

VLASTA ŠČURIĆ-ČUDOVAN



Ljerka Dočkal-Krsnik

(1922. - 2009.)

Dr. sc. LJERKA DOČKAL-KRSNIK, umirovljena redovita profesorica Nacrtna geometrije na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i počasna članica našeg HDGG-a, preminula je 10. srpnja 2009. godine u Zagrebu.

Rođena je 16. travnja 1922. godine u Zlataru. Osnovnu školu i gimnaziju polazila je u Karlovcu, a na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu diplomirala je 1946. godine grupu *Nacrtna geometrija i Teorijska matematika*. Na istom je fakultetu 1971. godine doktorirala na temi *Plohe specijalnih krivulja u linearnim sistemima pravčastih ploha 2. reda, disertacija*.

Od 1946. do 1947. godine radila je kao profesorica Nacrtna geometrije na Industrijskoj, a od 1947. do 1949. na Tehničkoj školi u Karlovcu. Godine 1949. izabrana je za asistenticu na Katedri *Nacrtna geometrija* pod vodstvom prof. dr. Vilka Ničea na Tehničkom, kasnije Arhitektonsko-građevinsko-geodetskom fakultetu u Zagrebu. Godine 1961. birana je u zvanje predavača Nacrtna geometrije na Geodetskom odjelu AGG-a, a potom na Geodetskom fakultetu u Zagrebu. Na tom fakultetu 1968. godine postaje docenticom, izvanrednom profesoricom 1973., a redovitom profesoricom 1978. godine.

Područje znanstvenog rada Ljerke Dočkal-Krsnik bila je geometrija i to projektivna geometrija obrađena sintetičkim metodama, područje u kojem je akademik Niče bio svjetski poznati stručnjak. Iako sam s Ljerkom radila od 1961. godine pa sve do njenog umirovljenja 1983., nisam bila upoznata (vjerojatno zbog njene skromnosti) koliko ju je akademik Niče cijenio kao nastavnicu

i znanstvenicu, već od početnih radova. Pri njezinom napredovanju u zvanjima Geodetski je fakultet svaki put izabrao akademika Ničea u komisiju za ocjenu radova pa se originali njegovih izvješća mogu naći u arhivi fakulteta. U ovoj tužnoj prilici, kad sam pripremala In Memoriam za Ljerku Dočkal-Krsnik, pročitala sam ta izvješća i zaključila kako je u prikazu njenog znanstvenog i nastavnog rada najprimjerenije citirati upravo njezinog učitelja, akademika Vilka Ničea.

“...Od 1949. g. do danas radi Ljerka Dočkal kao asistent kod već spomenute katedre. Na ovom mjestu pokazala je ona vrlo lijepo uspjeh u svom radu, unatoč poznatom velikom opterećenju asistenta kod ove katedre. Radi ovog velikog opterećenja u nastavnom radu nije se mogla sistematski baviti i naučnim radom. No unatoč tome bavila se, a i danas se uspješno bavi u granicama fizičkih mogućnosti, nekim naučnim problemima na području projektivne i nacrtna geometrije...” (Iz izvješća Vijeću Arhitektonsko-građevinsko-geodetskog fakulteta u Zagrebu, rujna 1961. godine.)

S posebnim zadovoljstvom upoznajem čitatelje KOG-a s dijelovima Ničeovih ocjena i prikaza znanstvenih radova Ljerke Dočkal-Krsnik, u nadi da će se među njima naći i čitatelj koji će posegnuti za literaturom u tom području te nastaviti njezina zanimljiva istraživanja.

Na temelju svog prvog znanstvenog rada [1] primljena je Ljerka Dočkal-Krsnik za člana Naučnog vijeća Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu. U prijedlogu da joj se taj rad prihvati kao habilitacijski akademik Niče piše:

“... Prolazeći u takvom svom pripremnom radu geometrijska područja na kojima je zapeo njen interes, pronašla je niz problema koji do danas nisu riješeni u postojećoj literaturi, jer na njih nitko do danas nije naišao. Ti se problemi pojavljuju kao geometrijska mjesta raznovrsnih transverzala između zraka raznih pravčastih tvorevina, kao što su npr. pravčaste plohe, te kolinearno pridruženi snopovi zraka. Jedan takav dosad neriješen problem riješen je u predloženoj radnji, u kojoj se istražuje geometrijsko mjesto najkraćih transverzala od po dviju izvodnica jedne racionalne vitopere pravčaste plohe, kojima je geometrijsko mjesto nožišta poznato pod imenom ”strikciona linija” takvih ploha. Geometrijsko mjesto najkraćih transverzala od bilo kojih dviju izvodnica takve vitopere pravčaste plohe dosad nije istraženo, a taj problem riješila je Ljerka Dočkal u predloženom radu.

Budući da svaka pravčasta ploha ima ∞^1 izvodnica, a svaka od njih sa svakom ima najkraću transverzalu, to takvih neprekinuto složenih najkraćih transverzala u prostoru ima ∞^2 , te one čine istraženu, u naslovu radnje spomenutu, kongruenciju Ljerke Dočkal. Poznata ploha tangenta strikcionne linije takve pravčaste plohe čini samo jedan singularni sastavni dio ovakve kongruencije.

U svom radu Ljerka Dočkal najprije izvodi red takve kongruencije, koji je za vitoperu pravčastu plohu n -tog stupnja jednak $(2n - 1)(n - 1)$. Budući da se pod redom razumijeva broj njenih zraka koje prolaze jednom točkom prostora, postavlja Ljerka Dočkal jednom točkom prostora dirni stožac na takvu plohu, te određuje nožišnu krivulju te pravčaste plohe za ovu točku kao pol. Zajedničke izvodnice unisekanata te nožišne krivulje koje prolaze tim polom daju zrake istraživane kongruencije, a njihov je broj $(2n - 1)(n - 1)$ njen red. Pri određivanju razreda te kongruencije, dakle broja njenih zraka u svakoj ravnini prostora, služi se Ljerka Dočkal konoidalnom pravčastom plohom onih zraka takve kongruencije, koje su usporedne s jednom ravninom prostora (direkciona ravnina tog konoida), jer stupanj tog konoida daje onda broj zraka ovakve kongruencije u po volji odabranoj ravnini prostora, a prema tome i njen razred. Posluživši se duhovito teorijom pravčastih ploha, prenesenom na takve plohe konoidalnog sustava, dobiva ona najprije stupanj $g = (2n - 1)(n - 1)$ takvog konoida, a pomoću njega i razred m njene kongruencije, koji je jednak $\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$.

Odredivši ovako red i razred opisane kongruencije kod racionalne vitopere pravčaste plohe bilo kojeg n -tog stupnja, prelazi Ljerka Dočkal na takvu kongruenciju pravčastih ploha 2. stupnja, tj. jednoplošnog hiperboloida i hiperboličkog paraboloida.

Među jednoplošnim hiperboloidima promatra Ljerka Dočkal napose jednoplošni rotacioni hiperboloid, jer opisana kongruencija baš toj plohi, koja je potpuno istražena i poznata, daje nekoliko zanimljivih novih osobina.

U ovim razmatranjima služi se Ljerka Dočkal i konstruktivnim postupcima za lakše ilustrativne svrhe u ortogonalnoj i centralnoj projekciji, pomoću koje neizmjereno daleke elemente razmatra u konačnosti. Kao markantan rezultat tih razmatranja pojavljuje se ovdje činjenica, da najkraće transverzale jedne izvodnice sa svim ostalim izvodnicama istog sistema takvog hiperboloida čine poznati Plückerov konoid, koji je u matematičkoj literaturi poznat kao jedina pravčasta ploha uopće, kojoj su nožišne krivulje za bilo koji pol u prostoru krivulje 2. stupnja (elipse). Ciljela istraživanja kongruencija sastoji se prema tome ovdje iz sistema takvih Plückerovih konoida, koji nastaju rotacijom jednog od njih oko osi tog rotacionog hiperboloida. O kutu što ga čine izvodnice tog hiperboloida s njegovom osi ovisе položaji kuspidalnih točaka i torzalnih pravaca tih konoida, koji svi zajedno čine geometrijska mjesta, koja Ljerka Dočkal u svojoj radnji istražuje. Kako Plückerov konoid osim realnih izvodnica ima i konjugirano imaginarnе izvodnice, koje su od realnih odijeljene torzalnim pravcem te plohe, Ljerka Dočkal u svojoj radnji potanko istražuje i geometrijsko mjesto takvih konjugirano imaginarnih zraka njene kongruencije u okviru jednog takvog hiperboloida.

Na eliptičkom i parabolikom hiperboloidu sva se ovakva razmatranja prilično kompliciraju, tako da će nastavak takvih razmatranja u okviru tih dviju ploha biti sadržaj kojeg daljnijeg naučnog rada. Prof. dr. Walter Wunderlich u Beču, danas jedan od prvih geometričara sintetičkog smjera u svijetu, u svom referatu o ovom radu Ljerke Dočkal u poznatom svjetskom matematičkom referatnom časopisu ”Zentralblatt für mathematische Wissenschaften”, dao je o njemu vrlo povoljno mišljenje, osvrnuvši se naročito na već opisane Plückerove konoide, smatrajući ih markantnim novim naučnim rezultatom na području matematičkih nauka...

...U svojim radovima ulazi Ljerka Dočkal u dosad neobrađeno geometrijsko područje, u kojemu pronalazi zanimljive probleme koje rješava na način i sredstvima koja su na punoj visini suvremenog matematičkog naučnog rada. Iz referata i diskusija Ljerke Dočkal u okviru naučnog seminara Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu vidi se, kako se u području njenog naučnog rada pojavljuju sve noviji i noviji problemi koje treba riješiti, a koje Ljerka Dočkal ima i namjeru rješavati i riješiti. Odavle se može očekivati da će se njen naučni rad nastaviti i donositi i dalje nove i lijepe rezultate...

..Na temelju svega izloženog čast nam je predložiti, da se naučni rad [1] primi kao habilitaciona radnja...” (Iz izvješća Vijeću Geodetskog fakulteta, svibanj 1967. godine)

Godine 1971., obranivši disertaciju [3] na PMF-u, promovirana je u doktora matematičkih znanosti. O toj radnji i znanstvenim radovima koji su ju slijedili Niče piše:

“... U disertaciji se ona posvetila istraživanjima dosad neriješenih problema u području linearnih sistema ploha 2. stupnja i njihovih polarnih prostora. Problemi glavnih krivulja, simetralnih ravnina, strikcionih linija, asimptotskih stožaca itd., koji neprekinuto povezani sa svih ploha takvog sistema čine nove geometrijske tvorevine, plohe i torze, koje Lj. Dočkal u svojoj disertaciji razmatra povezano u jednoj cjelini, ne ulazeći u specijalne detalje. Podrobnijim pojedinačnim razmatranjima tih tvorevina bavi se ona kasnije u specijalnim radovima, koje ćemo ovdje spomenuti. U tim svojim radovima posvetila je Lj. Dočkal naročitu pažnju onim sistemima ploha 2. stupnja, koji u dosadašnjoj matematičkoj literaturi nisu obrađivani. Sva svoja istraživanja izvodi Lj. Dočkal sintetičkom metodom projektivne geometrije, koja je u matematici najbliža Nacrtnoj geometriji.

Osim ovih problema razmatrala je i riješila Lj. Dočkal i vrlo zanimljive probleme u vezi s dva i tri kolinearno pridružena svežnja. Za ove je probleme u najmanju ruku čudno, da u dosadašnjoj matematičkoj literaturi nisu niti zapaženi, a još manje riješeni.

Prva radnja Lj. Dočkal koja je objavljena nakon njenog izbora u zvanje docenta je [4]. U ovoj se radnji Lj. Dočkal poslužila poznatom činjenicom, da svaka ravnina prostora dira tri plohe pramena ploha 2. stupnja, te da svakom točkom prostora prolazi samo jedna ploha takvog pramena. Dubljim istraživanjem ovakvih trojki točkaka u prostoru, otkriva Lj. Dočkal zanimljivo prostorno preslikavanje 6. reda. Na temelju i u okviru tog preslikavanja izvodi ona u ovoj radnji prostorne krivulje 6. reda pridružene točkama jednog pravca, te opće plohe 6. reda pridružene točkama jedne ravnine.

U radnji [5] razmatrane su najkraće transversale parova pridruženih zraka dvaju kolinearnih svežnjeva. Sve te transversale čine kongruenciju 6. reda i 5. razreda. Nožišta tih transversala na zrakama svakog snopa čine opću plohu 4. reda, a otkrivene su i neke druge osobine ove dosad nepoznate kongruencije.

U Glasnik matematički predana je u štampu radnja [6]. Kako svaka pravčasta ploha 2. stupnja ima svoju strikcionu liniju, istraživala je Lj. Dočkal u ovoj radnji geometrijsko mjesto strikcionih linija svih pravčastih ploha 2. stupnja jednog sistema takvih ploha. Ovo je geometrijsko mjesto opća ploha 16. reda, koja je otkrivena i istraživana u ovoj radnji. Istraženi su i specijalni slučajevi takvih ploha, naročito degeneriranih, kao i njihove važnije osobine, jer do sada takve plohe nigdje nisu razmatrane.

Daljnja radnja dr. Lj. Dočkal [7] predana je u štampu za Rad JAZU. Svaka ploha 2. stupnja ima tri simetralne ravnine, koje tu plohu sijeku u glavnim krivuljama. Sve takve glavne krivulje ploha jednog sistema ploha 2. stupnja čine opću plohu 16. reda. Istraženi su i ovdje specijalni slučajevi kao i neke osobine.

Kao posljednja, nedavno završena i za štampu u Radu

JAZU predana radnja Lj. Dočkal je [8]. Postavljamo li nekom točkom prostora ravnine okomite na izvodnice neke pravčaste plohe, čine nožišta tih izvodnica na tim ravninama nožišnu prostornu krivulju tog, obzirom na tu pravčastu plohu odabranog, pola. Lj. Dočkal uzima takve polove u središtima pravčastih ploha nekog pramena ploha 2. stupnja, te istražuje sistem tako nastalih nožišnih krivulja, koje tvore jednu opću plohu 15. reda. Istraživani su i ovdje specijalni slučajevi kao i važnije osobine...”

(Iz izvješća Znanstveno-nastavnom Vijeću Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, svibanj 1973. godine)

U svom posljednjem izvješću o radu Ljerke Dočkal-Krsnik, nakon kojeg je izabrana u zvanje redovitog profesora, akademik Niče daje sljedeći prikaz dvaju posljednjih Ljerkinih radova:

”... Kompleks normala ploha 2. stupnja u jednom pramenu takvih ploha poznat je i do sada temeljito istražen. Međutim, takav kompleks u nizu ploha 2. stupnja, dakle na dualnoj tvorevini pramena ploha 2. stupnja, kompleks normala je do danas nepoznat i neistražen. U radu [9] zabavila se je dr. Lj. Dočkal tim kompleksom u takovom nizu. Njen referat o tom radu na Austrijskom matematičkom kongresu u Salzburgu izazvao je veliki interes i živu diskusiju najistaknutijih matematičara.

U radu [10] otkrila je i istražila dr. Lj. Dočkal jedan do sada nezapažen problem, odnosno, geometrijsku tvorevinu, koja se, kao i kod pramena i niza, sastoji iz ∞^1 neprekinuto povezanih pravčastih ploha 2. stupnja, ali te plohe ne čine niti poznati pramen niti poznati niz. Ovaj kontinuirani linearni niz ili sistem ploha 2. stupnja tek je otkriven i obrađen u tom radu. Odaberemo li u prostoru po volji tri međusobno projektivna pramena pravaca, tada je svakoj zraci jednog pramena jedno-jednoznačno pridružena po jedna zraka drugog. Transverzale svake ovakove trojke pridruženih pravaca čine jedan sistem izvodnica neke pravčaste plohe 2. stupnja. Sama trojka tako pridruženih pravaca spada u drugi sistem takve plohe. Sa svih ∞^1 ovakvih pridruženih neprekinuto povezanih trojki zraka tih triju pramenova određeno je ∞^1 neprekinuto povezanih pravčastih ploha 2. stupnja, koji čine nov do sada nepoznat neprekinut sistem, kojim se je zabavila dr. Lj. Dočkal u toj radnji.

U ovom je radu dokazano da jedna ravnina dira tri plohe, a svakom točkom prolaze tri plohe takvog sistema. Pomoću ovog je izvedeno da i svaki pravac dira tri plohe takvog sistema. Konjugirane polare nekom pravcu obzirom na sve plohe ovakovog sistema čine pravčastu plohu 3. stupnja. Uz taj sistem ploha povezan je i kompleks njihovih normala, koji je 12. stupnja. I u ovom sistemu istražene su ploha glavnih krivulja, ploha strikcionih linija i ploha centralnih nožišnih krivulja, tako da je time zaokružen potpun prikaz ovog novootkrivenog sistema ploha 2. stupnja...” (Iz izvješća Znanstveno-nastavnom Vijeću Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, listopad 1978. godine)

Tijekom niza godina Ljerka Dočkal-Krsnik bila je voditeljica nekoliko znanstvenih projekata. O svojim je znanstvenim radovima redovito izvještavala na kongresima, savjetovanjima i drugim skupovima. Navodim ovdje neke od njih: *Austrijski kongres matematike* (Linz 1968., Beč 1973., Salzburg 1977., Innsbruck 1982.), *Balkanski kongres matematičara* (Ohrid 1970., Beograd 1974.), *Jugoslavensko savjetovanje za nacrtanu geometriju nastavnika tehničkih fakulteta* (Beograd 1961., Split 1963, Sarajevo 1965., Skopje-Ohrid 1967., Ljubljana 1969., Zagreb 1971., Novi Sad 1973., Niš 1975., Herceg Novi 1977, Arandjelovac 1979., Osijek 1981., Zagreb 1990.).

Bila je članica Društva matematičara i fizičara Jugoslavije, Austrijskog matematičkog društva, Jugoslavenskog udruženja za nacrtanu geometriju i inženjersku grafiku te počasna članica Hrvatskog društva za geometriju i grafiku.

Cijeli je radni vijek Ljerke Dočkal-Krsnik bio posvećen Nacrtnoj geometriji čiji je program prilagodila potrebama Geodetskog fakulteta. Kao mlada asistentica aktivno se uključila u sastavljanje zadataka za poznati Ničeov udžbenik *Deskriptivna geometrija*, te na njihovo nado-

punjavanje u svakom daljnjem izdanju. Ljerka Dočkal-Krsnik bila je vrlo cijenjena nastavnica i uzorna kolegica. U razdoblju 1968–73. obnašala je dužnost voditeljice Katedre za opće teoretske predmete, 1975–79. prodekanice za nastavu Geodetskog fakulteta, a od 1981. do 1983. bila je predstojnica Zavoda za višu geodeziju.

Bila je pravi profesor, smireno je predavala znanja na najbolji mogući način i brinula da se to znanje učvrsti. Studenti su na konstrukcijskim vježbama trebali pokazati da u potpunosti razumiju materiju, da ju mogu objasniti, nacrtati i vidjeti. Da bi to postigla bila je zajedno sa suradnikom (asistentom) na svim konstrukcijskim vježbama. Ljerka kao redoviti profesor i ja, također već kao profesor, provodile smo mnoge sate u individualnom radu sa studentima. Tako smo postizavale svoj glavni cilj – znanje studenta. Zato mi je danas, kad se susretnem s nekadašnjim studentima, drago čuti kako se vidjelo koliko nam je bilo važno da studenti shvate i nauče.

S Ljerkom raditi bilo je prelijepo, jer je ona bila čovjek u najplemenitijem smislu te riječi.

Popis radova

- [1] LJ. DOČKAL, Kongruenz der Gemeinlote von Erzeugenden einer rationalen windschiefen Regelfläche n -ten Grades, *Glasnik Mat. fiz. i astr.* **17** (1962), No.3–4, 205–222.
- [2] LJ. DOČKAL, Transversalenkomplex der zugeordneten Strahlentriple dreier kollinearzugeordneten Strahlenbündel, *Glasnik Matematički* **2** (22) (1967), No.2, 245–263.
- [3] LJ. DOČKAL, Plohe specijalnih krivulja u linearnim sistemima pravčastih ploha 2. reda, disertacija, PMF Zagreb, 1971.
- [4] LJ. DOČKAL, Über eine Abbildung sechster Ordnung, *Glasnik Matematički* **6** (26) (1971), No.1, 113–120.
- [5] LJ. DOČKAL, Kongruenz der Gemeinlote, *Glasnik Matematički* **8** (28) (1973), No. 2, 273–284.
- [6] LJ. DOČKAL, Die Striktionslinienfläche eines linearen Regelfächensystems 2. Ordnung, *Glasnik Matematički* **9** (29) (1974), No.1, 109–124.
- [7] LJ. DOČKAL, Die Hauptkurvenfläche in linearen Flächensystemen 2. Ordnung, *Rad JAZU* **370** (1975), 107–115.
- [8] LJ. DOČKAL, Die Flächen der zentrischen Fuspunktkurven in linearen Regelfächensystemen 2. Ordnung, *Rad JAZU* **370** (1975), 93–106.
- [9] LJ. DOČKAL, Normalenkomplex der Flächen einer Flächenschar 2. Grades, *Rad JAZU* **386** (1980), 35–47.
- [10] LJ. DOČKAL, Über einen Regelfächensystem 2. Grades das durch drei projective Strahlbüschel bestimmt ist, *Rad JAZU* **386** (1980), 49–65.