O harmonijskom redu i njegovim dijelovima

Dino Sejdinović*, Irma Tanović†

Sažetak. *U teoriji redova realnih brojeva, harmonijski red služi kao jedan od najjednostavnijih i najilustrativnijih primjera pri razmatranju problema konvergencije beskonačnog reda. Divergencija ovog reda, usprkos činjenici da mu opći član teži nuli, dovodi nas do pitanja: "Uklanjanjem kojih članova harmonijskog reda novodobijeni red postaje konvergentan?". Ovdje razmatramo konvergenciju poopćenog harmonijskog reda, sume po svim prostim brojevima, te konvergenciju Kempnerovih redova.*

Ključne riječi: *beskonačni red, harmonijski red, konvergencija*

On harmonic series and it's parts

Abstract. *In the theory of series of real numbers, the harmonic series serves as one of the simplest and the most illustrative examples when studying the problem of the convergence of infinite series. Divergence of this series, despite the fact that its general term tends to zero, leads us to the question: "Which terms of the harmonic series should be removed such that the resulting series is convergent?". We consider convergence of the generalized harmonic series, sum of the reciprocals of the primes, and the convergence of Kempner series.*

Key words: *infinite series, harmonic series, convergence*

1. Uvod

Pojam reda realnih brojeva se prirodno uvodi kao suma svih članova nekog niza realnih brojeva. Ukoliko je niz realnih brojeva konačan, tada je odgovarajući red jednoznačno definiran konačan broj. No, moguće je razmatrati i red koji odgovara beskonačnom nizu realnih brojeva, koji također može dati jednoznačno definiran konačan broj. Primjerice, ako promatramo niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zadan s

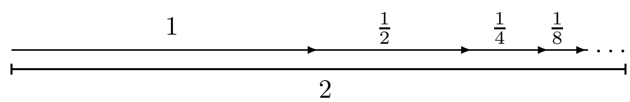
$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

*University of Bristol, Bristol, UK, e-mail: `dino.sejdinovic@gmail.com`
†Bristol, UK, e-mail: `irma_tanovic@hotmail.com`

možemo se pitati hoće li suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \tag{2}$$

ostati ograničena nekim konačnim brojem ili će postati proizvoljno velika nakon što se sumira dovoljan broj članova reda (sumanada). Gore navedenu sumu je lako i grafički predočiti. Promatrajmo dužinu duljine 2 s markiranim uzastopnim segmentima duljina 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ itd. Uvijek ostaje prostora da se markira sljedeći segment jer je još uvijek na raspolaganju upravo ona dužina koja je prethodno markirana: kada markiramo $\frac{1}{4}$, ostaje nam dužina duljine $\frac{1}{4}$, te je svakako moguće markirati dužinu duljine $\frac{1}{8}$. Na ovaj način nismo pokazali da je suma (2) jednaka 2, ali u svakom slučaju vidimo da nikada neće preći 2, bez obzira koliko sumanada zbrojili. Da bismo mogli ustvrditi čemu je suma (2) jednaka, potrebno je formalno definirati šta se pod tom sumom podrazumijeva.



Slika 1: Suma beskonačno mnogo brojeva može ostati konačna

Suma beskonačnog reda realnih brojeva se definira kao granična vrijednost niza njegovih parcijalnih suma. Naime, neka je dan niz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tada parcijalne sume $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ formiraju novi niz $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ukoliko S_k teži konačnoj veličini kada $k \to \infty$, tada kažemo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{3}$$

konvergira, te da je jednak graničnoj vrijednosti niza $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k. \tag{4}$$

2. Geometrijski red

Jedan od najjednostavnijih beskonačnih redova realnih brojeva je geometrijski red dan sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},\ q \neq 1, \tag{5}$$

pri čemu se q naziva kvocijentom reda. S obzirom da je parcijalne sume geometrijskog reda moguće eksplicitno izraziti kao

$$\sum_{n=1}^{k} aq^{n-1} = a\frac{1-q^k}{1-q}, \tag{6}$$

vidimo da geometrijski red konvergira ako i samo ako je $|q| < 1$, i da mu je suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}. \tag{7}$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ je primjer geometrijskog reda za $a = 1$ i $q = \frac{1}{2}$. Sada možemo pisati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2. \tag{8}$$

3. Harmonijski red

Iz prethodnog razmatranja može se zaključiti da je nužan uvjet za konvergenciju reda taj da mu opći član teži nuli, tj. da sumandi reda postaju proizvoljno mali i da na taj način omoguće da se beskonačna suma ipak okonča na nekoj konačnoj veličini. No ovo nije i dovoljno za konvergenciju reda, tj. moguće je naći takav red gdje sumandi postaju proizvoljno mali a da pritom ipak suma raste u beskonačnost. Malo koji red može poslužiti kao bolji kontraprimjer od harmonijskog reda, definiranog s $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$.

Teorem 1. *Harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.*

Dokaz. Promatrajmo parcijalnu sumu H_{2^k}. Imamo

$$\begin{aligned} H_{2^k} &= 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \\ &+ (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}) \\ &> 1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) \\ &+ (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots + (\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dakle, parcijalne sume harmonijskog reda postaju veće od $1 + \frac{k}{2}$, za proizvoljno k, pa harmonijski red divergira.

□

Ovaj elegantan dokaz divergencije harmonijskog reda pripisuje se srednjevjekovnom filozofu Nicoleu Oresmeu (1323. - 1382.) te se smatra jednim od najviših dostignuća srednjovjekovne matematike. Veliki broj dokaza ove tvrdnje zainteresirani čitalac može naći u ([6]).

Parcijalna suma harmonijskog reda $H_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ naziva se k-tim harmonijskim brojem. Iako raste u beskonačnost, harmonijski broj se povećava izuzetno sporo, pa je tako prvi harmonijski broj veći od 100 suma prvih

$$15092688622113788323693563264538101449859497 \approx 10^{43}$$

članova harmonijskog reda. Ovaj rezultat, izložen u ([7]), svakako nije postignut direktnim sumiranjem, već odgovarajućim transformacijama.

Švicarski matematičar Leonhard Euler (1707.-1783.) je prvi pokazao da H_k raste približno kao prirodni logaritam $\ln k$. Naime, vrijedi slijedeći teorem.

Teorem 2. *Neka je* $H_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$. *Tada*

$$H_k - \ln k - \gamma \to 0 \text{ kada } k \to \infty, \tag{10}$$

pri čemu je $\gamma = 0.57721566...$ *konstanta.*

Misteriozna Eulerova konstanta γ (ponekad poznata i pod imenom konstanta Euler-Mascheroni), uz π i e jedna je od najvažnijih matematičkih konstanti i, s obzirom na njeno pojavljivanje u različitim oblastima matematike, dio je matematičkog folklora. Zainteresirani čitatelj se upućuje na knjigu ([2]), posvećenu Eulerovoj konstanti.

4. Poopćeni harmonijski red

Divergencija reda realnih brojeva je koncept koji mnogima može prouzrokovati glavobolju. Naime, kada red divergira, moguće je izbaciti proizvoljno veliki konačan broj članova, pa i onih najvećih - preostali članovi će i dalje formirati divergentan red. Štoviše, moguće je izbaciti i beskonačan broj članova pod uvjetom da oni formiraju konvergentan red. Promatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

koji se naziva poopćenim harmonijskim redom i daje harmonijski red za $s = 1$. Da ovaj red konvergira ako i samo ako je $s > 1$ temeljni je rezultat teorije redova realnih brojeva. Navest ćemo jedan jednostavan dokaz ove tvrdnje iz klasičnog udžbenika ([1]), koji se oslanja na sljedeću lemu.

Lema 1. (**Cauchy**) *Neka je* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako konvergira red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

Dokaz. Iz niza nejednakosti:

$$\begin{gathered} a_2 \leq a_2 \leq a_1 \\ 2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2 \\ 4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4 \\ \vdots \\ 2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \cdots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}, \end{gathered}$$

sumiranjem dobijamo

$$\frac{1}{2}(B_n - a_1) \leq A_{2^{n+1}} - a_1 \leq B_n, \tag{12}$$

pri čemu je

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \quad B_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

Iz ocjene (12) je očigledno da ova dva reda istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

□

Teorem 3. *Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira ako i samo ako je $s > 1$.*

Dokaz. Na osnovu Cauchyjeve leme red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergira ako i samo ako konvergira red

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-s})^k.$$

No, posljednji red je geometrijski red sa kvocijentom $q = 2^{1-s}$, pa je konvergentan ako i samo ako je $q < 1$, tj. $s > 1$.

□

Vrijednosti kojima ovi redovi konvergiraju za cjelobrojne vrijednosti s su posebno interesantne. Za parne vrijednosti od s u sumi reda javlja se konstanta π, dok za neparne vrijednosti s nije poznata eksplicitna formula izražena preko drugih poznatih matematičkih konstanti. Tablica 4. prikazuje nekoliko prvih suma poopćenog harmonijskog reda. Inače, suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ u kompleksnoj varijabli s naziva se Riemannovom zeta funkcijom $\zeta(s)$. Ova funkcija zauzima izuzetno važnu ulogu u analitičkoj teoriji brojeva, a nosi ime po njemačkom matematičaru Bernhardu Riemannu (1826.-1866.).

s	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$
1	∞
2	$\frac{\pi^2}{6}$
3	1.20206
4	$\frac{\pi^4}{90}$
5	1.03692
6	$\frac{\pi^6}{945}$
7	1.00835
8	$\frac{\pi^8}{9450}$
9	1.00201
10	$\frac{\pi^{10}}{93555}$

Tablica 1: Sume poopćenih harmonijskih redova

Dakle, što možemo zaključiti iz konvergencije poopćenog harmonijskog reda za $s > 1$? Svi redovi oblika $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, za $s = 2, 3, 4...$ su konvergentni, pa iz harmonijskog reda možemo ukloniti sve članove oblika $\frac{1}{m}$, pri čemu je m potpuni kvadrat, kub ili bilo koji drugi stupanj nekog prirodnog broja, a da preostali red i dalje divergira. Naredno poglavlje ide korak dalje i omogućava nam da uklonimo sve članove koji odgovaraju složenim brojevima.

5. Suma po prostim brojevima

Euler je prvi otkrio duboku vezu između (poopćenog) harmonijskog reda i prostih brojeva. U dokazu Teorema 2, on je koristio jednu interesantnu jednakost koja danas nosi ime Eulerov identitet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \tag{13}$$

pri čemu se produkt na desnoj strani uzima po svim prostim brojevima p. Jednakost vrijedi za sve $s > 1$, dok je za $s = 1$ treba shvatiti uvjetno jer su obje strane beskonačne. Na osnovi Eulerovog identiteta, jednostavno se može zaključiti i da red recipročnih vrijednosti prostih brojeva divergira. Ovo je nešto jači rezultat od klasičnog Euklidovog dokaza o postojanju beskonačno mnogo prostih brojeva. No, mi ćemo ovdje navesti vrlo elegantan dokaz ove tvrdnje, koji je izveo mađarski matematičar Paul Erdös (1913.-1996.). Dokaz je prezentiran u udžbeniku ([3]).

Teorem 4. *Red* $\displaystyle\sum_{p:p \text{ je prost}} \frac{1}{p}$ *divergira.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je suma $\displaystyle\sum_{p:p \text{ je prost}} \frac{1}{p}$ konačna. Tada se može naći $j \in \mathbb{N}$ takav da ostatak reda nakon j članova bude manji od $\frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{1}{p_{j+1}} + \frac{1}{p_{j+2}} + \frac{1}{p_{j+3}} + \ldots < \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Neka sada za svako $x > 0$, $N_j(x)$ predstavlja broj prirodnih brojeva $n \leq x$ koji nisu djeljivi ni jednim prostim brojem $p > p_j$. Svaki takav broj n možemo predstaviti u obliku

$$n = n_1^2 m, \tag{15}$$

gdje je m kvadratno slobodan, tj. nije djeljiv s kvadratom niti jednog prostog broja. To znači da je

$$m = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} \cdots p_j^{b_j}, \tag{16}$$

pri čemu je $b_i \in \{0, 1\}$, za $i = 1, 2, \ldots, j$. To znači da u (15) imamo najviše 2^j mogućih vrijednosti za m. Kako je $n_1 \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{x}$, to je

$$N_j(x) \leq 2^j \sqrt{x}. \tag{17}$$

S druge strane, brojeva $n \leq x$ djeljivih sa bilo kojim prostim brojem p je najviše $\frac{x}{p}$. To znači da $x - N_j(x)$, broj onih brojeva $n \leq x$ djeljivih sa makar jednim od prostih brojeva $p > p_j$, nije veći od

$$\frac{x}{p_{j+1}} + \frac{x}{p_{j+2}} + \frac{x}{p_{j+3}} + \ldots < \frac{x}{2}. \tag{18}$$

Slijedi da za sve x, j vrijedi da je

$$\frac{x}{2} < N_j(x) \leq 2^j \sqrt{x}, \tag{19}$$

što je nemoguće jer je posljednja nejednakost netočna kad god je $x \geq 2^{2j+2}$. Slijedi da red $\displaystyle\sum_{p:p \text{ je prost}} \frac{1}{p}$ divergira.

$\square$

6. Kempnerovi redovi

U duhu prethodnih razmatranja dijelova harmonijskog reda koji konvergiraju, odnosno divergiraju, dolazimo do jednog interesantnog rezultata A. J. Kempnera iz 1914. godine objavljenog u radu ([4]). Kempner je razmatrao red dobijen brisanjem svih članova harmonijskog reda čiji nazivnik u decimalnom zapisu ima određenu znamenku. Ovakvih redova je naravno deset i pri tome svaki od njih odgovara jednoj od znamenki decimalnog zapisa $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tako je, primjerice, Kempnerov red koji odgovara znamenki 1 dan s

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{200} + \frac{1}{202} + \cdots \tag{20}$$

Šta možemo reći o konvergenciji ovog reda? Primijetimo najprije da brojeva s k znamenki koji ne sadrže znamenku 1 ima $8 \cdot 9^{k-1}$, jer imamo 8 mogućih izbora za prvu znamenku i 9 za sve ostale (inače nam je na raspolaganju 10 znamenki s tim što 0 ne može biti vodeća znamenka). Dalje, najveća recipročna vrijednost broja sa k znamenki je $\frac{1}{10^{k-1}}$. Na taj način red (20) možemo ograničiti odozgo sa redom

$$\begin{aligned} 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot 9^2 \cdot \frac{1}{10^2} + 8 \cdot 9^3 \cdot \frac{1}{10^3} + \cdots \quad &= \\ 8\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots\right)& \end{aligned} \tag{21}$$

No, red u zagradi je geometrijski sa kvocijentom $\frac{9}{10}$, pa je konvergentan. Zaključujemo da je i polazni Kempnerov red konvergentan, te da mu je suma manja od

$$8\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \cdots\right) = 8\left(\frac{1}{1 - 9/10}\right) = 80. \tag{22}$$

Za Kempnerove redove koji odgovaraju znamenkama $2, 3, \ldots, 9$ na istovjetan način pokazujemo da su konvergentni i da im je suma manja od 80. Za Kempnerov red koji odgovara znamenki 0 potrebno je izvršiti sitnu izmjenu u dokazu kako brojeva sa k znamenki koji ne sadrže znamenku 0 ima 9^k, po 9 izbora za svaku od znamenki. Na taj način se pokazuje da je suma Kempnerovog reda koji odgovara znamenki 0 manja od 90.

Na prvi pogled ovaj rezultat može djelovati kontraintuitivno, jer nam se čini da nismo izbacili toliko značajan dio članova zabranivši samo jednu znamenku decimalnog zapisa. Moglo bi se i brzopleto zaključiti da smo izbacili samo oko desetinu članova harmonijskog reda. No mi smo zapravo izbrisali ovim postupkom asimptotski "gotovo sve" članove. Naime, može se pokazati da skoro svi prirodni brojevi sadrže određenu znamenku i, štoviše, skoro svi brojevi sadrže unaprijed zadan niz znamenki. Vrijedi slijedeći teorem o kojem čitatelj može naći više detalja u ([3]).

Teorem 5. *Neka je $N(n)$ broj brojeva x ne većih od n, koji u brojevnom zapisu po bazi r ne sadrže znamenku b. Tada*

$$\frac{N(n)}{n} \to 0 \text{ kada } n \to \infty. \tag{23}$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljan n i neka je k takav da

$$r^{k-1} \leq n < r^k. \tag{24}$$

Kako k-znamenkastih brojeva koji u bazi r ne sadrže bilo koju od znamenki ima najviše $(r-1)^k$ (u slučaju nule), to je

$$N(n) \leq r - 1 + (r-1)^2 + \ldots (r-1)^k \leq k(r-1)^k. \tag{25}$$

Stoga vrijedi

$$\frac{N(n)}{n} \leq k\frac{(r-1)^k}{r^{k-1}} \leq kr(\frac{r-1}{r})^k, \tag{26}$$

što teži nuli kada $n \to \infty$.

$\square$

Primijetimo da je izjava o nizovima znamenki sadržana u prethodnom teoremu, jer svaki niz znamenki možemo smatrati znamenkom u nekoj bazi, kao na primjer niz 536 u decimalnom zapisu koji možemo smatrati znamenkom u bazi $r = 1000$.

Na kraju recimo još i da su gornja ograničenja za sume Kempnerovih redova prilično slaba te da je njihova suštinska uloga bila samo da pokažu konvergenciju. Sporost konvergencije onemogućava direktno izračunavanje točnih suma, no odgovarajućim transformacijama R. Baillie je pronašao metodu za precizno sumiranje, te svoje rezultate objavio u radu ([5]). Sume Kempnerovih redova na pet decimala prikazane su u Tablici 6..

uklonjena znamenka	suma reda
0	23.10344
1	16.17696
2	19.25735
3	20.56987
4	21.32746
5	21.83460
6	22.20559
7	22.49347
8	22.72636
9	22.92067

Tablica 2: Sume Kempnerovih redova

Literatura

[1] V.A. ZORIČ, *Matematičeskij analiz*, Nauka, Moskva, 1981.

[2] J. HAVIL, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[3] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford, 1980.

[4] A. J. KEMPNER, A Curious Convergent Series. *American Mathematical Monthly* **21** (1914), 48-50.

[5] R. BAILLIE, Sums of Reciprocals of Integers Missing a Given Digit. *American Mathematical Monthly* **86** (1979), 372-374.

[6] S. J. KIFOWIT, T. A. STAMPS, The harmonic series diverges again and again. *The AMATYC Review*, **27** (2006), 31-43.

[7] R. P. BOAS, J. W. WRENCH, Partial Sums of the Harmonic Series. *American Mathematical Monthly* **78** (1971), 864-870.