Pregledni članak
UDK 371.3:51

MATEMATIČKA INTUICIJA I INTUICIJA U NASTAVI MATEMATIKE

Vladimir Kadum
Visoka učiteljska škola u Puli

Primljeno 8. svibnja 2006.

Autor u radu ističe da svaka znanstvena i filozofska spoznaja počinje intuicijom, kao sposobnošću ljudskoga uma da neposredno naslućuje, otkriva i spoznaje skrivene istine materijalne i duhovne stvarnosti i da bude, u sprezi s maštom, stalni pratilac logike i filozofije spoznaje.

Postanak i razvoj matematičkih pojmova i teorija pokazuje da matematička intuicija na prirodan i pravovremeni način otvara strogo logičke putove matematičke istine, koja se na tim putovima podvrgava logičkoj analizi.

Matematika se na svim svojim razinama mora predstaviti kao sredstvo, ali i kao model egzaktnog, racionalnog i apstraktnog rasuđivanja, veoma važnog za didaktičko-metodičko i gnoseološko stajalište, za svako teorijsko i praktično djelovanje.

Nastava matematike u opisivanju matematičkih pojmova i iskaza, kao i u njihovoj praktičnoj primjeni, prilazi intuitivno, otkrivajući njihove empirijsko-intuitivne korijene, uzimajući u obzir njihovu genezu i evoluciju, kako bi njihova spoznaja bila što dublja i usvajanje što učinkovitije.

Ključne riječi: *didaktika, filozofija, intuicija, matematika, mašta, metodika, nastava, pojam, rasuđivanje, spoznaja, teorija*

1. Uvod

U gnoseologiji kao filozofskoj disciplini, govori se o neposrednoj i posrednoj spoznaji.

Neposredna, *intuitivna* spoznaja – ili jednostavno *intuicija* – oblik je *direktnog* uočavanja veza i odnosa objekata i pojava, svojstava i zakonitosti u svakodnevnici, i to u njihovim konkretnim, ali i apstraktnim misaonim oblicima. *Intuicija je*, prema tome, *sposobnost predviđanja i shvaćanja prije naknadnih spoznaja i procesa mišljenja*. Takva spoznaja ne oslanja se na formalno-logički *dokaz*, ni na *eksperiment* kao metodu otkrivanja znanstvene istine. Ova se spoznaja stječe direktno preko osjetila – riječ je o *osjetilnoj intuiciji*, pri čemu najvažnija uloga pripada osjetilu vida, pa odatle naziv *vizualna intuicija* – ili se njome otkrivaju istine ne uzimajući u obzir ono što leži u osnovama osjetilnih zapažanja, nekom vrstom direktnog poniranja intelektom u sadržaje tih istina. Riječ je tada o *intelektualnoj* intuiciji, odnosno *intuiciji uma*.

Ono zajedničko osjetilnoj i intelektualnoj intuiciji jest *neposrednost* spoznaje i *nezavisnost* od dokaza u formalno-logičkom smislu, odnosno od eksperimenta u metodološko-gnoseološkom smislu.

Posredna se spoznaja, za razliku od neposredne, intuitivne spoznaje, stječe eksperimentom, odnosno iskustvom u najširem smislu te riječi, i dokazom uz pomoć obrazloženog logičkog rasuđivanja.

2. Matematička intuicija

U svakoj znanosti, pa tako i u matematici, do izražaja dolaze posredna i neposredna spoznaja. Međutim, u matematici je, za razliku od drugih znanosti, provedena najstroža i najdosljednija razlika između tih dviju spoznaja, tako da spoznaju u matematici čini sustav istina koji je logički suvisao i formaliziran.

Aksiomi su, na primjer, u matematici prihvaćeni kao *neposredne* istine, koji se, u logičnom smislu, prihvaćaju bez dokaza i koji izražavaju jedan oblik *neposredne* spoznaje. *Teoremi*, pak, predstavljaju jedan od oblika *posrednih* istina, koje usvajamo na osnovi dokaza, pa je spoznaja stečena na osnovi njih *posredna*.

Pod *intuitivnom* spoznajom, za razliku od *logičke* spoznaje, u matematici se razumijeva *direktno* uočavanje matematičkih istina apstrakcijom (intelektualna intuicija), ali i s pomoću osjetila (osjetilna intuicija), što je podloga velikoga broja *očitih* istina. *Intuicijom* otkrivena istina u matematici nije spoznata na osnovi matematičkog dokaza iz drugih matematičkih istina. Ona se kao takva, ako nije prihvaćena kao polazna, osnovna istina (aksiom), mora naknadno podvrgnuti matematičkom dokazu da bi dobila poziciju matematičke istine.

Valja istaknuti da se u matematici pod *intuicijom* često shvaća *predviđanje* ili *naslućivanje* neke matematičke istine, odnosno njezino globalno sagledavanje. Odbacimo li identificiranje *intuicije* s očitošću i empirijskim »dokazivanjem«, moramo ustvrditi da intuicija igra veliku, ako ne i svu, ulogu u otkrivanju novih matematičkih istina, u izgrađivanju matematike. Gotovo svakom[1] matematičkom otkriću prethodilo je i pre-

[1] Ne može se reći *svakom*, jer to nije potpuno utvrđeno i vjerojatno se nikada neće moći utvrditi, ali uvjerenje i velika vjerojatnost postoje.

thodi stanovito *predosjećanje*, stanovito *naslućivanje* da se na određenom »mjestu« skriva određena istina, određena zakonitost.

Postoje, međutim, i tzv. intelektualni »skokovi«. Onaj koji ima taj predosjećaj, koji to naslućuje ili zaista uviđa, pristupa ispitivanju nekoliko posebnih slučajeva i ako dobije potvrdan odgovor, pokušava – poznatim ili novim metodama, odnosno postupcima – naći opći dokaz[2].

Naslućivanje, formiranje ideje ili »iznenadno« uviđanje – G. Polya to naziva *sjajnom idejom* – čemu prethodi *inkubacija*, nazivamo *matematičkom intuicijom*. *Matematičku intuiciju* valja strogo razlikovati od *osjetilne intuicije*, posebno od *empirijskog »dokazivanja«*.

Ilustrirat ćemo ova razmišljanja s nekoliko primjera.

1. (Prvi Euklidov postulat.) *Zahtijeva se da se od svake točke prema svakoj točki može povući pravac*.
   Spoznaja ove istine postiže se ravnalom. Ovdje osjetilno zapažanje (osjetilna intuicija) igra osnovnu ulogu, a zatim se apstrakcijom (intelektualna intuicija) formira teorijsko stajalište.

2. *Zadan je pravac i sa svake njegove strane po jedna točka*. *Bilo koja spojnica tih dviju točaka presijeca zadani pravac*.
   Spoznaja ove istine postiže se spajanjem zadanih točaka ravnom crtom (ravnalom) ili ma kojom drugom zakrivljenom crtom. I ovdje osjetilno zapažanje igra osnovnu ulogu, a nakon toga apstrakcijom se formira teorijsko stajalište.

3. (Bolzano-Cauchyjev poučak.) *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu* $[a, b]$ i ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, *tada u segmentu $[a, b]$ postoji barem jedan broj x_0 takav da je $f(x_0) = 0$.*
   Istinitost ovoga poučka *intuitivno* je naslućena na osnovi grafa funkcije f u Kartezijevu pravokutnom koordinatnom sustavu, pa je zatim strogo aritmetički dokazana, bez pozivanja na geometrijsku intuiciju (odnosno geometrijsku očitost).
   Intuitivno je spoznato da graf neprekidne funkcije, na osnovi danih uvjeta, *mora* bar jedanput presjeći x–os i da je apscisa te točke presjeka x_0.

4. Često se događalo (i događa se) da se nasluti istinitost nekoga matematičkog izraza $I(n)$ koji zavisi od prirodnog broja n, i to jednostavnim induktivnim promatranjem za $n = 1, 2, 3, \ldots$, tj. da vrijede $I(1)$, $I(2)$,

[2] Matematičar **J. Hadamard** (Žak Adamar) ističe: *Jedini cilj matematičke strogosti jest da potvrdi, tj. ozakoni intuitivna naslućivanja*.

$I(3)$, …, pa se zatim metodom (potpune) matematičke indukcije[3] dokaže istinitost izraza $I(n)$ za svaki prirodni broj $n \geq 1$.
Ovdje osnovnu ulogu igra *intuicija* neograničene uzastopnosti izražene induktivnim korakom $I(k) \Rightarrow I(k+1)$, uz uvjet da vrijedi induktivna pretpostavka $I(k)$, gdje je k bilo koji prirodan broj, tj. $k \in \mathbf{N}$.

5. Mnoge matematičke istine koje su intuitivno naslućene, dokazane su svođenjem na proturječnost (*reductio ad absurdum*). Karakteristika je toga dokaza u tome što tvrdnjom suprotnom *intuitivno* naslućenoj istini dovodi do proturječnosti, pa na osnovi načela isključivanja trećega slijedi dokaz, odnosno zaključak, *intuitivno* naslućene istine.
Ovdje možemo kao primjer navesti pitagorejsko naslućivanje na osnovi geometrijske intuicije, nemjerljivost dijagonale i stranice kvadrata, tj. iracionalnost broja $\sqrt{2}$. Radi se o, po svojem značenju, klasičnom primjeru za razvoj matematike. Iracionalnost broja $\sqrt{2}$ matematički je dokazana svođenjem na proturječnost[4].

Općenito, u matematici se pod *intuicijom* (osjetilnom ili intelektualnom) razumijeva *oblik* neposredne spoznaje neke matematičke istine ili se razumijeva njezino *naslućivanje*, odnosno *predviđanje*, koju je zatim, ako nije polazna istina, prijeko potrebno dokazati. U oba slučaja ostvaruje se povezanost osjetilne i intelektualne intuicije. Zato se i govori o *intuitivnom* pristupu određenom matematičkom pojmu, određenoj matematičkoj teoriji, odnosno o *intuitivnom* pristupu određenom matematičkom području uzetom u cjelini.

Matematička intuicija, shvaćena u opisanom smislu, nezavisna je od bilo koje filozofske teorije intuicije, koja ima osnovni cilj da objasni podrijetlo intuicije kao oblika spoznaje ili naslućivanja istine. Potrebno je, prema tome, praviti razliku između intuicije u *matematičkom* i intuicije u *filozofskom* smislu, iako evolucija matematike i filozofije i njihovih uzajamnih odnosa upućuje na određenu, veoma često tijesnu povezanost matematičkog i filozofskog razumijevanja intuicije.

[3] Metodu matematičke indukcije možemo iskazati na sljedeći način: *Ako podskup* $S \subseteq \mathbf{N}$ *ima ova dva svojstva*

$$1 \in S,$$
$$x \in S \Rightarrow (x+1) \in S,$$

onda je $S = \mathbf{N}$.

[4] Radi se o Aristotelovu dokazu koji je zabilježio Euklid.

3. Uloga intuicije u razvoju matematičkih pojmova s osvrtom na nastavu matematike

Intuiciji, kao neposrednoj spoznaji matematičke istine, kao polaznoj ili osnovnoj spoznaji (s jedne strane) i kao naslućivanju matematičke istine općenito (s druge strane), pripada veoma važna uloga u razvoju matematike. Ona je ovdje nezamjenljiva kao pratitelj *geneze* i *evolucije* matematičkih pojmova i teorija te otkrivanja matematičkih istina. Kao spoznajni pratilac, neodvojiva je od životnoga i prirodnoga nastojanja i razvoja matematike, ona je *conditio sine qua non* logičke jasnoće matematičkih pojmova i teorija kao misaonih tvorevina. Upravo zato *matematičku strogost* valja promatrati kao odnos izraza *logičke jasnoće* i sigurnosti (s jedne strane) i *intuicije* kao oblika neposredne spoznaje matematičke istine, odnosno kao oblika naslućivanja matematičke istine uopće (s druge strane).

Cjelovito gledano, može se reći da *intuitivna* spoznaja dominira nad *logičkom* u povijesnoj genezi jednoga matematičkog pojma ili teorije i da se njihov uzajamni odnos mijenja tijekom povijesne evolucije pojma, odnosno teorije o kojima je riječ, po pravilu u korist *logičke* spoznaje, koja na posljetku u etapi matematičke formalizacije pojma, odnosno teorije, dominira nad *intuitivnom* spoznajom. One se tako uzajamno prate u razvoju matematike, jedna drugu potiču, dopunjuju i korigiraju, *dijalektički* se suprotstavljajući jedna drugoj, a ne *apsolutno*. To je jedno od važnih obilježja razvoja spoznaje matematičkih istina, koje ide od apstrakcije niže razine prema apstrakcijama sve viših razina.

Uz takvo stajalište, sve probleme koje impliciraju tretirane teme matematičke strogosti i intuicije treba promatrati *matematički* (u užem smislu) i *filozofski*, tj. *metodološki* i *gnoseološki* (u širem smislu).

Ova razmišljanja ilustrirat ćemo s tri primjera.

1. U Euklidovoj aksiomatizaciji geometrije sasvim se jasno oslikava sučeljavanje kriterija očitosti, koji je uglavnom *intuitivne* prirode – pozivanje na crtež kao ilustraciju onoga što se želi dokazati, prihvaćanje aksioma i postulata kao *očitih* istina, odnosno intuitivno spoznatih – s kriterijem dokazivosti, koji je čisto logičke prirode. Na etapi razvoja geometrije *intuitivni* pristup njezinoj konstrukciji kao hipotetičko-deduktivnog sustava bio je *nužan*. Tek kasnije, poslije mnogostoljetnog razvoja geometrije i matematike uopće, mogao je on biti predmetom kritičkog razmišljanja, što se i *zakonito* dogodilo Hilbertovom aksiomatizacijom Euklidove geometrije.

Kao dobar primjer toga može nam poslužiti jedan od najvažnijih i najpoznatijih iskaza u Euklidovim *Elementima*, V. postulat o usporednim pravcima, koji se nameće neobičnom snagom »apsolutne« istine, intuitivno spoznate. Taj aksiom nije neposredno bio jasan i bio je mnogo kompliciraniji od ostalih aksioma i postulata Euklidove geometrije, pa se od početka smatralo da bi to mogao biti poučak, a ne postulat. Zato su se mnogi matematičari trudili da dokažu ispravnost te pretpostavke, tj. nastojali su dokazati da je V. postulat poučak koji se može izvesti iz ostalih aksioma. Gotovo dva i pol milenija istraživanja vezana uz taj problem otkrila su svu nedovoljnost *intuitivne očitosti* kao isključivog oslonca zasnivanja geometrije, ali i matematike uopće. Taj mnogostoljetni proces istraživanja problema paralela bio je *zakonit* i *nužan* za otkriće Lobačevskog[5]. Oslanjajući se na taj proces, uspio je pokazati da je V. postulat nezavisan od ostalih Euklidovih polaznih stajališta i da se može zamijeniti drugim, suprotnim aksiomom i tako, logički i matematički besprijekorno, izgraditi geometrija bitno drugačija od geometrije Euklida – *neeuklidska* geometrija. Tu je *logička* spoznaja korigirala, dopunila i generalizirala *intuitivnu* spoznaju, pojam geometrije *logički* je *zaoštren* i podignut na višu razinu apstrakcije.

2. *Intuitivno* spoznata istina da se svakom uređenom paru realnih brojeva (x, y) može obostrano jednoznačno (bijektivno) pridružiti točka u ravnini bila je matematička osnova za koordinatnu geometriju, koja je omogućila da se napokon definira dotadašnja infinitezimalna analiza kao posebna matematička disciplina, u obliku diferencijalnog i integralnog računa. Ona je osobito poticala *intuitivni* pristup problemima teorije i primjene diferencijalnog i integralnog računa, a dobiveni rezultati u matematičkim istraživanjima prirode koja su ubrzo nakon toga uslijedila, nepobitno su dokazali pravilnost i opravdanost takvoga pristupa. Tada se u prvi plan nisu postavljala pitanja *logičke* fundiranosti koncepcija i metoda koje su sobom donijele Kartezijeva koordinatna geometrija i Newton-Leibnizova infinitezimalna analiza, niti su tada takva pitanja mogla dati odgovarajući poticaj razvoju matematike, posebno ako su u pitanju njezine primjene.

   Znanstveni fond činjenica u matematici toliko je narastao da se više nije moglo samo vjerovati u njezina stajališta i teorije, nego se po prirodi stvari postavljao zahtjev da se ta stajališta i teorije matematički

[5] **Lobačevskij, Nikolaj** (Nižnij Novgorod, 1792. – Kazan’, 1856.) veliki ruski matematičar. Pokazao je (1826.) da postoji geometrija u kojoj u ravnini postoji beskonačno pravaca koji prolaze točkom izvan nekog pravca, a ne sijeku taj pravac.

strogo zasnuju, da se otkriju i jasno istaknu njihovi polazni, osnovni elementi, da se kritički ispitaju temelji na kojima su izgrađene matematičke discipline, posebno infinitezimalna analiza. Nastaje razdoblje razvoja matematike koji je bio karakterističan po *logičkoj kritičnosti* tretiranja svih dostignuća u matematici postignutih pretežito na bazi *matematičke intuicije*.

3. U određenim oblicima *stroge* izgradnje matematike, posebice kada je u pitanju izgradnja cjelovite teorije (realnih) brojeva, prirodni se broj *intuitivno*, na osnovi prostornih i količinskih odnosa predmeta realnoga svijeta, usvaja kao *polazni*, *osnovni* pojam. Niz prirodnih brojeva i neposredno sagledavanje mogućnosti dodavanja jedinice kao osnovnog elementa prirodnog broja, *intuicija iteracije*, čine osnovu matematičkog mišljenja. Polazeći od izjave da je *prirodne brojeve stvorio Bog, a da je sve ostalo ljudsko djelo* i intuicije iteracije, samo je na metaforičan način izneseno *intuitivno* prihvaćanje prirodnog broja kao matematičkog pojma.
   Prapovijesno bijektivno podudaranje jednog skupa predmeta (na primjer, stada ovaca) sa skupom prstiju na rukama (ili zarezima na drvenom štapu), u cilju da se uočeni predmeti prebroje, spada u praizvore *intuitivne iteracije*, odnosno *intuitivnog* usvajanja pojma prirodnog broja. Ovdje je važno istaknuti da se bijektivno podudaranje skupa sa skupom u suvremenoj matematici stavlja u logičke i matematičke osnove pojma broja. Skup prstiju na rukama (ili zareza na drvenom štapu) javlja se kao neka vrsta reduktivnog skupa u svijesti primitivca, slično kao što se skup prirodnih brojeva, ili neki njegov – konačni ili beskonačni – dio, javlja kao reduktivni skup u svijesti suvremenog matematičara. Ovime se upućuje na duboke intuitivne korijene jedne visoko apstraktne ideje suvremene matematike.

Zbog rezultata dosadašnjih istraživanja i onoga što se zna o tome kako su veliki matematičari stvarali[6], mora se prihvatiti stajalište da je *kreativnost u matematici neposredno uvjetovana intuicijom*[7].

Nastava matematike, pedagoško-psihološki i didaktičko-metodički svrhovito utemeljena, mora voditi računa o genezi i razvoju matematičkih pojmova i teorija, i o ulozi *matematičke intuicije* u tome. To znači da nastava matematike mora biti takva da vješto i jezgrovito rekapitulira povijesni

[6] O tome se vrlo malo zna. Naime, poznato je da znanstvenici iznose rezultate svojega istraživanja, a ne i postupke kako su do tih rezultata došli.

[7] Od matematičara, koliko je poznato, dosad je o tome kako matematičari stvaraju pisao samo J. Hadamard. On je, zapravo, i bio najkompetentniji da se tim pitanjem pozabavi.

proces razvoja matematičkih pojmova i teorija, otkrivajući i koristeći se pritom, pogotovo u didaktičko-metodičkom smislu, njihovim *intuitivnim* korijenima. Tada se može očekivati da će učenik sasvim prirodno shvatiti i usvojiti njihovu *formalizaciju* i njihove veze s onim pojmovima koji su im prethodili na evolutivnoj ljestvici i kao takvi bili u neposrednoj vezi s realnošću, kao sveukupnom praktičnom i teorijskom djelatnošću čovjeka. Tako zasnovana i realizirana nastava matematike ostvarit će jedno od fundamentalnih pedagoško-psiholoških i didaktičko-metodičkih načela, *heurističko načelo*, gdje *matematička intuicija* zauzima gotovo primarno mjesto.

U kreiranju programa nastave matematike kao i u njegovoj praktičnoj realizaciji *neposrednom nastavom* mora doći primarno do punog izraza načelo *induktivnog* poniranja u matematičke pojmove i teorije, u kombinaciji s elementima dedukcije. Pritom treba posebno otkrivati i isticati ulogu *intuicije* u naslućivanju i spoznaji matematičkih istina. To znači da *intuitivnom* pristupu u obradi matematičkih pojmova i teorija s mjerom treba dati prevagu nad *apstraktno logičkim* pristupom, kako se to prirodno i očituje u genezi i razvoju navedenih pojmova.

Prezentira li se učeniku neki (matematički) *aksiom* kao jedan od polaznih, osnovnih stavova, trebalo bi ga obvezatno prikazati *induktivnim* postupkom kao *intuitivno* spoznatu istinu.

Slično valja postupiti i kada je riječ o nekom osnovnom, polaznom pojmu (koji se ne definira), gdje *intuicija* opet igra važnu ulogu, kada se učenik mora sroditi s takvim pojmovima kao što su, primjerice u geometriji, točka, pravac, ravnina, ili u aritmetici pojam prirodnog broja, ili u matematici općenito pojam skupa. Na takav se način sasvim prirodno i nenametljivo može izbjeći formalistički prilaz osnovnim, polaznim pojmovima i stajalištima, pri čemu učenik, u skladu sa svojim psihofizičkim uzrastom i svojim mentalnim sposobnostima, pravilno matematički usvoji, a samim time pravilno shvati i smisao *aksiomatske metode*, na kojoj se toliko inzistira u suvremenim koncepcijama zasnivanja nastave matematike.

Jedna od zadaća nastave matematike jest *razvijati* učenikovu intuiciju. To razvijanje mora ići do maksimalnih mogućnosti. Pritom valja poštovati individualne razlike među učenicima, jer, iako u osnovi ista, matematička intuicija se kod različitih učenika različito iskazuje.

Kad učenik računanjem nalazi

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4},$$

....

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

on obavlja *empirijsko rasuđivanje* nepotpunom matematičkom indukcijom. Ali, kada traži opći član aritmetičkog niza

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, \ldots, a_n = a_1 + (n-1)d,$$

on *rasuđuje intuitivno*.

Ili, kada s pravcima (eksperimentalno) nalazi da osna simetrija σ_t, σ_u, σ_v, gdje su t, u, v osi simetrije korespondentno stranicama BC, CA, AB trokuta ABC, *ima dvije stalne točke* – vrh B i presjek S osi simetrije t, u, v – učenik *rasuđuje empirijski*. Međutim, kada to isto uviđa, ali bez eksperimenta, onda on obavlja *intuitivno rasuđivanje*. A kada to i (logički) dokazuje, onda obavlja formalno, *deduktivno rasuđivanje*.

4. Zaključak

Svaka znanstvena i filozofska spoznaja, na više ili manje izraziti način, počinje *intuicijom*, kao sposobnošću ljudskog uma da *neposredno* naslućuje, otkriva i spoznaje skrivene istine materijalne i duhovne stvarnosti. Ta je čovjekova sposobnost nastala, razvijala se i stalno razvija u procesu njegova ukupnog praktičnog i teorijskog (misaonog) rada. Ona daje *inicijalni poticaj* znanstvenoj i filozofskoj spoznaji. U sprezi s *maštom*, ona je stalni *pratitelj* logike i filozofije spoznaje. Racionalno, logički i eksperimentalno verificirana, daje novi poticaj i otvara nove perspektive znanstvenoj i filozofskoj spoznaji.

Mašta, intuicija, logika i eksperiment, kojom se znanstvena i filozofska spoznaja doživljava, očituju se kao duboko senzitivan, kao umjetnički čin. U tom smislu bez *intuicije* nema niti može biti pune i prave znanstvene i filozofske spoznaje.

Postanak i razvoj matematičkih pojmova i teorija pokazuje da *intuicija*, kao čin naslućivanja i spoznaje matematičke istine, tj. *matematička intuicija*, otvara, prirodno i pravovremeno, nužne, strogo logičke putove spoznaji matematičke istine. Intuicija se na tim putovima potpuno prirodno podvrgava *logičkoj* analizi, koja se dopunjuje i eventualno korigira.

Taj uzajamni odnos intuitivnog i logičkog u spoznavanju matematičke istine karakterističan je za svaki pravi stvaralački proces u matematici. Zato je potrebno da na odgovarajući način dođe do punog izražaja i u *nastavi* matematike.

Na svim razinama matematike mora se na jednak način voditi računa da se matematika prezentira kao *sredstvo*, ali i kao *model* egzaktnog, racionalnog i apstraktnog rasuđivanja, nužnog, sa šireg didaktičko-metodičkog i gnoseološkog stajališta, za *svako* teorijsko i praktično djelovanje. Matematiku ne treba shvatiti i prezentirati kao »robinju« prakse, niti kao da je sama sebi cilj. To znači da se matematika u nastavi mora izlagati tako da se ima u vidu njezina *obrazovna* funkcija, kao sredstvo konkretnih primjena, ali isto tako da se ima i u vidu njezina *odgojna* funkcija u širem didaktičko-metodičkom i gnoseološkom, odnosno filozofskom smislu. Naime, ne smije se zaboraviti da je osnovna snaga matematike u njezinoj *slobodi* da kreira pojmove i teorije, u apstraktnosti i općenitosti njezinih pojmova i teorija, i da se bit realnih pojava, procesa i odnosa otkriva sve *dubljom apstrakcijom*, u stalnoj *interakciji* s tim pojavama, procesima i odnosima, i da *matematika* pruža takve putove.

Ti putovi uvijek vode *dijalektičkoj* sintezi rezultata postignutih *intuitivnom* i *logičkom spoznajom*.

U realizaciji tako osmišljene nastave matematike, u raznim situacijama teorijskih tumačenja matematičkih pojmova i iskaza, kao i njihovoj praktičnoj primjeni, *intuitivni* prilazi njima, otkrivanje njihovih *empirijsko-intuitivnih* korijena preko njihova postanka i razvoja, morali bi se posebno i stalno naglašavati da bi njihova spoznaja bila što dublja, a usvajanje što učinkovitije. Pritom treba *potpuno* poštovati načelo *induktivnog* uvođenja matematičkih pojmova i teorija, u kombinaciji s elementima *dedukcije*, i dati – u potrebnoj mjeri – prevagu *induktivnim* prilazima tim pojmovima i teorijama nad apstraktno-logičkim prilazima.

Tako osmišljena nastava matematike pridonijela bi da se maksimalno izbjegnu zamke, koje u sebi sadrže tzv. moderni programi nastave matematike, formalističkog tretiranja matematičkih pojmova i teorija sa strane učitelja i njihova formalističkog usvajanja sa strane učenika.

Literatura:

Butler, H. Charles i Wren, F. Lynwood (1967.), *Nastava matematike u srednjoj školi* (prijevod s engleskog), Beograd: Vuk Karadžić.

Euklid (1949.), *Elementi, I. knjiga* (prijevod s grčkog), Beograd: Građevinska knjiga.

Hadamard, Jachie (1954.), *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, New York: McGraw–Hill Book Company, Inc.

Kadum, Vladimir (2004.), Neke paradigme za uspješniju nastavu i usmjeravanje učenja u matematici, *Metodički ogledi*, Zagreb, god. 11, sv. 2(20), str. 95–110.

Polya, Gyorgy (2003.), *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo.

Prvanović, Stanko (1981.), *Teorija i praksa savremenog matematičkog obrazovanja na usmerenom vaspitno-obrazovnom stupnju*, Sarajevo: IRO »Veselin Masleša«.

MATHEMATICAL INTUITION AND INTUITION IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Vladimir Kadum

The author of this paper highlights that each and every scientific and philosophical insight starts with intuition, as the ability of the human mind to indirectly intuit, discover and cognise the hidden truths of our material and spiritual reality and as – together with imagination – the permanent companion of both the logic and philosophy of cognition.

The emergence and development of mathematical concepts and theories show that mathematical intuition, in a natural and timely fashion, opens the strictly logical paths of the mathematical truth, which is on these paths subjected to logical analysis.

On all its levels mathematics must present itself as both the means and model of exact, rational and abstract judgement, which is tremendously important for the didactical-methodical and gnoseological perspective, for each and every theoretical and practical action.

The teaching of mathematics approaches the description of mathematical concepts and statements, as well as their practical application, intuitively, unveiling their empirical-intuitive roots, appreciating their genesis and evolution, in order for their comprehension to be as deep and their acquisition as efficient as possible.

Key words: *didactics, philosophy, intuition, mathematics, imagination, methodology, teaching, concepts, judgement, insight, theory*