POVIJESNA RUBRIKA

Augustin Louis Cauchy

Franka Miriam Brückler*

Jedan od kontroverznijih matematičara u povijesti bio je znameniti francuski matematičar Augustin Louis Cauchy. Kako je jedan moj znanac rekao: *Cauchy, on je bio jedan obični prasac!*. Možda nije slučajno da francuska riječ za prasca, *cochon* (čitaj: košon), pomalo podsjeća na ime Cauchy (čitaj: koši). No, kao što znamo, prasci su vrlo korisne životinje, kod kojih se mnogo toga može iskoristiti: meso za jelo, koža za odjeću i obuću, ime za uvredu... [1] Istina o Cauchyju nije daleko od takvog opisa: iako je zbog svoje arogancije i sklonosti objavljivanja tuđih rezultata kao svojih jedan od nepopularnijih velikih matematičara u povijesti, njegovi vlastiti te obrađeni tuđi rezultati bili su od iznimne koristi za matematiku. Cauchy je objavio ogroman broj od 789 radova te ga po broju radova nadmašuju samo Euler[2] i Cayley[3].

Slika 1. Augustin Louis Cauchy (slika je preuzeta s web-stranice Mac Tutor History of Mathematics Archives).

Cauchy je rođen u Parizu na samom početku francuske revolucije, 21. kolovoza 1789. U njegovom domu česti gosti bili su veliki matematičari Lagrange[4] i Laplace[5]. Po preporuci Lagrangea, otac je Cauchyja prvo 1802. poslao u školu u kojoj je temeljito naučio klasične jezike, a zatim je pohađao satove matematike te

*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

[1] Ideja preuzeta iz *Stilblüten aus deutschen Klassenzimmern*, Heyne Verlag, 1987.

[2] Leonhard Euler, 1707. - 1803., švicarski matematičar, bitno je razvio gotovo sva tada postojeća područja matematike.

[3] Arthur Cayley, 1821. - 1895., engleski matematičar, razvio je algebru matrica, bavio se neeuklidskim i višedimenzionalnim geometrijama.

[4] Joseph-Louis Lagrange, 1736. - 1813., francuski matematičar, najznačajnije rezultate ostvario je na područjima matematičke analize, teorije brojeva i matematičke fizike.

[5] Pierre-Simon Laplace, 1749. - 1827., francuski matematičar, dokazao je stabilnost Sunčeva sustava, bavio se matematičkom analizom i bitno razvio teoriju vjerojatnosti.

se 1805. uspio upisati na uglednu visoku školu *École Polytechnique*. Nju je završio 1807., a zatim je završio i inženjersku visoku školu. Prvo zaposlenje dobio je 1810. na pripremama i razvoju luke Cherbourg za Napoleonovu flotu koja se spremala u invaziju na Englesku. Usprkos napornom radu našao je vremena i za matematiku te je 1811. dokazao da su kutovi konveksnog poliedra određeni njegovim stranama. Cauchy se stvarno želio baviti matematikom i smatrao je da bi to mogao ako se vrati u Pariz. To je i učinio nakon što se razbolio 1812.; čini se da se radilo o bolesti psihološke prirode koja je za posljedicu imala ozbiljnu depresiju. U sljedećem razdoblju objavio je nekoliko znanstvenih radova i neuspješno pokušavao dobiti akademsku poziciju. Tek 1815. uspio je dobiti poziciju docenta za matematičku analizu na znamenitoj francuskoj visokoj školi *École Polytechnique*. Godinu kasnije za jedan rad o valovima dobio je Veliku nagradu Francuske akademije znanosti, no slavan je postao radom o poligonalnim brojevima[6] kojim je riješio jedan problem koji je de Fermat[7] postavio Mersenneu[8]. Kad su Carnot[9] i Monge[10] pali u političku nemilost i stoga izbačeni iz Akademije, Cauchy je imenovan na jedno od dva slobodna mjesta. Godinu kasnije postao je profesor na *College de France*, gdje je predavao o metodama integriranja koje je sam otkrio, ali nije ranije objavio. U to doba, 1818., se oženio; imao je dvije kćeri.

Time smo došli do teme zbog koje je Cauchy toliko bitan za povijest matematike. Naime, on je prvi precizno proučio pojam konvergencije odnosno limesa i tako opravdao otprije poznate i korištene koncepte derivacije, integrala, neprekidnih funkcija i redova. Godine 1821. objavio je udžbenik *Cours d'analyse* u kojem je dao osnovne teoreme infinitezimalnog računa s formalnim i preciznim dokazima. Cauchy je bitan i za daljnji razvoj analize; 1829. je prvi definirao kompleksnu funkciju kompleksne varijable tj. funkciju koja kompleksnim brojevima pridružuje kompleksne brojeve. Time i dokazima mnogih svojstava kompleksnih funkcija utemeljio je kompleksnu analizu.

Vezano za komentar u uvodu ovog članka, vrijeme je objasniti razloge neobljubljenosti ovog velikog matematičara. Cauchy nije bio u dobrim odnosima s drugim znanstvenicima, a kao glavni razlog navodi se njegovo gotovo fanatično katoličanstvo zbog kojeg se angažirao na strani isusovaca protiv Akademije znanosti. S druge strane, bio je arogantan i nije pokazivao poštovanja prema kolegama, a s treće bio je sklon prisvajanju tuđih rezultata. Najpoznatiji primjeri njegovog ponašanja prema kolegama vezani su za dva znamenita matematičara koja povezuje kratak

[6]Poligonalni brojevi su prirodni brojevi koji se mogu prikazati tako da se odgovarajući broj točkica složi u poligonalni oblik. Najpoznatiji među poligonalnim brojevima su trokutni brojevi

$$1\ \bullet,\ 3\ \begin{smallmatrix}\bullet & \\ \bullet & \bullet\end{smallmatrix},\ 6\ \begin{smallmatrix}\bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet\end{smallmatrix},\ \ldots,\ 1+2+\ldots+n,\ \ldots.$$

[7]Pierre de Fermat, 1601. - 1665., francuski pravnik i hobi-matematičar, najpoznatiji je po svojim rezultatima iz teorije brojeva, posebno po Velikom Fermatovom teoremu, no bitno je doprinio i otkriću infinitezimalnog računa, vjerojatnosti i analitičke geometrije.

[8]Marin Mersenne, 1588. - 1648., francuski redovnik značajan za povijest matematike kao posrednik u korespondenciji najznačajnijih znanstvenika svog doba te po svojim rezultatima iz teorije brojeva.

[9]Lazare Nicolas Marguérite Carnot, 1753. - 1823., francuski geometar.

[10]Gaspard Monge, 1746. - 1818., francuski matematičar, utemeljitelj diferencijalne i nacrtne geometrije.

životni vijek: Abela[11] i Galoisa[12]. Abel je, vezano za svoj posjet Parizu 1826., o Cauchyju napisao:

Cauchy je lud i tu se ništa ne može učiniti, iako je trenutno on jedini koji zna kako treba raditi matematiku.

Kad je Abel 1829. umro Cauchy još uvijek nije bio recenzirao njegov članak iz 1826.; kratko po Abelovoj smrti predao je površnu recenziju. S druge strane, Cauchy je u više navrata zagubio Galoisove radove koje je trebao recenzirati. U tim su se radovima mogli naći temelji teorije grupa, a zanimljivo je da je 13 godina nakon Galoisove smrti objavio djelo o grupama permutacija u kojem se pojavljuju mnoge Galoisove ideje.

Godine 1830. zdravlje mu se, vjerojatno od previše rada, pogoršalo te se, ujedno i zbog političke situacije u Parizu, odlučio na odmor. Otišao je u Švicarsku, a promjena političkih okolnosti u Francuskoj[13] zahtijevala je da položi zakletvu novoj vlasti kralja Louisa-Philippea. Cauchy, vjeran prethodnom bourbonskom režimu, se nije vratio Pariz i nije položio tu zakletvu te je izgubio sve svoje pozicije. Godine 1831. otišao je u Italiju, u Torino, gdje je prihvatio ponudu kralja Piedmonta i predavao teorijsku fiziku; prema zapisima jednog njegovog tamošnjeg studenta ta su predavanja bila vrlo nejasna i nesređena. Iz Torina je 1833. otputovao u Prag, gdje je tad boravio svrgnuti kralj Karlo X. Cauchy je podučavao njegova unuka matematiku, fiziku i kemiju. Prema zapisima, mladi princ nije pokazivao ni interes ni smisao za te predmete, a Cauchy je na to gubio živce i vikao na njega. U Pragu je susreo Bolzana[14] na njegov zahtjev. Bolzano je dao sličnu definiciju neprekidnosti kao Cauchy, ali je nije objavio; postoje rasprave o tome koliko je Cauchyjeva definicija originalna, a koliko preuzeta od Bolzana, no vjerojatno je Cauchyjeva definicija starija od Bolzanove.

Nakon osam godina izbivanja, 1838., Cauchy se vratio u Pariz. Tada je ponovno dobio svoje mjesto Akademiji, no kako je i dalje odbijao položiti zakletvu režimu, nije mu dozvoljeno predavati. Godinu kasnije je, nakon dosta rasprava, izabran za člana znanstvenog instituta *Bureau des Longitudes*, no opet zbog odbijanja polaganja zakletve nije bio punopravan član, nije smio prisustvovati sastancima niti je dobivao plaću. Njegova politička i vjerska dosljednost i aktivnost bili su glavni razlozi zbog kojih usprkos neosporne matematičke izvrsnosti ni kasnije nije biran na otvorene pozicije profesora na francuskim visokim školama.

U ovom razdoblju Cauchy je bio bitno matematički neproduktivniji nego prije 1830., no ipak je objavio značajne radove o diferencijalnim jednadžbama i njihovim

[11] Niels Henrik Abel, 1802. - 1829., norveški matematičar, dokazao je nerješivost opće algebarske jednadžbe petog stupnja u radikalima tj. nepostojanje formule kojom se njena rješenja mogu iz koeficijenata jednadžbe izračunati s konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije i korjenovanja.

[12] Evariste Galois, 1811. - 1832., francuski matematičar, utemeljitelj teorije grupa, dao je kriterije temeljem kojih se za danu algebarsku jednadžbu može utvrditi njena rješivost u radikalima.

[13] U srpanjskoj revoluciji 1830. svrgnut je bourbonski kralj Karlo X, a na prijestolje je sjeo njegov rođak Louis-Philippe. Time je sustav ustavne monarhije promijenjen u sustav nasljedne monarhije.

[14] Bernard Bolzano, 1781. - 1848., češki matematičar, bitno je doprinio preciziranju koncepata matematičke analize, a primjerom bijekcije između beskonačnog skupa i njegova prava podskupa postao je prethodnik otkrića teorije skupova.

primjenama na matematičku fiziku, a bavio se i matematičkom astronomijom.

Godine 1848. svrgnut je Louis-Philippe i uspostavljena je Druga francuska republika. Cauchyju su vraćene njegove sveučilišne pozicije, no i dalje zbog lošeg odnosa prema kolegama nije dobio nove. U ovom razdoblju njegovo je ponašanje izazvalo niz većih i manjih svađa s drugim znamenitim znanstvenicima, koje dominiraju zadnjim godinama njegova života. Cauchy je umro 23. svibnja 1857.

Danas mnogi matematički pojmovi, osobito u području matematičke analize, nose Cauchyjevo ime. Ovdje ćemo spomenuti samo neke, lakše opisive na (doduše višoj) srednjoškolskoj razini matematičkog znanja.

Najvažniji Cauchyjev doprinos je u postavljanju novih kriterija matematičke preciznosti u matematičkoj analizi. Dotad iskustvom prihvaćeni, ali ne i formalno opravdani, koncept konvergencije tj. limesa i na limesu temeljeni koncepti derivacije, integrala i sume reda Cauchyjevim radovima dobili su precizan, suvremeni oblik. Cauchy je pitanje **konvergencije** preveo na jezik algebre nejednadžbi. Tako je primjerice već Maclaurin[15] pisao da je suma reda[16] (tj. beskonačna suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) granica njegovih parcijalnih suma. Ta formulacija kod Cauchyja postaje precizna: za svaki $\varepsilon > 0$ može se naći n takav da je za sumu više od n početnih članova reda razlika između ukupne i te sume manja od ε. Iz takve definicije sume reda Cauchy je izveo dokaz konvergencije geometrijskog reda $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ za kvocijente q koji su po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 i zatim uspoređivanjem drugih redova s geometrijskim dokazao razne kriterije konvergencije. Pokazao je **Cauchyjev kriterij konvergencije reda** realnih ili kompleksnih brojeva, s tim da se u različitim jezicima pod time podrazumijevaju dva različita kriterija (koja oba potječu od Cauchyja). U hrvatskoj matematičkoj literaturi je to sljedeći kriterij koji je posljedica uspoređivanja s konvergentnim geometrijskim redom: ako za zadani red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitivnih realnih brojeva postoji realan broj $0 < q < 1$ i prirodan broj n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < q$, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira (a ako je $\sqrt[n]{a_n} > 1$ za beskonačno mnogo članova niza, onda red divergira). U engleskom govornom području se pak pod Cauchyjevim kriterijem konvergencije podrazumijeva kriterij da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako je pripadni niz parcijalnih suma Cauchyjev. Pritom, niz (a_n) zovemo **Cauchyjevim nizom** ako razmaci između po dva elementa niza postaju proizvoljno mali što se dalje odmičemo u nizu[17]. Svaki niz koji ima limes je Cauchyjev, a obrat vrijedi primjerice za nizove realnih i za nizove kompleksnih brojeva. U tom smislu, ako je poznata ekvivalencija konvergencije i cauchyjevosti niza u skupu R odnosno C, Cauchyjev kriterij konvergencije reda je trivijalna posljedica te ekvivalencije i definicije konvergencije reda.

Cauchy je definirao i **neprekidnost funkcije**: funkcija f je neprekidna na nekom intervalu ako za sve x iz tog intervala $f(x+\alpha)-f(x)$ neograničeno opada s α (prema nuli). Tu je malo neprecizan jer se ovako formulirana definicija može shvatiti i kao definicija obične i kao definicije uniformne neprekidnosti jer nije jednoznačno

[15] Colin Maclaurin, 1698. - 1746., škotski matematičar, objavio je prvi sustavni prikaz Newtonovih metoda diferencijalnog i integralnog računa.

[16] Formalno: red $\sum_n a_n$ je uređeni par niza brojeva (a_n) i pripadnog niza parcijalnih suma (S_n); n-ta parcijalna suma niza (a_n) je $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Red konvergira i ima sumu S ako je $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

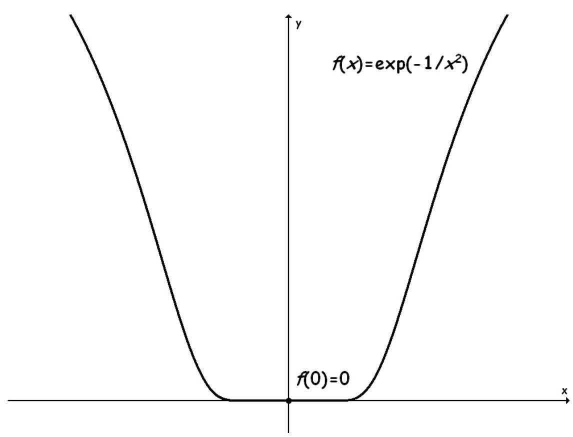
[17] Formalno: niz (a_n) je Cauchyjev ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve $m, n > n_0$ vrijedi $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

shvatljiv poredak kvantifikatora. Svoju definiciju neprekidnosti koristio je u dokazu teorema o međuvrijednosti za neprekidne funkcije (ako je funkcija neprekidna na segmentu i na krajevima segmenta poprima vrijednosti suprotnih predznaka, onda ona ima nultočku unutar tog segmenta). **Derivaciju** Cauchy definira ovako: ako su ε i δ vrlo mali i δ takav da je za sve $h < \delta$ i za svaki promatrani x

$$f'(x) + \varepsilon > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > f'(x) - \varepsilon$$

onda je broj $f'(x)$ derivacija funkcije f u x. Precizirao je i definiciju (određenog) **integrala**: za neprekidne funkcije f definirao ga je kao limes suma oblika

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$



Slika 2. Cauchyjeva funkcija: $f(x) = e^{-1/x^2}$ za $n \neq 0$, $f(0) = 0$.

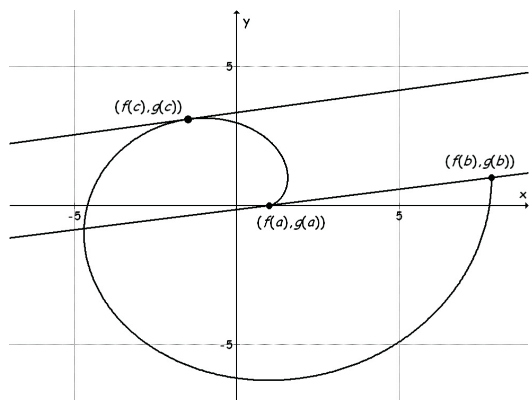
Cauchy je našao primjer neprekidne funkcije kojoj su sve derivacije u nuli jednake nula i kojoj Taylorov red[18] svuda konvergira, ali se podudara s funkcijom samo u nuli. Graf te Cauchyjeve funkcije prikazan je na slici 2. Napomenimo ovdje da Cauchy kao i njegovi prethodnici funkcije shvaća kao formule oblika $y = f(x)$ ili $f(x, y) = 0$; godine 1821. dao je sljedeću definiciju funkcije: *Ako su promjenjive veličine tako povezane da kad je zadana vrijednost jedne od njih možemo zaključiti koliko iznose sve ostale, obično se te različite veličine doživljavaju kao izražene preko one jedne od njih, koja se onda zove nezavisnom varijablom, a sve ostale koje su izražene preko nezavisne varijable se zovu funkcijama te varijable.* Nakon te definicije precizirao je razliku između eksplicitno i implicitno zadanih funkcija.

[18] Taylorov red funkcije f koja u točki c posjeduje sve derivacije je red oblika $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$.

Cauchy je dokazao i poopćenje **teorema srednje vrijednosti**: za dvije neprekidne funkcije $f, g : [a, b] \to \mathrm{R}$ koje su derivabilne na $\langle a, b\rangle$ postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

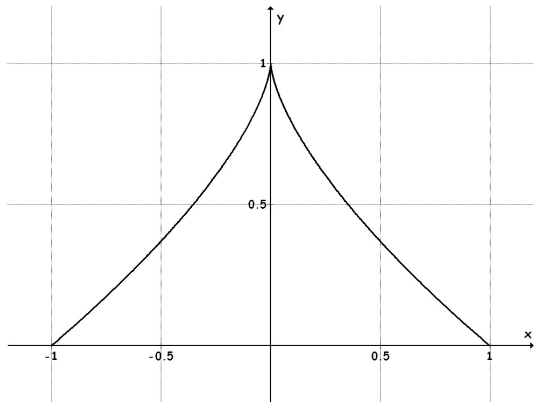
Obični teorem srednje vrijednosti dobije se ako uzmemo $g(x) = x$ za sve $x \in [a, b]$. Smisao poopćenog teorema srednje vrijednosti je da za parametarski definiranu krivulju postoji tangenta na tu krivulju paralelna spojnici njenih krajeva (osim ako za slučaj kad je $f'(c) = g'(c) = 0$) kako ilustrira slika 3. Naime, ako je krivulja u koordinantoj ravnini definirana kao skup svih točaka $(f(t), g(t))$ za $a \leq t \leq b$ onda ona "ide" od točke $(f(a), g(a))$ do točke $(f(b), g(b))$ koje zovemo krajevima krivulje. Ako su to dvije različite točke, krivulja nije zatvorena te je smisleno govoriti o pravcu kroz njih i tražiti njemu paralelne tangente na krivulju.



Slika 3. Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema srednje vrijednosti.

Prvo pogledajmo slučaj kad su svi članovi u formuli iskaza teorema različiti od nule. Primjer takvog slučaja imamo za funkcije zadane formulama $f(t) = \cos t + t \sin t$ i $g(t) = \sin t - t \cos t$ za $0 \leq t \leq \frac{5}{2}\pi$. Odgovarajuća krivulja je krivulja na slici 3. Krajevi te krivulje su točke $(f(0), g(0)) = (1, 0)$ i $(f(8), g(8)) = \left(\frac{5}{2}\pi, 1\right)$. Na slici se vidi i pravac kroz te dvije točke te jedna od dvije tom pravcu paralelne tangente na krivulju.

Ipak, postoje slučajevi u kojima nije moguća takva geometrijska interpretacija Cauchyjeva teorema o srednjoj vrijednosti tj. slučajevi kad krivulja nije zatvorena, funkcije f i g zadovoljavaju uvjete teorema, ali ne postoji tangenta na krivulju paralelna spojnici krajeva krivulje. Do toga dolazi kad su jedini brojevi c između a i b za koje vrijedi jednakost teorema takvi da je $f'(c) = g'(c) = 0$. Takav je slučaj funkcija zadanih formulama $f(t) = t^3$, $g(t) = 1 - t^2$ za $-1 \leq t \leq 1$, a odgovarajuća krivulja prikazana je slikom 4. Zadane funkcije zadovoljavaju pretpostavke teorema, ali jedini c za koji vrijedi jednakost je $c = 0$ i imamo $f'(0) = g'(0) = 0$. Stoga u odgovarajućoj točki krivulje, točki $(f(0), g(0)) = (0, 1)$, uopće na postoji tangenta. Kako je to jedina točka c koja zadovoljava jednakost iz teorema, vidimo da se radi o primjeru kad funkcije zadovoljavaju teorem, ali nemamo geometrijske interpretacije teorema u smislu postojanja točke u kojoj je tangenta paralelna spojnici krajeva krivulje.



Slika 4. Specijalni slučaj Cauchyjevog teorema o srednjoj vrijednosti.

U području algebre Cauchy je doprinio razvoju teorije grupa; dokazao je da je red[19] podgrupe konačne grupe djeljitelj reda grupe. Dao je ime determinanti, u članku u kojem je dokazao **Binet[20]-Cauchyjevu formulu**: determinanta produkta matrica jednaka je produktu njihovih determinanti. Poznata je i **formula Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog**[21] iz linearne algebre. Cauchy je dokazao jedan od njenih specijalnih slučajeva, a to je da za realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vrijedi

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

Da zaključimo: ovom velikom matematičaru uvelike zahvaljujemo za suvremeni oblik matematičke analize, koju je sistematizirao i precizirao. Bitno je doprinio i razvoju teorije grupa i matematičke fizike. Iako u Cauchyjevom ogromnom opusu nisu svi rezultati njegovi vlastiti, bez da je to pritom sam naveo, neosporno je da je imao sasvim dovoljno vlastitih sposobnosti i rezultata da mu nije bilo potrebno prisvajati tuđe. Tom svojom osobinom i arogancijom umanjio je pozitivnost svog lika u povijesti znanosti, no za razliku od primjerice Laplaceovog političkog oportunizma mora mu se priznati dosljednost vlastitim uvjerenjima.

Literatura

[1] J. V. Grabiner, *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*, The American Mathematical Monthly, Vol. **90**(1983), pp. 185-194

[19] Red grupe je broj elemenata u grupi

[20] Jacques Philippe Marie Binet, 1786. - 1856., francuski matematičar, bavio se teorijom matrica i nezavisno od Cauchyja dokazao po njima nazvanu formulu.

[21] Ako je s $\langle , \rangle$ označen skalarni produkt u unitarnom prostoru, onda za svaka dva vektora x i y iz tog prostora vrijedi $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$.

[2] The Catholic Encyclopedia: Augustin-Louis Cauchy,
`http://www.newadvent.org/cathen/03457a.htm`

[3] Mac Tutor History of Mathematics Archives: Augustin Louis Cauchy,
`http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Cauchy.html`

[4] Wikipedia: Augustin Louis Cauchy,
`http://en.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy`

[5] Weisstein, Eric W. "Augustin Louis Cauchy." From MathWorld–A Wolfram Web Resource
`http://scienceworld.wolfram.com/biography/Cauchy.html`