STUDENTSKA RUBRIKA

Uvjetovanost linearnog sustava

Jasenka Augustinović*

Sažetak. *U ovom članku analizira se uvjetovanost matrice linearnog sustava i njena povezanost sa singularnom dekompozicijom matrice. Pokazuje se da su loše uvjetovane matrice "gotovo singularne". Singularna dekompozicija također ukazuje na tu vezu, a koristi se i za određivanje ranga i numeričkog ranga matrice. Ove povezanosti ilustrirane su na primjerima s matricama dimenzije* 3×3*, za koje je korišten programski paket Mathematica.*

Ključne riječi: *uvjetovanost linearnog sustava, singularna matrica, singularna dekompozicija, rang, numerički rang*

Condition of a linear system

Abstract. *This paper provides analysis of condition of a linear system and its connection to the singular value decomposition. It can be seen that ill-conditioned matrices are "nearly singular". The singular value decomposition (SVD) also points to that relationship. In addition, SVD can be used to determine rank and numerical rank of a matrix. These relationships are demonstrated on examples with* 3×3 *matrices, for which Mathematica software package is used.*

Key words: *condition of a linear system, singular matrix, the singular value decomposition, rank, numerical rank*

1. Uvjetovanost matrice sustava

Pojam uvjetovanosti koristi se kao pokazatelj osjetljivosti rješenja nekog problema na male promjene ulaznih veličina. Ovdje promatramo osjetljivost rješenja linearnog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ na male promjene elemenata matrice $\mathbf{A}$ ili vektora $\mathbf{b}$.

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna regularna matrica, tako da inverz $\mathbf{A}^{-1}$ postoji i jedinstven je. Tada linearan sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Pretpostavimo da smo promijenili desnu stranu sustava u $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$, dok je matrica $\mathbf{A}$

*Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, Gajev trg 6, HR - 31000 Osijek, e-mail: jaugusti@mathos.hr

ostala nepromijenjena. Neka je $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x_b}$ rješenje takvog sustava:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x_b}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}.$$

Kako vrijedi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, slijedi da je $\mathbf{A}\delta\mathbf{x_b} = \delta\mathbf{b}$, odnosno $\delta\mathbf{x_b} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$. Tako dobivamo ocjenu:

$$\|\delta\mathbf{x_b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|, \tag{1}$$

gdje jednakost vrijedi za barem jedan vektor $\delta\mathbf{b}$. Također, iz relacije $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ slijedi:

$$\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|, \tag{2}$$

gdje jednakost vrijedi za neke vektore $\mathbf{x}$ i $\mathbf{b}$. Množenjem nejednakosti (1) i (2) i dijeljenjem obje strane s $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{b}\|$, dobivamo:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x_b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{3}$$

Slično, možemo promijeniti matricu $\mathbf{A}$ i vektor $\mathbf{b}$ ostaviti nepromijenjen. Neka je $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x_A}$ rješenje takvog sustava:

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x_A}) = \mathbf{b}.$$

Pri tome pretpostavimo da je $\|\delta\mathbf{A}\|$ dovoljno malen da je matrica $\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}$ regularna. Analognim izvodom kao za (3), dobivamo:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x_A}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x_A}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}. \tag{4}$$

Vrijednost $\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|$, koja se pojavljuje u (3) i (4), zovemo uvjetovanost matrice $\mathbf{A}$ (u odnosu na rješavanje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) i označavamo s $\kappa(\mathbf{A})$. Ona pokazuje koliko se povećava relativna promjena u rješenju $\mathbf{x}$ u odnosu na relativnu promjenu vektora $\mathbf{b}$ u (3), odnosno matrice $\mathbf{A}$ u (4). Vrijednost $\kappa(\mathbf{A})$ ovisi o normi koja se primjenjuje, ali za bilo koju normu vrijedi $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$. Naime, jedinična matrica je norme 1 za bilo koju normu, te vrijedi:

$$\|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je dobro uvjetovana ako male promjene u vektoru $\mathbf{b}$ ili matrici $\mathbf{A}$ rezultiraju malim promjenama u rješenju $\mathbf{x}$. Iz (3) i (4) vidimo da će to vrijediti kada je $\kappa(\mathbf{A})$ blizu 1. Suprotno tome, matrica $\mathbf{A}$ je loše uvjetovana ako male promjene u vektoru $\mathbf{b}$ ili matrici $\mathbf{A}$ vode do velikih promjena u rješenju $\mathbf{x}$, što će biti ispunjeno ako je $\kappa(\mathbf{A})$ mnogo veći od 1. Po konvenciji je $\kappa(\mathbf{A}) = \infty$ kada je matrica $\mathbf{A}$ singularna.

Naravno, možemo istovremeno promijeniti i matricu $\mathbf{A}$ i vektor $\mathbf{b}$. Dobivamo sustav:

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}.$$

Uz pretpostavku da je $\delta\mathbf{A}$ dovoljno malen da vrijedi $\|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1$, može se pokazati sljedeća nejednakost (vidi [1]):

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1-\kappa(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}+\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right).$$

Vrijednost

$$\frac{\kappa(\mathbf{A})}{1-\kappa(\mathbf{A})\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}$$

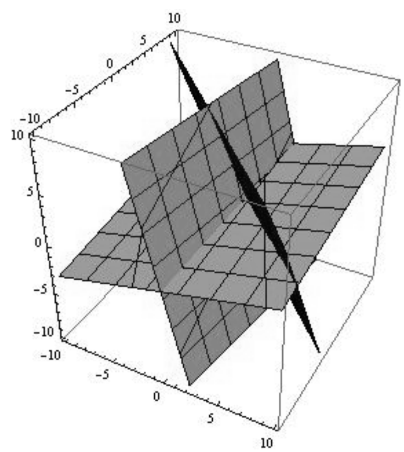
je blizu uvjetovanosti $\kappa(\mathbf{A})$ kada je $\|\delta\mathbf{A}\|$ dovoljno malen.

U sljedećim primjerima promatramo kako se ponaša rješenje $\mathbf{x}$ pri malim promjenama vektora $\mathbf{b}$ kada je matrica $\mathbf{A}$ dobro, odnosno loše uvjetovana.

Primjer 1. *Promotrimo linearni sustav:*

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 7 \\ 4x - 0.5y + z &= 4 \\ -x - 0.5y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je točka $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$. *Na slici 1 prikazane su tri ravnine određene ovim jednadžbama.*



Slika 1. Grafički prikaz sustava

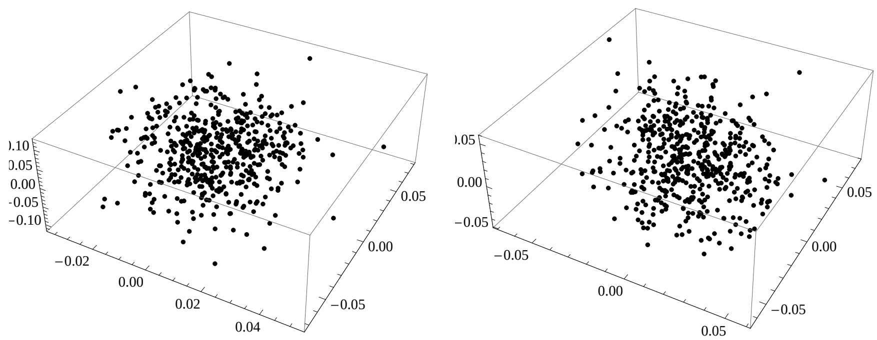
Matrica sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo li uvjetovanost matrice $\mathbf{A}$ *za normu* ∞*:*

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 1.90295,$$

vidimo da je matrica $\mathbf{A}$ *dobro uvjetovana. Zbog relacije (3) očekujemo da će male relativne promjene vektora* $\mathbf{b}$ *uzrokovati male relativne promjene vektora* $\mathbf{x}$. *To potvrđuje grafički prikaz na slici 2. Vektor* $\mathbf{b} = [7, 4, 2]^T$ *mijenjan je tako da je svakoj njegovoj komponenti dodana normalna slučajna varijabla* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *Zatim je za svaki tako dobiven vektor* $\mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$ *rješavan sustav* $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}_b) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$. *Na slici 2 su s lijeve strane prikazane točke koje predstavljaju relativnu promjenu vektora* $\mathbf{b}$, *a s desne strane točke koje predstavljaju odgovarajuću relativnu promjenu vektora* $\mathbf{x}$. *Primjećujemo da su "oblaci" koji predstavljaju te relativne promjene slične veličine. To znači da su male relativne promjene vektora* $\mathbf{b}$ *zaista rezultirale malim relativnim promjenama vektora* $\mathbf{x}$.



Slika 2. Utjecaj relativne promjene vektora $\mathbf{b}$ na relativnu promjenu rješenja $\mathbf{x}$

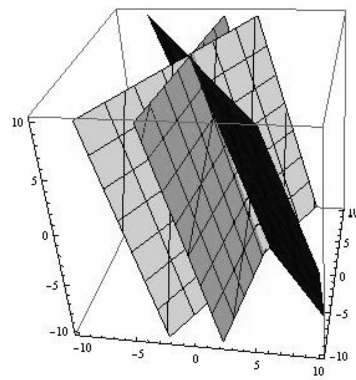
Primjer 2. *Promotrimo sljedeći linearni sustav:*

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 8 \\ 4x - 0.5y + z &= 4 \\ x - 0.5y + 0.25z &= 0.25 \end{aligned}$$

Matrica sustava je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix},$$

a rješenje ponovno $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$. *Na slici 3 primjećujemo mali kut između jedne ravnine i pravca u kojem se sjeku druge dvije ravnine.*

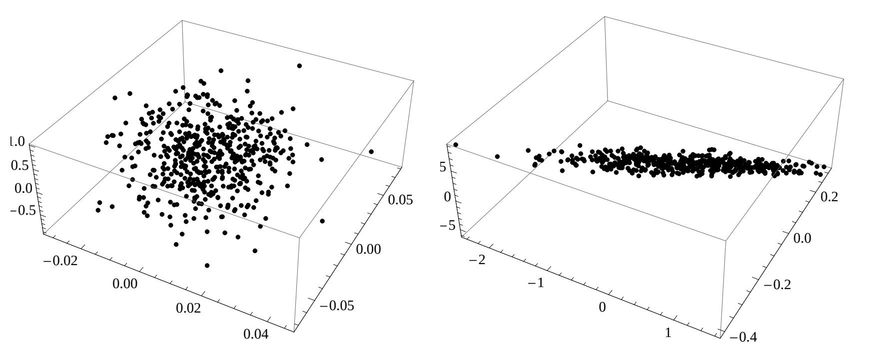


Slika 3. Grafički prikaz sustava

To znači da su retci ove matrice gotovo linearno zavisni. Zaista, ako napravimo sljedeću kombinaciju prva dva retka:

$$-\frac{3}{19}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{7}{19}\begin{bmatrix} 4 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ \frac{4}{19} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

vidimo da se rezultat malo razlikuje od zadnjeg retka matrice $\mathbf{A}$*:* $[1, -0.5, 0.25]$. *Naslućujemo da je matrica sustava loše uvjetovana, što potvrđuje izračun:* $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 232$. *Također, na slici 4 primjećujemo da male relativne promjene vektora* $\mathbf{b}$ *rezultiraju velikim relativnim promjenama rješenja* $\mathbf{x}$.



Slika 4. Utjecaj relativne promjene vektora $\mathbf{b}$ na relativnu promjenu rješenja $\mathbf{x}$

Vidjeli smo da će matrica biti loše uvjetovana ako su neki od njenih redaka gotovo linearno zavisni. Može se reći da je loše uvjetovana matrica "gotovo singularna". Zaista, vrijedi (vidi [4]):

$$\min\left\{\frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|} : \quad \mathbf{A} + \mathbf{\Delta A} \quad \textit{singularna}\right\} = \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}$$

Dakle, relativna udaljenost matrice $\mathbf{A}$ do najbliže singularne matrice je upravo $\frac{1}{\kappa(\mathbf{A})}$. Što je matrica lošije uvjetovana, to je bliža singularnosti.

Još neke razloge loše uvjetovanosti otkriva singularna dekompozicija matrice $\mathbf{A}$. O tome više u sljedećem poglavlju.

2. Singularna dekompozicija matrice

Prvi teorem govori da je za svaku matricu moguće naći singularnu dekompoziciju.

Teorem 1. *([1])*
Ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tada postoje unitarne matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, takve da vrijedi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^* \tag{5}$$

gdje je $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dijagonalna matrica oblika $\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{min(m,n)})$ i vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_{min(m,n)} \geq 0$.

Rastav (5) zovemo singularna dekompozicija matrice $\mathbf{A}$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{min(m,n)}$ singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. Stupce matrice $\mathbf{U}$ zovemo lijevim, a stupce matrice $\mathbf{V}$ desnim singularnim vektorima matrice $\mathbf{A}$.

Singularna dekompozicija daje mnogo informacija o strukturi matrice, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2. *([7])*
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrica sa singularnom dekompozicijom $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^*$ i singularnim vrijednostima $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = ... = \sigma_n = 0$. Tada vrijedi:

i) $rang(\mathbf{A}) = r$,

ii) $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = Im(\mathbf{A}) = span\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r\}$,

iii) $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = Ker(\mathbf{A}) = span(\mathbf{v}_{r+1}, ..., \mathbf{v}_n)$,

iv) $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$.

Dakle, broj singularnih vrijednosti različitih od nule daje rang r matrice $\mathbf{A}$. Prvih r stupaca matrice $\mathbf{U}$ čini ortonormalnu bazu za $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, dok zadnjih $n-r$ stupaca matrice $\mathbf{V}$ čini ortonormalnu bazu za $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. I konačno, 2-norma matrice $\mathbf{A}$ jednaka je najvećoj singularnoj vrijednosti.
Primjetite da ako je matrica $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^*$ ranga r i označimo:

$$\mathbf{\Sigma}_r = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r), \quad \mathbf{U}_r = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_r], \quad \mathbf{V}_r = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r]$$

tada vrijedi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^* = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Još jedno zanimljivo svojstvo singularne dekompozocije daje sljedeći teorem.

Teorem 3. *([1])*
Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ *singularna dekompozicija matrice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *gdje je* $m \geq n$. *Neka je* $\mathcal{S}$ *jedinična sfera u* $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}.$$

Tada je:

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{S} = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \ i \ \ \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$

elipsoid sa središtem u ishodištu $\mathbb{R}^m$ *i glavnim poluosima* $\sigma_i \mathbf{u}_i$.

Dakle, singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ jednake su duljinama poluosi elipsoida $\mathbf{A}\mathcal{S}$. Ispostavlja se da se djelovanje matrice $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T$ na jediničnu sferu može opisati kao niz od tri jednostavnije transformacije: $\mathbf{V}^T$ rotira sferu, $\mathbf{\Sigma}$ ju zatim rasteže u elipsoid s poluosima duljine σ_i, a zatim ga matrica $\mathbf{U}$ rotira. Naime, $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ su ortogonalne matrice i ne mijenjaju normu vektora na kojeg djeluju. Njihov je geometrijski smisao rotacija.

Primjer 3. *Promotrimo još jednom matrice iz prva dva primjera:*

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -0.5 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

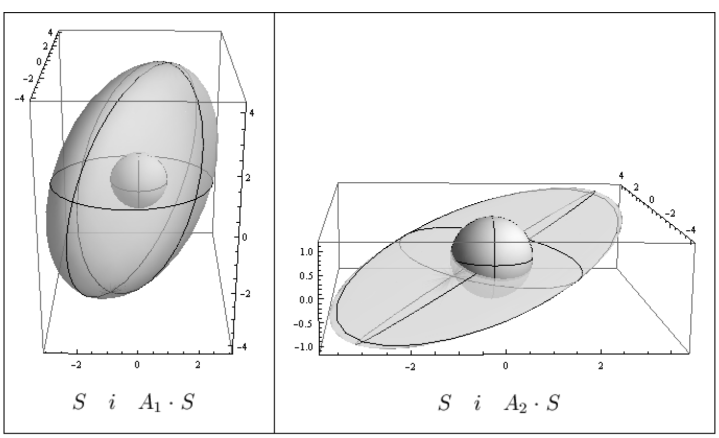
Načinimo li singularnu dekompoziciju tih matrica, dobivamo da su singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}_1$ *jednake:*

$$\sigma_1 = 4.71535, \quad \sigma_2 = 4.14502, \quad \sigma_3 = 2.02095$$

dok za matricu $\mathbf{A}_2$ *iznose:*

$$\sigma_1 = 5.34839, \quad \sigma_2 = 1.98897, \quad \sigma_3 = 0.0352517.$$

Elipsoidi nastali djelovanjem matrice $\mathbf{A}_1$ *i* $\mathbf{A}_2$ *na jediničnu sferu* $\mathcal{S}$ *prikazani su na slici 5. Primjetite da je* σ_3 *kod matrice* $\mathbf{A}_2$ *mnogo manja u odnosu na prve dvije singularne vrijednosti. Kako su singularne vrijednosti jednake duljinama poluosi elipsoida, elipsoid* $\mathbf{A}_2\mathcal{S}$ *je prilično plosnat.*



Slika 5. Jedinična sfera $\mathcal{S}$ i elipsoidi $\mathbf{A}_1\mathcal{S}$, $\mathbf{A}_2\mathcal{S}$.

U sljedeća dva odjeljka dana je veza između singularne dekompozicije i uvjetovanosti matrice, te važna povezanost s rangom i numeričkim rangom matrice.

2.1. SVD i uvjetovanost matrice

Prisjetimo se definicije uvjetovanosti matrice:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|.$$

Iskoristimo li svojstvo *iv)* iz teorema 2, možemo dobiti izraz za uvjetovanost u 2-normi. No, najprije je potrebno odrediti najveću singularnu vrijednost matrice $\mathbf{A}^{-1}$. Iz $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^*$ slijedi:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*.$$

Kako su $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ unitarne matrice i $\mathbf{\Sigma}$ dijagonalna matrica, ta relacija pokazuje da su singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}^{-1}$ jednake recipročnim singularnim vrijednostima matrice $\mathbf{A}$. Stoga je najveća singularna vrijednost matrice $\mathbf{A}^{-1}$ jednaka $1/\sigma_n$. Sada imamo:

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_2\|\mathbf{A}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Slijedi da je matrica $\mathbf{A}$ sve lošije uvjetovana što je σ_n manji.

Primjer 4. *Promotrimo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Tim jednadžbama određena su dva pravca u ravnini. Pretpostavimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Tada je kut između tih pravaca jednak:

$$\cos\varphi = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}$$

Može se pokazati (vidi [8]) da je uvjetovanost matrice $\mathbf{A}$ *sustava (6) uz uvjete (7) jednaka:*

$$\kappa_2(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

pri čemu su σ_1 *i* σ_2 *singularne vrijednosti matrice* $\mathbf{A}$. *To znači da uvjetovanost matrice ovisi o kutu između pravaca koje određuju njeni retci. Što je kut* φ *manji, manja je* σ_2 *i time uvjetovanost* $\kappa_2(\mathbf{A})$ *veća.*

2.2. SVD i numerički rang

Rang matrice $\mathbf{A}$ definira se kao broj linearno nezavisnih redaka (stupaca) te matrice. Međutim, zbog prisutnosti grešaka pri mjerenju, aproksimaciji i zaokruživanju, retci matrice koji su matematički gledano linearno nezavisni mogu biti gotovo linearno zavisni u praktičnom smislu. Stoga se definira numerički rang r_ε, kao broj redaka matrice $\mathbf{A}$ koji su linearno nezavisni s obzirom na neki prag ε :

$$r_\varepsilon = r_\varepsilon(\mathbf{A}, \varepsilon) = \min_{\|\mathbf{E}\|_2 \leq \varepsilon} rang(\mathbf{A} + \mathbf{E})$$

Dakle, to je broj redaka matrice $\mathbf{A}$ koji će biti linearno nezavisni za bilo koju promjenu $\mathbf{E}$ koja je po normi manja ili jednaka od ε.

Jedna od važnih upotreba singularne dekompozicije je upravo određivanje ranga i numeričkog ranga matrice. Naime, po teoremu 2 rang matrice je jednak broju singularnih vrijednosti različitih od nule. Slična veza, kao što ćemo vidjeti, postoji između sigularnih vrijednosti i numeričkog ranga.

Teorem 4. *([9])*
Neka su $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ i $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A} + \mathbf{E}$. Tada vrijedi:

$$|\sigma_i - \tau_i| \leq \|\mathbf{E}\|_2, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Dvije su zanimljive činjenice u ovom teoremu. Prvo, ne postoji ograničenje za matricu $\mathbf{E}$, tj. tvrdnja će biti istinita za bilo koju promjenu matrice $\mathbf{A}$. Drugo, ako su singularne vrijednosti poredane po veličini, tada će za po normi malen $\mathbf{E}$ singularna vrijednost σ_i biti blizu τ_i. Kako je matrica $\mathbf{A}$ ranga r ako je $\sigma_r > \sigma_{r+1} = 0$, teorem 4 povlači sljedeći teorem:

Teorem 5. *([2])*
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrica ranga r sa singularnom dekompozicijom $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^*$. Neka je $k < r$ i:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*.$$

Tada je:

$$\min_{rang(\mathbf{B})=k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Teorem kaže da je udaljenost matrice $\mathbf{A}$ ranga r do najbliže matrice ranga k jednaka σ_{k+1} i da se taj minimum postiže u matrici $\mathbf{A}_k$. Primjetite da je:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U\Sigma}_k \mathbf{V}^*,$$

gdje je $\mathbf{\Sigma}_k = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k, 0, ..., 0)$. Dakle, matrica $\mathbf{A}_k$ se od matrice $\mathbf{A}$ razlikuje samo po matrici $\mathbf{\Sigma}$.

Uzimajući u obzir ove činjenice, numerički rang r_ε može se definirati kao broj singularnih vrijednosti koje su veće od nekog praga ε :

$$\sigma_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon + 1}$$

Određivanje numeričkog ranga je relativno lako kada postoji razmak između velikih i malih singularnih vrijednosti. Na primjer, neka su singularne vrijednosti matrice **A** sljedeće:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.5 \quad \sigma_3 = 0.1 \quad \sigma_4 = 10^{-4} \quad \sigma_5 = 10^{-8}$$

Uzmemo li prag $\varepsilon = 10^{-3}$, numerički rang matrice **A** bit će 3, dok će za npr. $\varepsilon = 10^{-5}$ numerički rang biti 4. Međutim, ako su singularne vrijednosti:

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 10^{-1} \quad \sigma_3 = 10^{-2} \quad \sigma_4 = 10^{-3} \quad \sigma_5 = 10^{-4}$$

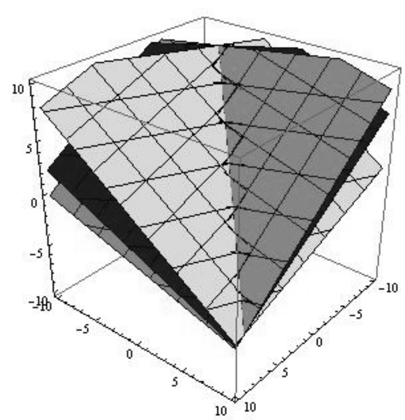
vrlo je teško odrediti prag, pa tako i numerički rang. Općenito, numerički rang matrice ima smisla određivati samo kada postoji jasan razmak između singularnih vrijednosti.

Sada možemo povezati uvjetovanosti matrice i njen numerički rang. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $n \leq m$. Ako je matrica **A** punog ranga, tj. $rang(\mathbf{A}) = n$, tada je udaljenost između matrice **A** i najbliže matrice ranga $n-1$ jednaka σ_n. S druge strane, $\kappa_2(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$. Proizlazi da što je σ_n manji, matrica je sve lošije uvjetovana i sve bliže matrici nižeg ranga. Također, ako je σ_n dovoljno malen, može se zanemariti uz neki prag ε. Tako bi numerički rang mogao biti $n-1$. Dakle, loše uvjetovane matrice mogu imati numerički rang niži od stvarnog ranga.

Primjer 5. *Promotrimo jedan loše uvjetovan sustav:*

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z &= 14 \\ 5x + 2y + 7z &= 30 \\ 6x + 4y + 9.999z &= 43.997 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je točka $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, *iako se na prvi pogled čini da je rješenje pravac (vidi sliku 6).*



Slika 6. Grafički prikaz sustava

Očito je da su retci ove matrice gotovo linearno zavisni:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 9.999 \end{bmatrix}$$

Zbroj prva dva retka daje vektor $[6, 4, 10]$, *dok je treći redak matrice* $[6, 4, 9.999]$. *Ova matrica ima uvjetovanost čak* $\kappa_\infty(\mathbf{A}) = 59997$. *Promotrimo njene singularne vrijednosti:*

$$\sigma_1 = 15.5434 \quad \sigma_2 = 1.54398 \quad \sigma_3 = 0.000333352$$

Vidimo da je σ_3 *reda veličine* 10^{-4} *i mogla bi se zanemariti uz prag npr.* $\varepsilon = 10^{-3}$. *Tada bi numerički rang matrice* $\mathbf{A}$ *bio* 2. *Također,* σ_3 *nam pokazuje da je matrica* $\mathbf{A}$ *vrlo blizu matrice ranga* 2. *Iako se na prvi pogled čini da je najbliža matrica ranga 2 upravo:*

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

ipak je $\|\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\|_2 = 0.001 > \sigma_3$.
Prema teoremu 5, najbliža matrica ranga 2 je:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1.00011 & 2.00011 & 2.99989 \\ 5.00011 & 2.00011 & 6.99989 \\ 5.99989 & 3.99989 & 9.99911 \end{bmatrix}$$

gdje je $\mathbf{\Sigma}_2 = diag(\sigma_1, \sigma_2, 0)$, *jer vrijedi* $\|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}\|_2 = 0.000333352 = \sigma_3$.

Literatura

[1] J. W. DEMMEL, *Applied numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] Z. DRMAČ, V. HARI, M. MARUŠIĆ, M. ROGINA, S. SINGER, *Numerička analiza, predavanja i vježbe*, Zagreb, 2003.
`http://web.math.hr/~ rogina/2001096/num_anal.pdf`

[3] P. E. GILL, W. MURRAY, M. H. WRIGHT, *Numerical Linear Algebra and Optimization, Volume 1*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1991.

[4] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations, Third Edition*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

[5] G. GOLUB, V. KLEMA, G. W. STEWART, *Rank Degeneracy and Least Sqares Problems*, Computer Science Department, Stanford University, 1976.
`http://eprints.kfupm.edu.sa/60731/1/60731.pdf`

[6] P. C. HANSEN, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM, 1998.

[7] D. KINCAID, W. CHENEY, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1991.

[8] M. MEŠTROVIĆ, K. SABO, *Grafička ilustracija pogreške u rješenju sustava linearnih jednadžbi*, Osječka matematička škola, Vol. 4 (2004) br. 2, Osijek, 2004.

[9] G. W. STEWART, *Perturbation Theory for the Singular Value Decomposition*, Institute for Advanced Computer Studies, University of Maryland, 1990. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.44.9904