Metodički obzori 4(2009)1-2
Stručni rad
Professional article
UDK: 371.3 : 51
Primljeno: 15. 7. 2008.

FUNKCIJE "NAJVEĆE CIJELO" I "RAZLOMLJENI DIO"

Dr. sc. Vladimir Kadum
Odjel za obrazovanje učitelja i odgojitelja
Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli (Hrvatska)
vladimir.kadum@pu.t-com.hr

S a ž e t a k

Pojam funkcije jedan je od važnijih, ako ne i najvažniji matematički pojam.

S funkcijama se učenici susreću već u prvom razredu osnovne škole kod zbrajanja dvaju prirodnih brojeva (naravno, naziv se toga pojma ne navodi), u drugom razredu pojam funkcije imamo kod množenja dvaju prirodnih brojeva, itd.

U ovome radu se izlaže elementarna teorija dviju funkcija, *funkcije* "*najveće cijelo*" i *funkcije* "*razlomljeni dio*", funkcije s kojima se učenici (eventualno) susreću u srednjoj školi. Domena tih funkcija je skup realnih brojeva, a kodomena, za prvu je skup cijelih brojeva, a za drugu poluinterval $[0, 1\rangle$.

Ključne riječi: *funkcija, funkcija "najveće cijelo", funkcija "razlomljeni dio", skup cijelih brojeva, skup realnih brojeva, domena, kodomena*

Definicija 1. Neka je $x \in \mathbf{R}$. Tada broj $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbf{Z} : m \leq x\}$ zovemo *najveći cijeli dio od x* ili *cijeli dio realnog broja x* ili *antje od x*.

Za $x \in \mathbf{R}$ broj $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, $\{x\} \in [0, 1\rangle$, zovemo *razlomljeni dio od x* ili *decimalni dio realnog broja x* ili *mantisa od x*.

Primjer 1. (a) Za $x = 7.6$ je $\lfloor 7.6 \rfloor = 7$ i $\{7.6\} = 0.6$. (b) Za $x = 0.73$ je $\lfloor 0.73 \rfloor = 0$ i $\{0.73\} = 0.73$.
(c) Za $x = -4.3$ je $\lfloor -4.3 \rfloor = -5$ i $\{-4.3\} = 0.7$.

Budući da su $\lfloor x \rfloor$ i $\{x\}$ definirani za svaki realni broj x, možemo iskazati definicije *funkcije* "*najveće cijelo*" i *funkcije* "*razlomljeni dio*".

Definicija 2. Funkciju

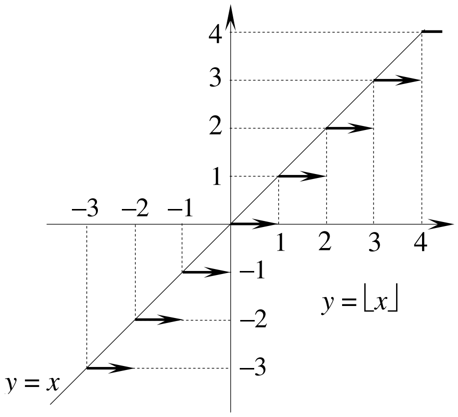
$$\lfloor\ \rfloor : \mathbf{R} \to \mathbf{Z} \quad \text{ili} \quad x \mapsto \lfloor x \rfloor \tag{1}$$

zovemo *funkcija* "*najveće cijelo*", odnosno *funkcija* "*cijeli dio realnog broja x*", odnosno *funkcija* "*antje od x*".

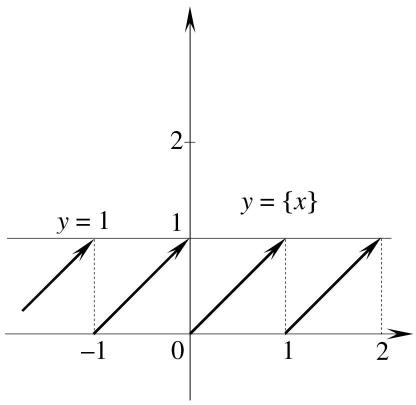
Funkcija (1) definirana je za svaki $x \in \mathbf{R}$ kao najveći cjeli broj koji nije veći od x.

Funkcija (1) je prekidna za sve cjelobrojne vrijednosti nezavisne varijable x.

Graf funkcije (1) prikazan je na slici 1. Vidimo da se sastoji od bezbroj horizontalnih segmenata duljine 1, kojima su lijevi krajevi na pravcu $y = x$ (jer za cijeli x je $\lfloor x\rfloor = x$) dok su segmenti s desna otvoreni.



Slika 1.



Slika 2.

Definicija 3. Funkciju

$$\{\ \} : \to [0, 1\rangle \qquad \text{ili} \qquad x \mapsto \{x\} \tag{2}$$

zovemo *funkcija* "*razlomljeni dio*", odnosno *funkcija* "*decimalni dio broja x*", odnosno *funkcija* "*mantisa od x*".

Funkcija (2) definirana je za svaki realni broj x.

Graf funkcije (2) prikazan je na slici 2. Sastoji se od bezbroj paralelnih segmenata duljine $\sqrt{2}$ kojima su lijevi krajevi na apscisnoj osi, nagnuti prema njoj pod kutom od 45°, a s desne su strane otvoreni.

Funkcija (2) je periodična s osnovnim periodom $p = 1$, pa vrijedi

$$\{x + 1\} = \{x\}$$

ili, općenito

$$\{x + k\} = \{x\}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Primjer 2. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \lfloor x\rfloor + x$.

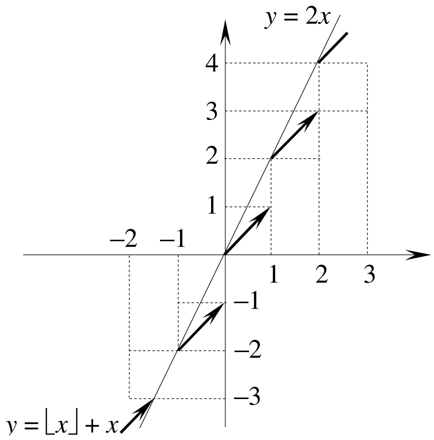
Zadana funkcija definirana je na cijelom skupu **R**. Njen graf je prikazan na slici 3. Sastoji se od bezbroj segmenata duljine $\sqrt{2}$ kojima su lijevi krajevi na pravcu $y = 2x$ dok su segmenti s desna otvoreni.

Primjer 3. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x\rfloor}$.

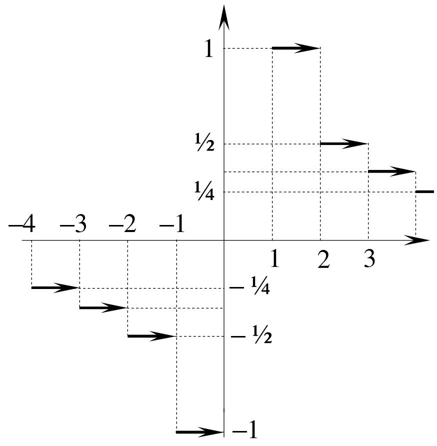
Zadana funkcija je "recipročna vrijednost najvećeg cijelog". Zbog $\lfloor x \rfloor \neq 0$, ona nije defi nirana tamo gdje je $\lfloor x \rfloor = 0$, tj. nije definirana na intervalu $0 \leq x < 1$. Prema tome, njeno je područje definicije

$$D(f) = x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1\rangle.$$

Graf zadane funkcije prikazan je na slici 4. Vidimo da je smješten u I. i III. kvadrantu; sastoji se od bezbroj segmenata duljine 1.



Slika 3.



Slika 4.

Primjer 4. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor}$.

Područje definicije zadane funkcije, zbog $\lfloor x \rfloor \neq 0$, je $D(f) = x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1\rangle$. Njen graf je prikazan na slici 5. Sastoji se od bezbroj segmenata. Pravci, na kojima leže ti segmenti, svi prolaze ishodištem pravokutnog koordinatnog sustava. Krajevi segmenata, u kojima su oni zatvoreni, svi su na pravcu $y = 1$.

Primjer 5. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$.

Zadana funkcija definirana je za sve vrijednosti iz skupa **R**, tj. $D(f) = x \in \mathbf{R}$. Graf funkcije $y = x^2$ je parabola. Da nacrtamo graf zadane funkcije, promotrit ćemo sve vrijednosti funkcije po intervalima $[m, m + 1\rangle$, $m \in \mathbf{Z}$. Graf zadane funkcije prikazan je na slici 6. Sastoji se od bezbroj segmenata (s lijeva zatvorenih) duljine 1, paralelnih s x-osi, kojima je početak na grafu parabole $y = x^2$.

Primjer 6. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \{x\}^2$.

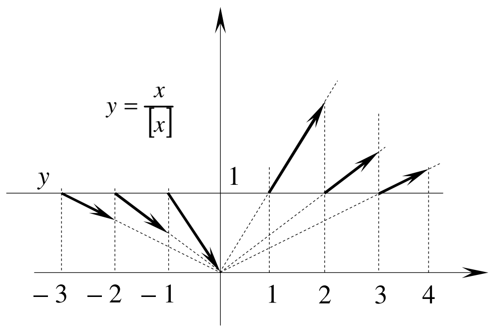
Zadana funkcija je definirana na cijelom skupu **R**.

Da bismo nacrtali graf zadane funkcije, promotrit ćemo sve vrijednosti funkcije po intervalima $[m, m + 1\rangle$, $m \in \mathbf{Z}$. Graf je prikazan na slici 7. Sastoji se od bezbroj (sukladnih) dijelova kojima je početak na x-osi (i s te su strane zatvoreni) a kraj je na pravcu $y = 1$.

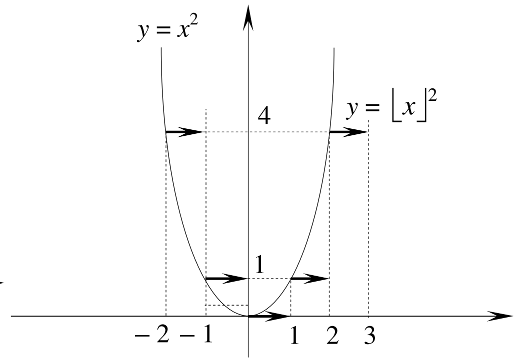
Primjer 7. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \{x\}$.

I ova je funkcija definirana na cijelom skupu **R**.

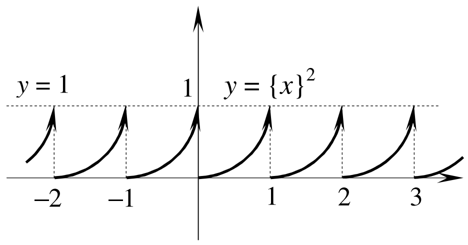
Da bismo nacrtali graf zadane funkcije, promotrit ćemo sve vrijednosti funkcije po intervalima $[m, m + 1\rangle$, $m \in \mathbf{Z}$. Graf je prikazan na slici 8.



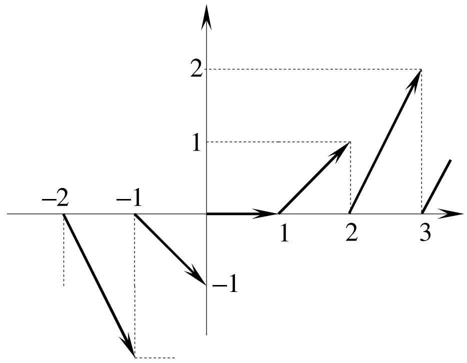
Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.

Primjer 8. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^2 - \lfloor x \rfloor^2$.

Funkcija je definirana na cijelom skupu **R**. Vrijednost funkcije promatrat ćemo po intervalima $[m, m + 1\rangle$, $m \in \mathbf{Z}$; imamo:

$$x \in [-2, -1\rangle, \quad f(x) = x^2 - 4;$$
$$x \in [-1, 0\rangle, \quad f(x) = x^2 - 1;$$
$$x \in [0, 1\rangle, \quad f(x) = x^2;$$
$$x \in [1, 2\rangle, \quad f(x) = x^2 - 1;$$

. . . .

Skicirajte graf zadane funkcije.

Iz definicija funkcija $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ i $x \mapsto \{x\}$ proizlaze njihova osnovna svojstva, koja iskazujemo teoremom.

Teorem 1. Neka su x i y realni brojevi. Tada je:

(a) $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$;

(b) $\lfloor m \rfloor = m$, $\{x\} = 0$, $m \in \mathrm{Z}$;

(c) $0 \le \{x\} < 1$;

(d) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$;

(e) $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$;

(f) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \text{ cijeli broj} \\ -1, & \text{ako } x \text{ nije cijeli broj} \end{cases}$;

(g) $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $m \in \mathrm{Z}$;

(h) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 1$;

(i) $\lfloor x - y \rfloor \le \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \le \lfloor x - y \rfloor + 1$;

(j) $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \le \lfloor xy \rfloor \le \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, ako su $x,y \ge 0$;

(k) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x}{n} \right\rfloor$, $\forall n \in \mathrm{N}$;

(l) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$, ako je $a \ge 0$.

D o k a z a. Tvrdnje (a), (b) i (c) neposredno slijede iz definicije 1.

(d) $$x - 1 \overset{(a)}{=} (\lfloor x \rfloor + \{x\}) - 1 = \lfloor x \rfloor + \underbrace{(\{x\} - 1)}_{<0} \overset{(c)}{<} \lfloor x \rfloor \overset{def.1.}{\le} x;$$

dakle je

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$.

(e) $$\lfloor x \rfloor \overset{def.1.}{\le} x \overset{(a)}{=} \lfloor x \rfloor + \underbrace{\{x\}}_{\in[0,1\rangle} \overset{(c)}{<} \lfloor x \rfloor + 1,$$

slijedi da je

$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(f) Tvrdnja neposredno slijedi iz definicije 1.

(g) $$\lfloor x + m \rfloor \overset{(a)}{=} \lfloor (\lfloor x \rfloor + \{x\}) + m \rfloor = \left\lfloor \underbrace{(\lfloor x \rfloor + m)}_{\in \mathrm{Z}} + \underbrace{\{x\}}_{\in[0,1\rangle} \right\rfloor \overset{def.1.}{=} \lfloor \lfloor x \rfloor + m \rfloor \overset{(b)}{=} \lfloor x \rfloor + m \,;$$

dakle je

$\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

(h) $\lfloor x+y \rfloor \overset{(a)}{=} \lfloor (\lfloor x \rfloor + \{x\}) + (\lfloor y \rfloor + \{y\}) \rfloor = \lfloor (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) + \{x\} + \{y\} \rfloor \overset{(g)}{=}$

$$\overset{(g)}{=} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \underbrace{\left\lfloor \underbrace{\underbrace{\{x\}}_{\in[0,1\rangle} + \underbrace{\{y\}}_{\in[0,1\rangle}}_{\in[0,2\rangle} \right\rfloor}_{\in[0,1\rangle}.$$

Odavde slijedi da je

$\lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \quad \wedge \quad \lfloor x+y \rfloor \ge \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor,$

pa je konačno

$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$

(i) Iz (h) slijedi da je

$\lfloor x-y \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor (x-y) + y \rfloor \le \lfloor x-y \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$

odnosno

$\lfloor x-y \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x \rfloor \le \lfloor x-y \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$

a odavde, sređivanjem, slijedi

$\lfloor x-y \rfloor \le \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \le \lfloor x-y \rfloor + 1.$

(j) $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \overset{def.1.}{\le} xy \overset{(c)}{<} (\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor y \rfloor + 1).$

Množenjem dobivamo

$\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \le xy < \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1;$

dalje je

$\lfloor \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \rfloor \le \lfloor xy \rfloor < \lfloor \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \rfloor,$

odnosno

$\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \le \lfloor xy \rfloor < \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$

tj.

$\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \le \lfloor xy \rfloor < \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor,$

gdje su $x,y \in \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

(k) U dokazu ove tvrdnje koristit ćemo *teorem o dijeljenju*. Vrijedi:

$(\forall \lfloor x \rfloor \in \mathrm{Z} \ \wedge \ \forall n \in \mathrm{N},\ \exists! q \in \mathrm{Z} \ \wedge \ \exists! r \in \mathrm{N}_0,\ 0 \le rn)\ (\lfloor x \rfloor = nq + r),$

tj. vrijedi

$\lfloor x \rfloor = nq + r.$ (3)

Zato je

$x \overset{(a)}{=} \lfloor x \rfloor + \{x\} \overset{(3)}{=} nq + r + \{x\},$

odnosno

$x = nq + \underbrace{(r + \{x\})}_{\in[0,n\rangle},$ (4)

pa je

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \overset{(4)}{=} \left\lfloor \frac{nq + (r + \{x\})}{n} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r + \{x\}}{n} \right\rfloor \overset{(g)}{=} q + \left\lfloor \frac{r + \{x\}}{n} \right\rfloor \overset{(4)}{=} q\,. \tag{5}$$

S druge strane je

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor \overset{(3)}{=} \left\lfloor \frac{nq + r}{n} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{n} \right\rfloor \overset{(g)}{=} q + \underbrace{\left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor}_{\in[0,1\rangle} \overset{(4)}{=} q\,. \tag{6}$$

Iz razvoja (5) i (6) slijedi da je $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$, što je trebalo dokazati.

(l) Neka je

$n^2 \le x < (n + 1)^2$, $n \in \mathrm{N}$, $x \ge 0$. (7)

Tada je, zbog (a),

$n^2 \le \lfloor x \rfloor + \{x\} < (n + 1)^2$,

odnosno

$n^2 \le \lfloor x \rfloor < (n + 1)^2$.

Korjenovanjem dobivamo $n \le \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n + 1$, a odavde slijedi

$$\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = n\,. \tag{8}$$

S druge strane, iz (7), slijedi $n \le \sqrt{x} < n + 1$, a odavde je

$$\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor = n\,. \tag{9}$$

Iz (8) i (9) slijedi $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$, što je trebalo dokazati.

Time je teorem u cijelosti dokazan. ■

Tvrdnje iskazane u teoremu 1 koristimo pri rješavanju jednadžbi u kojima se pojavljuju funkcije o kojima je riječ u ovome članku. Pokazat ćemo to s nekoliko primjera.

Primjer 9. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor \frac{2x-3}{4} \right\rfloor = x$, $x \in \mathbf{R}$.

Za zadanu jednadžbu mora biti

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{2x-3}{4} \right\rfloor}_{k \in \mathrm{Z}} = x\,, \tag{10}$$

a odavde slijedi da je

$$x = k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{11}$$

Zadanu jednadžbu riješit ćemo na tri načina.

P r v i   n a č i n. Po definiciji 1 je $\left\{\frac{2x-3}{4}\right\}=\frac{2x-3}{4}-\left\lfloor\frac{2x-3}{4}\right\rfloor$, a zbog (10) je $\left\{\frac{2x-3}{4}\right\}=\frac{2x-3}{4}-x$, odnosno $\left\{\frac{2x-3}{4}\right\}=\frac{-2x-3}{4}$. Zbog svojstva (c) iz teorema 1 slijedi $0\le\frac{-2x-3}{4}<1$, odnosno $0 \le -2x - 3 < 4$, tj.

$$3 \le -2x < 7.$$

Odavde slijedi $-\frac{7}{2}<x\le-\frac{3}{2}$, pa je skup rješenja

$$x \in \{-3, -2\}. \tag{12}$$

D r u g i   n a č i n. Na osnovi svojstva (d) iz teorema 1 slijedi

$$\frac{2x-3}{4}-1<\left\lfloor\frac{2x-3}{4}\right\rfloor\le\frac{2x-3}{4}.$$

Zbog (10) je $\frac{2x-3}{4}-1<x\le\frac{2x-3}{4}$, odnosno $2x - 7 < 4x \le 2x - 3$.

Odavde, sređivanjem, dobivamo $-\frac{7}{2}<x\le-\frac{3}{2}$ odakle kao rješenje slijedi (12).

T r e ć i   n a č i n. Temeljem (e) iz teorema 1 je

$$\left\lfloor\frac{2x-3}{4}\right\rfloor\le\frac{2x-3}{4}<\left\lfloor\frac{2x-3}{4}\right\rfloor+1,$$

a zbog (10) imamo $x\le\frac{2x-3}{4}<x+1$. Sređivanjem dobivamo $-\frac{7}{2}<x\le-\frac{3}{2}$ odakle kao rješenje slijedi (12).

Primjer 10. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor\frac{2x-4}{3}\right\rfloor=\frac{2x+4}{4}$.

Za zadanu jednadžbu mora biti

$$\underbrace{\left\lfloor\frac{2x-4}{3}\right\rfloor}_{k\in Z}=\frac{2x+4}{4}, \tag{13}$$

a odavde je $\frac{2x+4}{4}=k$, odnosno

$$x = 2k - 2, \quad k\in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

Zamjenom (14) u zadanu jednadžbu, ova poprima sljedeći oblik

$$\left\lfloor\frac{4k-8}{3}\right\rfloor=k. \tag{15}$$

Temeljem definicije 1 imamo $\left\{\frac{4k-8}{3}\right\}=\frac{4k-8}{3}-\left\lfloor\frac{4k-8}{3}\right\rfloor$, a zbog (15) je

$\left\{\frac{4k-8}{3}\right\} = \frac{4k-8}{3} - k$, odnosno $\left\{\frac{4k-8}{3}\right\} = \frac{k-8}{3}$. Primjenom svojstva (c) imamo

$$0 \le \left\{\frac{k-8}{3}\right\} < 1 .$$

Sređivanjem dobivamo $8 \le k < 11$, pa je $k \in \{8, 9, 10\}$, a zbog (14) rješenje zadane jed nadžbe je

$$x \in \{14, 16, 18\}.$$

Primjer 11. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor \frac{x^2-3}{x-2} \right\rfloor = x+4$.

Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku $\left\lfloor x+2+\frac{1}{x-2} \right\rfloor = x+4$, odnosno

$$\left\lfloor \frac{1}{x-2} \right\rfloor = 2 . \tag{16}$$

Primjenom svojstva (d) imamo $\frac{1}{x-2} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x-2} \right\rfloor \le \frac{1}{x-2}$, odnosno

$$\frac{3-x}{x-2} < \left\lfloor \frac{1}{x-2} \right\rfloor \le \frac{1}{x-2} .$$

Zbog (16) posljednji izraz možemo pisati u obliku $\frac{3-x}{x-2} < 2 \le \frac{1}{x-2}$. Budući je

$$\frac{1}{x-2} \ge 2 \text{, to je } x-2>0,$$

pa množenjem sa $(x-2)$ i sređivanjem dobivamo $7 - x < 2x \le 5$, odakle slijedi

$$(7-x<2x) \ \wedge \ (2x \le 5), \quad \text{tj.} \quad x > \frac{7}{3} \ \wedge \ x \le \frac{5}{2} .$$

Dakle je $\frac{7}{3} < x \le \frac{5}{2}$, što znači da jednadžba nema rješenja.

Primjer 12. Riješimo jednadžbu $4x^2 - 4x - 3 = 4\left\lfloor \frac{2x-1}{2} \right\rfloor$.

Uzimanjem $\frac{2x-1}{2} = t$ slijedi da je

$$x = t + \frac{1}{2} , \tag{17}$$

pa zamjenom u zadanu jednadžbu dobivamo $4(t+\frac{1}{2})^2 - 4(t+\frac{1}{2}) - 3 = 4\lfloor t \rfloor$, odnosno, nakon sređivanja

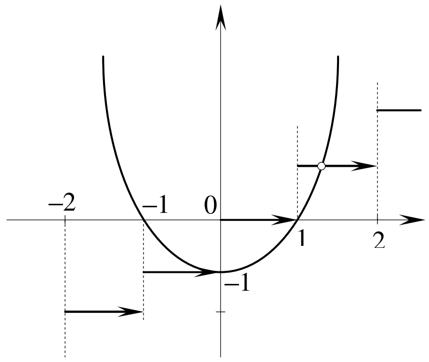
$$t^2 - 1 = \lfloor t \rfloor.$$

Nacrtat ćemo grafove funkcija $f(t) = t^2 - 1$ i $f(t) = \lfloor t \rfloor$ (slika 9). Iz slike se vidi da se ova dva grafa sijeku u jednoj točki, tj. za $t < 1$ i $t \geq 2$ zadana jednadžba nema rješenja. Za $1 \leq t < 2$ je $t^2 = 2$ i $\lfloor t \rfloor = 1$. Jedino rješenje nalazimo ovako:

$$1 = t^2 - 1,$$

odnosno $t = \sqrt{2}$, pa je, zamjenom u (17),

$$x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$



Slika 9.

Primjer 13. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor \frac{3x-2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = x$.

Za zadanu jednadžbu mora biti

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{3x-2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor}_{k \in \mathrm{Z}} = x, \tag{18}$$

a odavde je $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$. Iz (18) i (d) slijedi

$$\frac{3x-2}{4} - 1 + \frac{x+1}{3} - 1 < x \leq \frac{3x-2}{4} + \frac{x+1}{3}.$$

Sređivanjem je $\frac{13x-26}{12} < x \leq \frac{13x-2}{12}$, odnosno $13x - 26 < 12x \leq 13x - 2$. Odavde je

$$(13x - 26 < 12x) \quad \wedge \quad (12x \leq 13x - 2)$$

ili $(x < 26) \quad \wedge \quad (x \geq 2)$, odnosno $2 \leq x < 26$, pa je $x \in \{2, 3, 4, \ldots, 25\}$, ali zadanu jed nadžbu zadovoljavaju samo vrijednosti x iz skupa

$$x \in \{2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19\}.$$

Primjer 14. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor \frac{x-1}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \log x$.

Izraz $\left\lfloor \frac{x-1}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor$ možemo napisati u obliku $\left\lfloor \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right\rfloor$, odnosno

$$\left\lfloor\left(\frac{x}{2}-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\right)-\frac{1}{2}\right\rfloor,$$

tj. (po definiciji 1) $\left\lfloor\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right\rfloor$.

Za $\left\{\frac{x}{2}\right\}\geq\frac{1}{2}$ je $\left\lfloor\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right\rfloor=0$, a za $0\leq\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}$ je $\left\lfloor\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right\rfloor=1$. Stoga je:

ili $log\ x = 0$, pa je $x = 1$,

ili je $log\ x = -1$, pa je $x = 10^{-1}$.

Primjer 15. Riješimo jednadžbu $\lfloor(x-1)^2\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Po definiciji 1 je $\lfloor x\rfloor = k$, pa je prema (e)

$$k \leq x < k + 1,\quad k\in \mathbf{Z}.$$

Iz $\lfloor(x-1)^2\rfloor=\lfloor x\rfloor = k$ je

I. $\qquad k \leq (x-1)^2 < k + 1$

i

II. $\qquad k \leq x < k + 1.$

Budući da je $0 \leq (x-1)^2 < k + 1$ mora biti $k \geq 0$, a to znači da nijedan negativan broj ne može biti rješenje zadane jednadžbe.

Iz I. slijedi

I.$_1$ $\qquad (x-1)^2 \geq k,$

I.$_2$ $\qquad (x-1)^2 < k + 1.$

Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe I.$_1$ $(x-1)^2 = k$ su $x_{1,2}=1\pm\sqrt{k}$, a pripadne jednadžbe I.$_2$ $(x-1) = k + 1$ su $x_{3,4}=1\pm\sqrt{k+1}$. Zato je rješenje nejednadžbe I.$_1$

$$\left\langle-\infty,\ 1-\sqrt{k}\right]\cup\left[1+\sqrt{k},\ +\infty\right\rangle, \tag{19}$$

a nejednadžbe I.$_2$

$$\left\langle1-\sqrt{k+1},\ 1+\sqrt{k+1}\right\rangle. \tag{20}$$

Presjek rješenja (19) i (20) je skup

$$\left\langle1-\sqrt{k+1},\ 1-\sqrt{k}\right]\cup\left[1+\sqrt{k},\ 1+\sqrt{k+1}\right\rangle.$$

Kako je po uvjetu II. $x\in[k, k+1\rangle$, konačno rješenje dobivamo u skupovima oblika

$$S_k=\left(\left\langle1-\sqrt{k+1},\ 1-\sqrt{k}\right]\cup\left[1+\sqrt{k},1+\sqrt{k+1}\right\rangle\right)\cap\left[k,\ k+1\right\rangle,\quad k\geq 0.$$

Zato za $k = 0, 1, 2, \ldots$ redom dobivamo

$k = 0 \quad\Rightarrow\quad S_0 = (\langle 0, 1] \cup [1, 2\rangle) \cap [0, 1\rangle \quad\Rightarrow\quad S_0 = \langle 0, 1\rangle;$

$k = 1 \quad\Rightarrow\quad S_1 = \left(\left\langle 1-\sqrt{2},\ 0\right] \cup \left[2,\ 1+\sqrt{2}\right\rangle\right) \cap \left[1,\ 2\right\rangle \quad\Rightarrow\quad S_1 = \emptyset;$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad S_2=\left(\left\langle 1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3}\right\rangle\right) \cap \left[2,\ 3\right\rangle$$

$$S_2=\left[1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3}\right\rangle;$$

$$k=3 \quad \Rightarrow \quad S_3=\left(\left\langle -1,\ 1-\sqrt{3}\right] \cup \left[1+\sqrt{3},\ 3\right\rangle\right) \cup \left[3,\ 4\right\rangle \quad \Rightarrow \quad S_3=\varnothing;$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad S_4=\left(\left\langle 1-\sqrt{5},\ -1\right] \cup \left[3,\ 1+\sqrt{5}\right\rangle\right) \cap \left[4,\ 5\right\rangle \quad \Rightarrow \quad S_4=\varnothing;$$

. . . .

Prema tome, skup rješenja zadane jednadžbe je

$$\left\langle 0,\ 1\right\rangle \cup \left[1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{3}\right\rangle.$$

Primjer 16. Riješimo jednadžbu $\left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{x}{10!} \right\rfloor = 1001$.

Zadana jednadžba dade se napisati u sljedećem obliku

$$x+\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{120} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{720} \right\rfloor + ... = 1001.$$

Svi pribrojnici istog su predznaka i kako je njihov zbroj 1001(pozitivan!), slijedi da će svaki od pribrojnika biti pozitivan ili jednak nuli. Stoga možemo pisati

$$x+\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \le 1001,$$

odnosno $x \le 667$. Odavde zaključujemo da su prvih pet pribrojnika pozitivni, a preostali su svi jednaki nuli. Zato zadana jednadžba poprima oblik

$$x+\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{24} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{120} \right\rfloor = 1001.$$

Iz uvjeta

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{24}+\frac{x}{120} \ge 1001$$

slijedi da je $x > 583.1$, a iz uvjeta

$$x+\frac{x-1}{2}+\frac{x-5}{6}+\frac{x-23}{24}+\frac{x-119}{120} \le 1001$$

je $x < 585.02$. Kako je $x \in \mathbf{Z}$, to je $x \in \{584, 585\}$. Međutim, uvrštavanjem u zadanu jed nadžbu uočavamo da 585 nije, a 584 je rješenje. Prema tome, rješenje zadane jednadžbe je $x = 584$.

Primjer 17. Koliko rješenja ima jednadžba $x^4 + 100\lfloor x \rfloor = 100x$?

Primjenom definicije 1 zadana se jednadžba može napisati u obliku

$$x^4 + 100\,(x - \{x\}) = 100x,$$

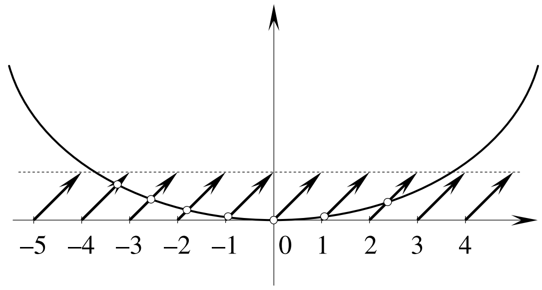
odnosno $x^4 = 100\{x\}$, tj.

$$\{x\} = \frac{x^4}{100}. \tag{21}$$

Zbog (c) i (21) je $0 \le \frac{x^4}{100} < 1$, a odavde je $|x| < \sqrt{10}$. Stoga su tražena rješenja u inter valu

$$\left\langle -\sqrt{10},\ \sqrt{10} \right\rangle.$$

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \frac{x^4}{100}$ i $g(x) = \{x\}$, (slika 10). Rješenje zadane jednadž be su apscise sjecišta grafova funkcija $f(x)$ i $g(x)$. Sa slike uočavamo da zadana jednadžba ima sedam (7) rješenja.



Slika 10.

Primjer 18. Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} x + \{y\} + \lfloor z \rfloor = 3.6 \\ \lfloor x \rfloor + y + \{z\} = 5.4 \\ \{x\} + \lfloor y \rfloor + z = 4.2 \end{cases}.$

Zbrajanjem jednadžbi iz zadanog sustava dobivamo

$$2x + 2y + 2z = 13.2$$

odnosno

$$x + y + z = 6.6. \tag{22}$$

Oduzimanjem od (22) redom prvu, drugu i treću jednadžbu zadanog sustava, dobivamo redom

$$\lfloor x \rfloor + \{z\} = 3.0,$$

$$\{x\} + \lfloor z \rfloor = 1.2,$$

$$\lfloor x \rfloor + \{y\} = 2.4.$$

Iz prve jednadžbe slijedi $\lfloor y \rfloor = 3$ i $\{z\} = 0$, iz druge $\lfloor z \rfloor = 1$ i $\{x\} = 0.2$, a iz treće $\lfloor x \rfloor = 2$ i $\{y\} = 0.4$. Sada je

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = 2 + 0.2 = 2.2;$$

$$y = \lfloor y \rfloor + \{y\} = 3 + 0.4 = 3.4;$$

$$z = \lfloor z \rfloor + \{z\} = 1 + 0.0 = 1.0.$$

Prema tome, rješenje zadanog sustava jednadžbi je uređena trojka (2.2; 3.4; 1,0).

Na važnost *funkcije* "*najveće cijelo*" $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ u teoriji brojeva ukazuju sljedeća dva teorema.

Teorem 2. Ako je $n \in \mathbf{N}$ i $x \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, onda ima $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ prirodnih brojeva manjih od ili jednakih x i djeljivih sa n.

D o k a z. Brojevi djeljivi sa n su svi njegovi višekratnici: n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, … Neka ima k prirodnih brojeva manjih od ili jednakih x i djeljivih sa n. Tada je

$$kn \le x < n(k + 1),$$

odnosno

$$k \le \frac{x}{n} < k + 1.$$

Prema tvrdnji (e) teorema 1 je

$$k = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor. \blacksquare$$

Teorem 3. Neka je p jednostavan (prim) broj, $n \in \mathbf{N}$ i a najveći stupanj broja p, takav da je p^a djelitelj broja $n!$. Tada je

$$a = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots \tag{23}$$

D o k a z. Najprije kažimo da je zbroj (23) konačan, jer za $m \ge \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor + 1$ je

$$\left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor = 0.$$

.

U nizu 1, 2, 3, …, n ima $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ brojeva djeljivih sa p, pa je

$$n! = p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p \cdot m_1 = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor ! \cdot m_1,$$

gdje je m_1 prirodni broj koji nije djeljiv sa p. Primjenjujući ovo razmatranje na niz 1, 2, 3, …, $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ i uvažavajući činjenicu da je

$$\left\lfloor \frac{\frac{n}{p}}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor,$$

dobivamo $n! = p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor ! \cdot m_2$, gdje je m_2 prirodni broj koji nije djeljiv sa p. Nastavljajući ovaj postupak dovoljan broj puta, dobit ćemo

$$n! = p^a \cdot m,$$

gdje je $m \in \mathbf{N}$ i nije djeljiv sa p. ■

Dokazat ćemo sada nekoliko tvrdnji kako bismo ukazali na važnost i mogućnost primjene *funkcije* "*najveće cijelo*" i *funkcije* "*razlomljeni dio*".

Primjer 19. Sa koliko nula se završava broj 2009!?

U rješavanju ovoga zadatka koristit ćemo se teoremom 3. Ako sa k označimo traženi broj nula, tada je

$$2009 = 10^k \cdot m$$

i m nije djeljiv sa 10. Kako je $10 = 2 \cdot 5$, to je

$$k = \left\lfloor \frac{2009}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2009}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2009}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2009}{5^4} \right\rfloor$$

$$k = 401 + 80 + 16 + 3$$

$$k = 500.$$

Dakle, broj 2009! završava sa 500 nula.

Primjer 20. Dokažimo tvrdnju: Ako su a i b relativno jednostavni (prim) prirodni brojevi, $a \geq 2$ i $b \geq 2$, onda je

$$\sum_{n=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Brojevi a i b su relativno jednostavni, $\frac{na}{b} + \frac{a(b-n)}{b} = a$, pa je

$$\left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a(b-n)}{b} \right\rfloor = a - 1.$$

Stoga je

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor = 2 \cdot \sum_{n=1}^{b-1} \left(\left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a(b-n)}{b} \right\rfloor \right) = (b-1)(a-1),$$

a odavde je $\sum_{n=1}^{b-1} \left\lfloor \frac{na}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$, što je trebalo dokazati.

Primjer 21. Dokažimo da vrijedi jednakost $\sum_{n=0}^{m-1}\left\lfloor x+\frac{n}{m}\right\rfloor=\lfloor mx\rfloor$.

Budući je $0 \le \{x\} < 1$, to postoji prirodni broj k, $0 \le k < m$, takav da je

$$\frac{k-1}{m} \le \{x\} < \frac{k}{m}.$$

S obzirom da je tada

$$\lfloor x\rfloor=\left\lfloor x+\frac{1}{m}\right\rfloor=\left\lfloor x+\frac{2}{m}\right\rfloor=\ldots=\left\lfloor x+\frac{m-k}{m}\right\rfloor$$

i

$$\left\lfloor x+\frac{m-k+1}{m}\right\rfloor=\left\lfloor x+\frac{m-k+2}{m}\right\rfloor=\ldots=\left\lfloor x+\frac{m-1}{m}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+1,$$

to je $\sum_{n=0}^{m-1}\left\lfloor x+\frac{n}{m}\right\rfloor=m\lfloor x\rfloor+k-1=\lfloor mx\rfloor$.

Primjer 22. Dokažimo da su svi brojevi $\{10^n\sqrt{2}\}$, $n\in\mathbf{N}_0$, međusobno različiti.

Pretpostavimo da je $\{10^p\sqrt{2}\}=\{10^q\sqrt{2}\}$, $p \ne q$, i neka je $\sqrt{2}=1.a_1a_2a_3\ldots$ decimalni zapis broja $\sqrt{2}$. Iz prethodne jednakosti slijedi

$$a_{n+p}=a_{n+q},$$

pa $\sqrt{2}$ ima mješovit periodičan decimalni razvoj s periodom $|p-q|$, što je nemoguće jer je $\sqrt{2}$ iracionalni broj.

Primjer 23. Izračunajmo koliko je znamenki potrebno da bi se napisali svi prirodni brojevi od N do M, $N < M$, uključujući i brojeve N i M.

Broj N ima

$$n=\lfloor log\, N\rfloor+1$$

znamenki, a broj M

$$m=\lfloor log\, M\rfloor+1$$

znamenki. Za napisati sve brojeve od 1 do N potrebno je

$$S_1=9\cdot\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 10^{k-1}+n(N+1-10^{n-1})=n(N+1)-\frac{10^n-1}{9},$$

tj.

$$S_1=n(N+1)-\frac{10^n-1}{9}$$

znamenki, a za napisati sve brojeve od 1 do M potrebno je (određuje se analognim postupkom)

$$S_2=m(M+1)-\frac{10^m-1}{9}$$

znamenki. Stoga je traženi broj znamenki

$$S = S_2 - S_1 = m(M+1) - n(N+1) - \frac{10^m - 10^n}{9}.$$

Primjer 24. Da li za svaki prirodni broj $n > 2$ vrijedi $\left\lfloor \frac{3^n}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3^n}{2^n - 1} \right\rfloor$?

Ovaj problem još nije riješen! Valjanost ove tvrdnje provjerena je za $3 \le n \le 150$, $n \in \mathbf{N}$.

Zadaci za vježbu:

1. Nacrtati graf funkcije:

1) $f(x) = \{x\} + x$;

2) $f(x) = \frac{1}{\{x\}}$;

3) $f(x) = \frac{x}{\{x\}}$;

4) $f(x) = \sqrt{1 - \lfloor x \rfloor}$;

5) $f(x) = \sqrt{\{x\} - 1}$

6) $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

2. Riješiti jednadžbe

1) $\left\lfloor \frac{6x+5}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$;

2) $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \frac{x-2}{3}$;

3) $\lfloor -x^2 + 3x \rfloor = \left\lfloor x^2 + \frac{1}{2} \right\rfloor$;

4) $\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3}$;

5) $\left\lfloor \frac{x^2+3}{x+2} \right\rfloor = x - 1$;

6) $\lfloor 3x^2 - x \rfloor = x + 1$;

7) $x^2 - 2\lfloor x \rfloor + \{x\} = 0$;

8) $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x$;

9) $\frac{1}{\{x\}} = \lfloor x \rfloor + 2009$;

10) $x^3 - \lfloor x \rfloor = 4$.

3. Koliko rješenja ima jednadžba $x^2 - \lfloor x^2 \rfloor = (x - \lfloor x \rfloor)^2$, za koje je $1 \le x \le n$.

4. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje vrijedi jednakost

$$\lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{3} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 2n.$$

5. Riješiti sustav jednadžbi:

1) $\begin{cases} x - y = 2001 \\ \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor = 2003 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1.1 \\ y + \lfloor z \rfloor + \{x\} = 2.2 \\ z + \lfloor x \rfloor + \{y\} = 3.3 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 2.7 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 4.3 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 3.8 \end{cases}$.

6. Dokazati: ako za neki realni broj x vrijedi $\{8x\} = \{15x\}$, onda je i $\{26x\} = \{75x\}$

7. Dokazati: sva pozitivna rješenja jednadžbe $\lfloor x \rfloor = x \cdot \{x\}$ su iracionalna.

8. Dokazati da jednadžba $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12\,345$ nema rješenja u skupu realnih brojeva.

9. Neka su *x*, *y*, *z* proizvoljni realni brojevi. Dokazati da je

$$x + \lfloor y + z \rfloor = y + \lfloor z + x \rfloor = z + \lfloor x + y \rfloor$$

ako i samo ako je $\{x\} = \{y\} = \{z\}$.

10. Ako je *n* prirodni broj veći od 1 i *n* jednostavan (prim) broj, dokazati da vrijedi

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor.$$

Literatura

ČELIKOVIĆ, L. (1996), *Funkcija* "*najveće cijelo*". U: *Bilten Matematička škola*, Hrvatsko matematičko društvo – Podružnica Osijek

ČELIKOVIĆ, L. (1990), *Antje funkcija* (*funkcija* "*najveće cijelo*"). U: *Društvo mladih matematičara* "*Pitagora*", Beli Manastir

ČUKIĆ, Lj. (1977), *Neke funkcije teorije brojeva*. U: *Materijali za mlade matematičare*, Društvo matematičara, fizičara i astronoma SRS, sv. 10; Beograd

DAKIĆ, B. (1993), *Matematika 4., zbirka zadataka za IV. razred gimnazije*. Zagreb: Element

DAKIĆ, B. (1996), *Matematika 2, zbirka zadataka za II. razred gimnazije*. Zagreb: Element

DEDEIĆ, R. (1977), *Uvod u matematičku analizu* (*pojam funkcije i njene neprekidnosti*). Rijeka: Pedagoški fakultet Sveučilišta u Rijeci

KRAJNOVIĆ, M. (1975), *Grafovi funkcija* (*priručnik za učenike i studente*). Zagreb: Školska knjiga

KUREPA, S. (1970), *Matematička analiza* (*diferenciranje i integriranje*). Zagreb: Tehnička knjiga

Matematičko-fizički list. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo (razna godišta)

SERDARUŠIĆ, V. (1995), *Matematika 4.* (*za 4. razred srednje škole*). Zagreb: Nabla

"THE BIGGEST WHOLE" FUNCTION AND "THE FRACTIONAL PART" FUNCTION

A b s t r a c t

The notion of function is one of the most important topics in mathematics. Pupils encounter functions already in the first grade of the primary school when summing up two natural numbers (naturally, the topic is not named), in the second grade the notion of function is related to multiplication of two natural numbers, etc.

The paper deals with the elementary theory of two functions, "the biggest whole" function and "the fractional part" function, whom the pupils encounter in secondary school. The domain of these functions is a group of real numbers, and the codomain, for the first one is the group of whole numbers and half-interval for the second one [0, 1⟩.

Key words: *function, “the biggest whole” function, “the fractional part” function, group of real numbers, group of whole numbers, domain, codomain*.

LE FUNZIONI “PARTE INTERA” E “PARTE DECIMALE”

Riassunto

Il concetto di funzione è uno dei più importanti, se non il più importante concetto matematico.

Gli alunni incontrano le funzioni già nella prima classe della scuola elementare nell’addizione di due numeri naturali (naturalmente senza usare questo nome), in seconda classe il concetto di funzione compare nella moltiplicazione di due numeri naturali, ecc.

Nel presente saggio si espone la teoria elementare di due funzioni, la funzione “parte intera”e la funzione “parte decimale” funzioni incontrate dagli alunni (eventualmente) nella scuola media. Il dominio di tali funzioni è l’insieme dei numeri reali, mentre il codominio è, per la prima funzione, l’insieme dei numeri interi, mentre per la seconda è l’insieme dei numeri decimali.

Parole chiave: *la funzione, la funzione “parte decimale” la funzione “parte intera” l’insieme dei numeri interi, l’insieme dei numeri reali, dominio, codominio*