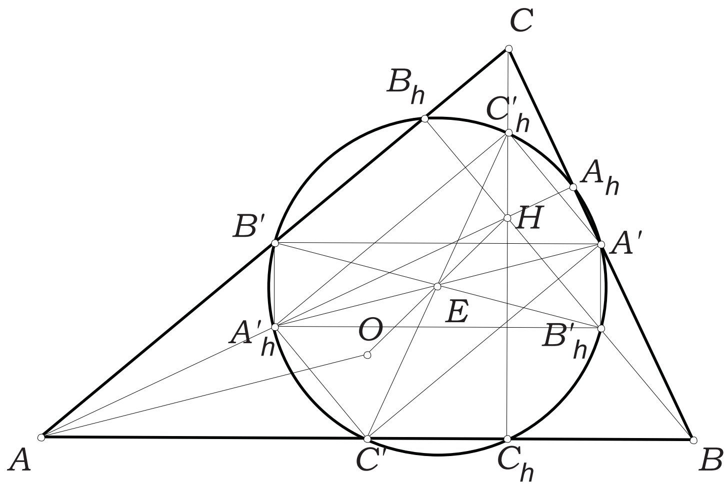
Pojavkom ove tvrdnje, koja je u literaturi poznata kao Feuerbachov teorem, Eulerova kružnica i Feuerbachov teorem izazvali su veliku pozornost matematičke javnosti. Mnogi matematičari su se bavili ovom tvrdnjom, pa je objavljen velik broj različitih dokaza teorema. Neki autori pripisivali su Feuerbachu nezavisno otkriće spomenute kružnice pa su u literaturi i koristili termin Feurbachova kružnica.

2. Eulerova kružnica trokuta

Dokažimo sada konci kličnost sljedećih devet točaka trokuta: polovišta stranica trokuta, nožišta visina i polovišta spojnica vrhova i ortocentra trokuta. Postojanje i svojstva te kružnice mogu se dokazati na različite načine. Način na koji će ta tvrdnja biti ovdje dokazana zaista je vrlo elementaran.

Teorem 1. *Neka su A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, A_h, B_h, C_h nožišta visina a H ortocentar trokuta ABC te neka su A'_h, B'_h, C'_h polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$. Devet točaka $A', B', C', A_h, B_h, C_h, A'_h, B'_h, C'_h$ leže na jednoj kružnici kojoj su $\overline{A'A'_h}$, $\overline{B'B'_h}$, $\overline{C'C'_h}$ promjeri, središte u točki E polovištu dužine $\overline{OH}$, a polumjer jednak polovini polumjera tom trokutu opisane kružnice (Slika 1).*

Dokaz. Četverokut $A'B'A'_hB'_h$ je pravokutnik pa su njegove dijagonale $\overline{A'A'_h}$ i $\overline{B'B'_h}$ jednake duljine i međusobno se raspolavljaju. Označimo njihovo sjecište sa X. X je tada središte kružnice koja prolazi točkama $A', A'_h, B', B'_h, C', C'_h$. Kako je kut C'_hC_hC' pravi to po Talesovom teoremu C_h također leži na promatranoj kružnici. Na isti način pokaže se da točke B_h i C_h leže na istoj kružnici. Središte X prema tome leži na simetrali dužine $\overline{C'C'_h}$, koja raspolavlja dužinu $\overline{OH}$ i točka X se podudara dakle sa točkom E polovištem dužine $\overline{OH}$. Kako je $\overline{A'_hE}$ srednjica trokuta AOH to vrijedi $|\overline{A'_hE}| = \frac{1}{2}|\overline{AO}|$ tj. polumjer razmatrane kružnice jednak je polovini polumjera trokutu ABC opisane kružnice. $\square$



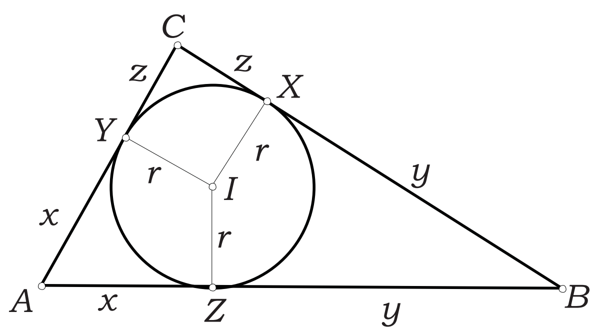
SLIKA 1.

Kružnicu na kojoj leže polovišta stranica trokuta, polovišta spojnica ortocentra i vrhova trokuta, te nožišta visina trokuta zovemo *Eulerova kružnica* trokuta.

3. Trokutu upisana kružnica i pripisane kružnice

Za svaki trokut postoje četiri kružnice koje diraju stranice trokuta, odnosno produženja njegovih stranica. Trokutu ABC upisana kružnica k_i, čije je središte u sjecištu simetrala unutrašnjih kutova trokuta, dira sve tri stranice trokuta. Trokutu ABC pripisana kružnica k_a dira stranicu nasuprot vrhu A i produženja ostalih dviju stranica. Na isti način definiraju se preostale dvije pripisane kružnice k_b i k_c.

Dokažimo sada neke tvrdnje o upisanoj i trokutu pripisanim kružnicama.
Neka je dan trokut ABC i neka su X, Y, Z dirališta upisane kružnice $k_i(I, r)$ i stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC (*Slika 2*).



SLIKA 2.

Kako su odsječci dviju tangenata od točke izvan kružnice do dirališta tih tangenata s kružnicom jednake duljine to vrijedi $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ|$, $|CX| =$

$|CY|$, uvedemo li oznake za duljine tih segmenata x, y, z imamo

$$\begin{aligned} y+z &= a, \\ z+x &= b, \\ x+y &= c. \end{aligned}$$

Zbrojimo li te tri jednakosti dobivamo $2x+2y+2z=a+b+c=2s$, tj.

$$x+y+z=s.$$

Dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 2. *Ako su X, Y, Z dirališta stranica i upisane kružnice trokuta ABC i $x=|AY|=|AZ|$, $y=|BX|=|BZ|$, $z=|CX|=|CY|$, onda vrijedi*

$$x=s-a, \quad y=s-b, \quad z=s-c \tag{1}$$

gdje je s poluopseg trokuta ABC.

Kako je a osnovica, a r visina trokuta IBC to je površina tog trokuta jednaka $P_{\triangle IBC}=\dfrac{1}{2}ar$. Na analogan način dobivamo i izraze za površine trokuta ICA i IAB, pa dobivamo da vrijedi $P=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=sr$.
Time smo dobili sljedeću poznatu tvrdnju.

Teorem 3. *Površina trokuta ABC jednaka je $P=sr$, gdje je r polumjer upisane kružnice, a s poluopseg trokuta ABC.*

Promotrimo trokut $I_aI_bI_c$ čije stranice leže na simetralama vanjskih kutova trokuta ABC pri vrhovima A, B, C trokuta (*Slika 3*). Svaka točka na simetrali I_cI_a vanjskog kuta pri vrhu B trokuta ABC jednako je udaljena od AB i BC. Slično, svaka točka na simetrali I_aI_b jednako je udaljena od BC i CA. Odatle slijedi da je točka I_a na jednakoj udaljenosti r_a od sve tri stranice trokuta. Kako je točka I_a jednako udaljena od AB i AC, ona mora ležati na pravcu AI, simetrali unutrašnjeg kuta trokuta ABC pri vrhu A.

Teorem 4. *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutrašnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Kružnica k_a sa središtem I_a i polumjerom r_a, kojoj su pravci na kojima leže stranice trokuta tangente, jedna je od tri pripisane kružnice trokuta. Svaka pripisana kružnica dira jednu stranicu trokuta i produženja ostalih dviju.

Označimo dirališta pripisanih kružnica i stranica trokuta, odnosno produženja stranica trokuta ABC, kao na *Slici 3*. Kako vrijedi,

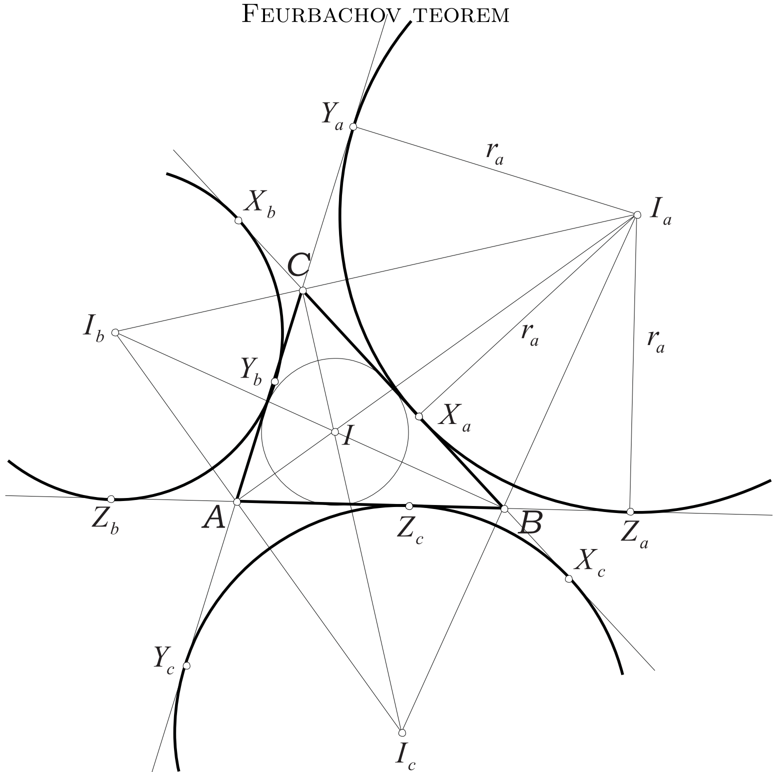
$$|AY_a|=|AZ_a|$$

to imamo

$$\begin{aligned} |AY_a|+|AZ_a| &= |AC|+|CY_a|+|Z_aB|+|AB| \\ &= |AC|+|CX_a|+|X_aB|+|AB| \\ &= b+a+c=2s. \end{aligned}$$

Dobivamo dakle, odsječak tangente od vrha A do dirališta pripisane kružnice nasuprot vrhu A s pravcima na kojima leže stranice trokuta kroz vrh A je duljine s. Analogno vrijedi za ostala dva vrha trokuta. Vrijedi dakle,

$$|AY_a|=|AZ_a|=|BZ_b|=|BX_b|=|CX_c|=|CY_c|=s. \tag{2}$$



Slika 3.

Također kako je $|CX_b| = |BX_b| - |BC| = s - a$, analogno dobivamo

$$\begin{aligned} |BX_c| &= |BZ_c| = |CX_b| = |CY_b| = s-a, \\ |CY_a| &= |CX_a| = |AY_c| = |AZ_c| = s-b, \\ |AZ_b| &= |AY_b| = |BZ_a| = |BX_a| = s-c. \end{aligned}$$

Nadalje, očito vrijedi

$$P = P_{\triangle I_aCA} + P_{\triangle I_aAB} - P_{\triangle I_aCB} = \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = (s-a)r_a.$$

Na isti način se pokazuje da vrijedi $P = (s-b)r_b = (s-c)r_c$.
Pokazali smo dakle da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 5. *Površina trokuta ABC jednaka je*

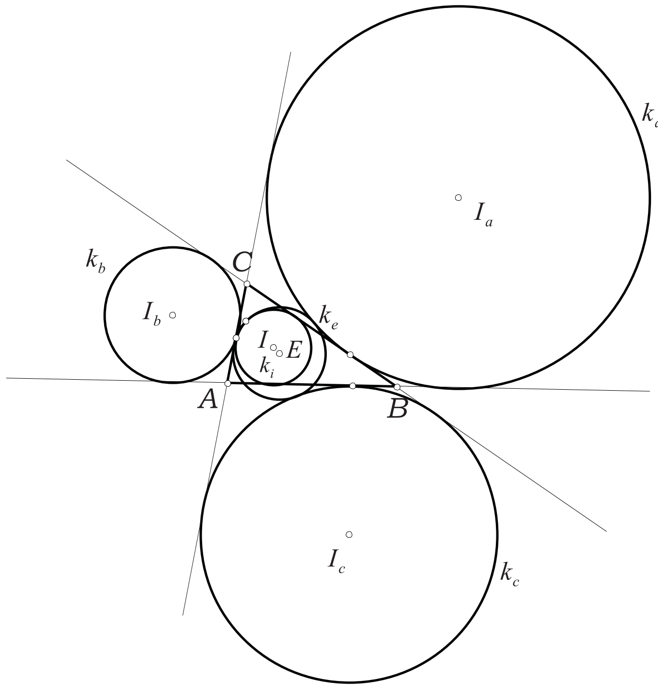
$$P = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c \tag{3}$$

gdje su r_a, r_b, r_c polumjeri pripisanih kružnica, a s poluopseg trokuta ABC.

4. Analitički dokaz Feuerbachovog teorema

Nakon što smo razmatrali Eulerovu kružnicu i trokutu upisanu i pripisane kružnice navedimo najpoznatiju tvrdnju o Eulerovoj kružnici, koja se ubraja među najljepše teoreme geometrije trokuta.

Teorem 6 [Feuerbachov teorem]. *Eulerova kružnica dira upisanu i sve tri pripisane kružnice danog trokuta. Pri tome upisana kružnica dira Eulerovu kružnicu iznutra, dok je pripisane kružnice diraju izvana (Slika 4).*



SLIKA 4.

Nakon objavljivanja Feuerbachovog teorema 1822. godine, pojavio se velik broj radova u kojima su objavljeni različiti dokazi teorema. U ovom poglavlju dat ćemo jedan analitički dokaz Feuerbachovog teorema ([5]).

Neka je dan trokut ABC. Promotrimo kosi koordinatni sustav kojem je točka A ishodište, a pravci AB i AC osi koordinatnog sustava.
Tada su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom točke $A' = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $B' = \left(0, \frac{c}{2}\right)$, $C' = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$. Neka je $I_a(x_a, y_a)$ središte i r_a polumjer pripisane kružnice k_a nasuprot vrhu A trokuta ABC (*Slika* 5).

Očito je

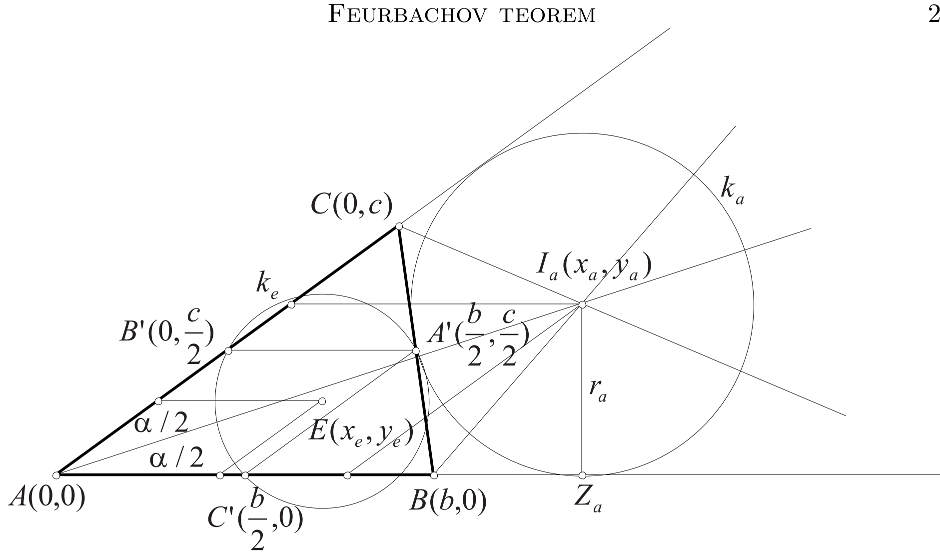
$$x_a = y_a$$

i

$$y_a \sin\alpha = r_a \overset{(2)}{=} s\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\ \alpha. \tag{4}$$

Odakle dobivamo

$$x_a = y_a = \frac{s}{2\cos^2 \frac{1}{2}\ \alpha}. \tag{5}$$



SLIKA 5.

S druge strane, kako za polumjer opisane kružnice trokuta ABC vrijede formule $R = \frac{abc}{4P}$ i $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, to zbog (3) imamo

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \frac{abc}{4R(s-a)} = \frac{bc\sin\alpha}{2(s-a)}$$

odakle po (4) dobivamo

$$x_a = y_a = \frac{bc}{2(s-a)}. \tag{6}$$

Prije daljnjeg dokaza izvest ćemo formulu za udaljenost dviju točaka u kosom koordinatnom sustavu koristeći svojstva skalarnog produkta vektora. Neka je $O(0,0)$ ishodište koordinatnog sustava čije osi zatvaraju kut α. Neka su $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$ jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi (*Slika 6*). Za točke $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2)$ vrijedi

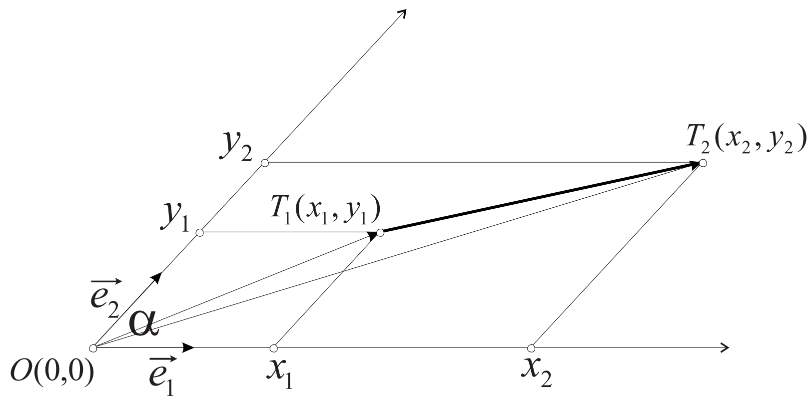
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{T_1T_2}|^2 &= \overrightarrow{T_1T_2}\cdot\overrightarrow{T_1T_2}\\
&= ((x_2-x_1)\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\overrightarrow{e_2})\cdot((x_2-x_1)\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)\overrightarrow{e_2})\\
&= (x_2-x_1)^2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1}+(y_2-y_1)^2\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2}+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}
\end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$|\overrightarrow{T_1T_2}|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\,cos\alpha. \tag{7}$$

Neka je $E(x_e,y_e)$ središte Eulerove kružnice k_e trokuta ABC. Po Teoremu 1 njen polumjer je $\frac{R}{2}$, gdje je R polumjer opisane kružnice trokuta. Kako Eulerova kružnica prolazi točkama A', B', C' to primjenom (7) dobivamo

$$\Big(x_e-\frac{b}{2}\Big)^2+\Big(y_e-\frac{c}{2}\Big)^2+2\Big(x_e-\frac{b}{2}\Big)\Big(y_e-\frac{c}{2}\Big)\cos\alpha-\Big(\frac{R}{2}\Big)^2=0, \tag{8}$$



SLIKA 6.

$$x_e^2 + \Big(y_e - \frac{c}{2}\Big)^2 + 2x_e\Big(y_e - \frac{c}{2}\Big)\cos\alpha - \Big(\frac{R}{2}\Big)^2 = 0, \tag{9}$$

$$\Big(x_e - \frac{b}{2}\Big)^2 + y_e^2 + 2\Big(x_e - \frac{b}{2}\Big)y_e\cos\alpha - \Big(\frac{R}{2}\Big)^2 = 0. \tag{10}$$

Oduzmemo li od zbroja jednadžbi (10) i (9) jednadžbu (8) dobivamo

$$x_e^2 + y_e^2 + 2x_e y_e\cos\alpha = \Big(\frac{R}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\ bc\cos\alpha. \tag{11}$$

Podijelimo li razliku jednadžbi (8) i (10) sa c, a razliku jednadžbi (8) i (9) sa b te zbrojimo tako dobivene jednadžbe dobivamo

$$(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha) = \frac{b+c}{4}(1 + 2\cos\alpha). \tag{12}$$

Zbog (3) i formule $R = \dfrac{abc}{4P}$ imamo

$$r_a R = \frac{abc}{4(s-a)}. \tag{13}$$

Sada je (zbog $y_a = x_a$)

$$\begin{aligned} |EI_a|^2 &= (x_a - x_e)^2 + (y_a - y_e)^2 + 2(x_a - x_e)(y_a - y_e)\cos\alpha \\ &= x_e^2 + y_e^2 + 2x_e y_e\cos\alpha + 4x_a^2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 2x_a(x_e + y_e)(1 + \cos\alpha). \end{aligned}$$

Korištenjem formula (11), (5) i (12) iz prethodnog dobivamo

$$|EI_a|^2 = \Big(\frac{R}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}bc\cos\alpha + s^2\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2}x_a(b+c)(1 + 2\cos\alpha).$$

Primjenom formula (13), (4) i (6) dobivamo

$$|EI_a|^2 = \Big(\frac{R}{2} + r_a\Big)^2 - \frac{abc}{4(s-a)} + \frac{1}{2}bc\cos\alpha + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)}\cdot(b+c)(1 + 2\cos\alpha).$$

Konačno imamo

$$\begin{aligned}
|EI_a|^2 &= \left(\frac{R}{2}+r_a\right)^2 + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)} \cdot [a - 2(s-a)\cos\alpha + (b+c)(1+2\cos\alpha)] \\
&= \left(\frac{R}{2}+r_a\right)^2 + s^2 - \frac{bc}{4(s-a)} \cdot 2s(1+\cos\alpha) \\
&= \left(\frac{R}{2}+r_a\right)^2
\end{aligned}$$

jer iz kosinusovog teorema lako slijedi jednakost $4s(s-a) = 2bc(1+cos\alpha)$.

Odatle slijedi da Eulerova kružnica trokuta ABC izvana dira trokutu ABC pripisanu kružnicu nasuprot vrhu A. Na isti način se može dokazati da Eulerova kružnica dira i ostale dvije pripisane kružnice trokuta.

Trokut određen s tri točke koje su dirališta Eulerove kružnice trokuta i triju trokutu pripisanih kružnica poznat je u literaturi pod imenom *Feuerbachov trokut* promatranog trokuta.

Preostaje dokazati da upisana kružnica trokuta dira Eulerovu kružnicu iznutra. Neka je $I(x_i, y_i)$ središte i r polumjer trokutu upisane kružnice k_i.

Očito je

$$x_i = y_i$$

i

$$y_i \sin\alpha = r \overset{(1)}{=} (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\ \alpha. \tag{14}$$

Odakle dobivamo

$$x_i = y_i = \frac{s-a}{2\cos^2 \frac{1}{2}\ \alpha}. \tag{15}$$

S druge strane imamo

$$r = \frac{P}{s} = \frac{abc}{4Rs} = \frac{bc\sin\alpha}{2s}$$

odakle dobivamo

$$x_i = y_i = \frac{bc}{2s}. \tag{16}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
|EI|^2 &= (x_i - x_e)^2 + (y_i - y_e)^2 + 2(x_i - x_e)(y_i - y_e)\cos\alpha \\
&= x_e^2 + y_e^2 + 2x_e y_e \cos\alpha + 4x_i^2 \cos^2\frac{1}{2}\alpha - 2x_i(x_e + y_e)(1+\cos\alpha)
\end{aligned}$$

Koristeći formule (11), (12), (14), (15), (16) i činjenicu da je

$$rR = \frac{abc}{4s}$$

slično kao u prethodnom dokazu za pronalaženje udaljenosti $|EI_a|$ dobivamo sada

$$|EI|^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2, \tag{17}$$

tj. upisana kružnicu trokuta ABC dira Eulerovu kružnicu iznutra.
(Uočite da smo uveli supstituciju $s \leftrightarrow (s-a)$ u izraze za traženje udaljenosti $|EI_a|$ dobili bismo također (17)).

Točka gdje se upisana kružnica trokuta i Eulerova kružnica trokuta dodiruju zove se *Feuerbachova točka* tog trokuta.

Literatura

[1] H. S. M. COXETER, S. L. GREITZER, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.

[2] G. HOWLET, *Vectors, centers and a touching theorem*, Mathematical Gazette, **74**(1990), 26–30.

[3] R. A. JOHNSON, *Modern Geometry*, New York, 1960.

[4] A. POSAMANTIER, *Advanced Euclidean Geometry*, Key College Publishing, Emeryville, 2002.

[5] D. SURYANARAYANA, *A Note on Feuerbach's Theorem*, Math. Student, **29**(1961), 138–140.