Lončarić I. (2010): Prijelaz iz Gauss-Krügerovih u UTM koordinate putem Helmertove transformacije za područje grada Sarajeva
Ekscentar, br. 12, str. 74-77

Prijelaz iz Gauss-Krügerovih u UTM koordinate putem Helmertove transformacije za područje grada Sarajeva

» *Ivan Lončarić*

SAŽETAK. U radu je opisano i prikazano kako dobiti koordinate za područje grada Sarajeva u UTM projekciji i s datumom WGS-1984, ako raspolažemo s Gauss-Krügerovim koordinatama na starom Besselovom datumu iz 1841.

KLJUČNE RIJEČI: transformacija koordinata, Gaussova projekcija elipsoida na ravninu, Gauss-Krügerova projekcija, UTM projekcija, Helmertova transformacija

> 1. Uvod

Transformacija koordinata (eng. coordinate transformation): promjene koordinata iz jednog koordinatnog referentnog sustava u drugi koordinatni referentni sustav, koji je zasnovan na drugom datumu kroz jedan na jedan vezu.

Datum (eng. datum): parametar ili skup parametara koji definiraju položaj ishodišta, mjerilo i orijentaciju koordinatnog sustava.

Geodetski datum (eng. geodetic datum): datum koji definira veličinu elipsoida i njegov položaj obzirom na centar gravitacije i srednji položaj rotacijske osi Zemlje.

Lokalni datum (eng. local datum): datum koji opisuje odnos koordinatnog sustava i lokalnih referenci (npr. lokalne točke).

> 2. Gaussova projekcija elipsoida na ravninu

Gaussova konformna projekcija rotacijskog elipsoida na ravninu je najvažnija geodetska projekcija. Posebnu grupu projekcija čine tvz. »geodetske projekcije«, tj. projekcija elipsoida za potrebe državne izmjere. Projekcija za potrebe državne izmjere je projekcija koja će poslužiti za preračunavanje koordinata trigonometrijskih točaka u ravninu. U toj će projekciji, prema tome, biti određene definitivne pravokutne koordinate trigonometrijskih točaka. Ta projekcija treba poslužiti kao matematička osnova za sva računanja u ravnini i za izradu planova i karata najkrupnijih mjerila. Za potrebe državne izmjere u većini zemalja Europe danas se upotrebljava Gauss-Krügerova projekcija.

Ovu projekciju prvi je primjenio C.F.Gauss pri izračunavanju hanoverske (Hannover) triangulacije izmedu 1820. i 1830. godine. Gauss je definirao svoju projekciju rotacijskog elipsoida na ravninu kao konformnu projekciju koja zadovoljava dva dodatna uvjeta i to:

- centralni meridijan se projicira kao pravac,
- duž centralnog meridijana nema deformacija dužina.

Gauss nije ostavio detaljne formule za transformaciju geodetskih koordinata (ϕ,λ) u projekcijske kartezijeve koordinate (x,y). Bilo je nekoliko pokušaja da se one ponovno izvedu, ali tek je general Krüger, vodeći čovjek Postdamskog geodetskog instituta, iz Gaussovih zapisa uspio ponovo razviti sve formule potrebne za projekciju i za računanje unutar projekcije.

Krüger je dao sva računanja u logaritamskoj formi. Zbog njegovog doprinosa geodetskoj profesiji, danas se ta projekcija zove Gauss-Krügerova. On je godine 1912. objavio i knjigu o Gaussovoj projekciji elipsoida na ravninu, a 1919. zbirku formula za logaritamsko računanje.

U literaturi engleskog jezičnog područja ova se projekcija susreće pod nazivom Transverse Mercator Projection. Budući da se geodetske projekcije, osim za izradu karata krupnih mjerila, koriste kao osnova za sva računanja u ravnini, to je u njihovom proučavanju osim računanja geografskih koordinata u ravnini iz geografskih koordinata potrebno riješiti i niz

Ivan Lončarić, Geo-Land, Bana Josipa Jelačića 80, 10450 Jastrebarsko, e-mail: ivan.loncaric.geodet@gmail.com

ostalih zadataka:

1. računanje geografskih koordinata iz pravokutnih koordinata u ravnini projekcije,
2. računanje konvergencije meridijana iz geografskih i pravokutnih koordinata,
3. računanje linearnog mjerila iz geografskih i pravokutnih koordinata,
4. računanje redukcije pravaca i dužina,
5. računanje pravokutnih koordinata točke kad su zadane pravokutne koordinate jedne točke, duljina i azimut geodetske linije (prvi i drugi geodetski zadatak),
6. računanje duljina i azimuta geodetske linije iz pravokutnih koordinata dviju točaka,
7. transformacija koordinata između susjednih koordinatnih sustava.

Austrija je bila prva država koja je uvela Gauss- Krügerovu projekciju za potrebe državne izmjere. Bilo je to 1917. godine. Njemačka je to isto učinila 1923. godine. Bivša Jugoslavija je Gauss- Krügerovu projekciju uvela 1924. godine. Izbor projekcije izvršila je komisija u kojoj su bili najpoznatiji geodetski stručnjaci tog vremena. Komisija je nakon detaljne analize u opsežnom pismenom izvještaju kao najpogodniju projekciju predložila Gauss-Krügerovu projekciju.

Kod Gaussa elipsoid preslikavamo na ravninu pod ovim uvjetima:

1. projekcija mora biti konformna, tj. mora se izvršiti analitičkim funkcijama kompleksnih brojeva,
2. srednji meridijan mora se preslikavati kao prava linija i njegova projekcija predstavlja x-os koordinatnog sustava u ravnini, u odnosu na koju je čitava projekcija simetrična: za $\lambda_0=\lambda$ y=0,
3. os x pravokutnog koordinatnog sustava poklapa se sa srednjim meridijanom duž kojega nema linearnih deformacija: za $\lambda_0=\lambda$

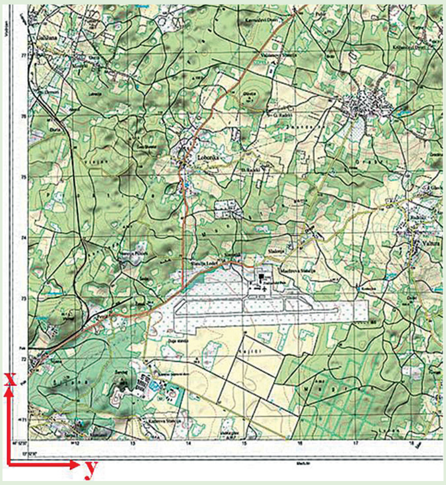
$$x=\int_0^{\varphi} M d\varphi$$

(λ_0-geodetska dužina centralnog meridijana).

> 3. Gauss-Krügerova projekcija

U ovoj projekciji se meridijani i paralele preslikavaju kao krive linije, pri tome su meridijani simetrični s obzirom na srednji meridijan koji se preslikava kao pravac, a paralele s obzirom na ekvator, koje se također preslikavaju kao pravac.

Ishodište se može postaviti u bilo kojoj točki srednjeg meridijana, ali obično se uzima u presjeku srednjeg meridijana i ekvatora. Za Gauss-Krügerovu projekciju također kažemo da je konformna projekcija elipsoida na ravninu jer u projekciji



Slika 1. Prikaz karte u G-K. projekciji

nema deformacija kutova.

U Gauss-Krügerovoj projekciji mjerilo duž centralnog meridijana jednako je m_0=0,9999. Svaka koordinatna zona ima širinu od 3° geodetske dužine. Prva zona ima centralni meridijan (Greenwich) 0°, pa sljedeći ima 3° itd. Nama su bitni centralni meridijani 15° i 18° istočne dužine. Da bi se moglo prepoznati o kojoj se zoni radi, uobičajeno je broj zone dodati ispred koordinatnog pomaka ordinate y_0. Kod Gauss-Krügerove taj pomak iznosi y_0=500 000 m. Zbog toga y_0 u šestoj koordinatnoj zoni iznosi y_0=6 500 000m. Kao datum Gauss-Krügerove projekcije upotrebljava se Bessel-ov elipsoid iz 1841.

> 4. UTM projekcija

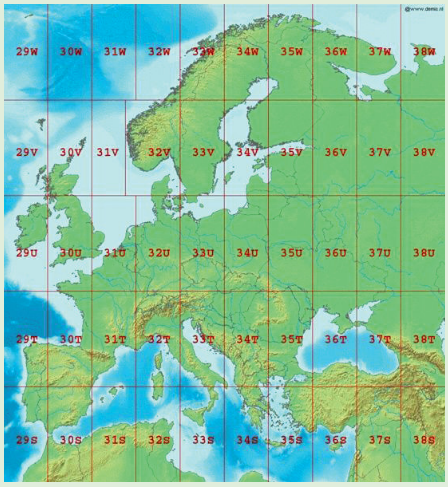
Univerzalna Transverzna Mercatorova projekcija je razvijena od strane United States Army Corps of Engineers u 1947. Dakle, nakon Drugog svjetskog rata, razvijen je projekcijski sustav za cijelu Zemlju koji se naziva Univerzalna transverzalna Mercatorova projekcija (Gauss-Krügerova). To je Gauss-Krügerova projekcija s linearnim mjerilom na srednjem meridijanu m_0 = 0,9996. UTM sustav je oslonjen na WGS-84 međunarodni elipsoid, meridijanske zone su široke 6° Umjesto središnjeg meridijana bez pogreške se preslikavaju dva paralelna presjeka udaljena oko 180 km od središnjeg meridijana. Područje između presjeka je u projekciji umanjeno, dok je uvećanje u vanjskom području 1,00015 na graničnom meridijanu (ϕ=50°).

UTM-sustav se primjenjuje samo u područjima do 80° južne geografske širine i do 84° sjeverne geografske širine jer su meridijanske zone na polovima preuske. Na polovima se kao dodatak primjenjuje *Univerzalna Polarna Stereografska Projekcija (UPS)* koja se dobiva konformnom projekcijom elipsoida na kuglu, a kugla se onda stereografski projicira na ravninu.

Apscisa koordinate x južne polutke povećava se za pomak x_0=10 000 000 m na ekvatoru kako bi se izbjegle negativne vrijednosti apscisa. Pomak ordinate je identičan s pomakom u Gauss-Krügerovoj projekciji y_0=500 000 m.

Tako na primjer, najvažnije zone za naše područje su: zona 33, s centralnim meridijanom 15° i zona 34, s centralnim meridijanom 21°

Mjerilo duž centralnog meridijana iznosi m_0=0,9996. Kod UTM projekcije broj zone se ne stavlja ispred pomaka y_0.



Slika 2. Distribucija kontinenata Europe u UTM zoni

Značenje UTM-sustava je u njegovoj primjeni širom svijeta; standardno ga primjenjuje NATO, a pojavom GPS-prijamnika s mogućnošću transformacije koordinata svakom je korisniku moguć lagan prijelaz na ravninske koordinate. Za UTM projekciju danas se većinom koristi WGS-84 elipsoid.

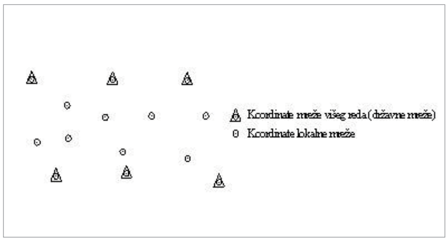
> 5. Helmertova transformacija

Transformacija položaja točaka iz jednog koordinatnog sustava u ravnini u drugi je jedna od najobičnijih numeričkih operacija u geodeziji. Transformacije koordinata mogu se izvesti na mnogo načina, ovisno o svojstvima koordinatnog sustava. Od svih matematičkih modela i funkcija koje mogu poslužiti za transformaciju koordinata najvažnije su linearne transformacije. Najopćenitija linearna transformacija zove se afina transformacija i za dvodimenzionalni koordinatni sustav ona se postiže upotrebom dviju jednadžbi:

$$\begin{aligned} x &= a_1\xi + b_1\eta + x_0 \\ y &= a_2\xi + b_2\eta + y_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

U ovom slučaju koordinate (ξ,η) treba transformirati u novi sustav (x,y).

Koordinate koje se transformiraju zovemo »lokalne koordinate« dok koordinate u koje se točke transformiraju zovemo



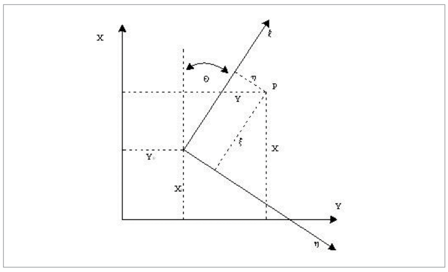
Slika 3. Točke mreže u oba sustava

»globalne koordinate«. Dakle, u našim transformacijama uvijek se lokalne koordinate transformiraju u globalne. Veličine a_1, a_2, b_1, b_2, x_o, y_o poznate su kao parametri afine transformacije. Najvažniji specijalni slučaj afine transformacije je konformna transformacija. Da bi afina transformacija postala konformna, parametri transformacije moraju zadovoljiti sljedeća dva uvjeta:

$$a_1 = b_2 = a \qquad b_1 = -a_2 = b \qquad (1.2)$$

S ta dva uvjeta pojednostavimo transformacijske jednadžbe

$$x = a\xi - b\eta + x_0$$



Slika 4. Ortogonalna ili konformna transformacija koordinata

$$y = b\xi + a\eta + y_0 \qquad (1.3)$$

Linearna konformna transformacija je zaista najvažnija transformacija u geodeziji, gledano s praktičnog stanovišta. Linearna transformacija može se primijeniti ako su četiri parametra transformacije a, b, x_0, y_0 definirana. Međutim velika većina problema u geodeziji koji uključuju linearne transformacije nemaju eksplicitno definirane parametre transformacije. Parametri su obično nepoznati. Prema tome, da bi se lokalne koordinate mogle transformirati u globalne, parametri se moraju indirektno izračunati iz skupa točaka čije se pozicije znaju i u globalnom i u lokalnom koordinatnom sustavu.

Za slučaj opće afine transformacije, sa šest parametara transformacije, najmanje tri točke u oba koordinatna sustava moraju biti poznate. Naravno, te tri točke ne smiju biti kolinearne, tj. ne smiju biti na istom pravcu. Za ortogonalnu ili konformnu transformaciju bar dvije točke moraju biti potpuno definirane u oba koordinatna sustava da bi se mogle izračunati jedinstvene vrijednosti četiri parametra transformacije a, b, x_0, y_0. Međutim, minimalan broj točaka definiran u dva koordinatna sustava ne pruža nikakvu sigurnost ni kontrolu ispravnosti izračunatih vrijednosti parametara. Da bi se povećala kvaliteta i sigurnost parametara transformacije obično se definira više točaka u oba koordinatna sustava nego što to broj nepoznatih transformacijskih parametara zahtijeva. U tom slučaju možemo izračunati i statističku pouzdanost parametara pod pretpostavkom da globalne koordinate podliježu normalnoj distribuciji. Svaka točka koja je poznata u oba sustava definira dvije jednadžbe (1.3) s četiri nepoznanice a, b, x0, y0. Optimalno rješenje se dobije ako imamo više od dvije točke (10 do 15) i ako su one ravnomjerno rasprostranjene područjem koje će biti transformirano. Zgusnuti skupovi točaka u samo jednom dijelu transformiranog područja ne daju tako dobre rezultate kao slučajevi gdje su točke ravnomjerno raspoređene. Važno je da kod određivanja četiri parametara transformacije imamo više od dvije točke čije su pozicije definirane u lokalnim i globalnim koordinatama. Što je više točaka poznato, to će rezultati biti pouzdaniji. Ako se jednadžbe linearne ortogonalne transformacije (1.3) napišu u implicitnom obliku dobijemo:

$$\begin{aligned} x - a\xi + b\eta - x_0 &= 0 \\ y - b\xi + a\eta - y_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Kad se koordinate iz oba sustava (x,y) i (ξ, η) smatraju mjerenjima, onda su jednadžbe (1.4) tipičan primjer općeg matematičkog modela čije izjednačenje zahtijeva mnogo više numeričkih operacija i u svojoj suštini je kompleksnije nego izjednačenje posrednog tj. parametričkog modela. Međutim, mnogo je jednostavnije rješenje problema, izjednačenja parametra linearne ortogonalne transformacije dao njemački geodet Helmert. U svom pristupu problemu on je lokalne koordinate (ξ, η) uzeo kao konstantne veličine, a samo globalne koordinate (x,y) uzeo je kao mjerene stohastične varijable. Ako se prihvati Helmertova sugestija, onda linearna transformacija (1.3) postaje klasičan primjer posrednog tj. parametričkog modela. Prema tome, Helmertova transformacija i nije neka transformacija koordinata, već je ona način računanja parametara transformacije metodom najmanjih kvadrata. Globalne koordinate smatraju se mjerenim veličinama, a u pomanjkanju nekih specifičnih informacija o kvaliteti globalnih koordinata pretpostavlja se da su one mjerenja jednakih težina. Ako pretpostavimo da ima *m* točaka čije su pozicije definirane u lokalnim i globalnim koordinatama, tada je svaka točka zastupljena s dvije jednadžbe, jedna za koordinatu x, druga za koordinatu y. To znači da će vektor mjerenja imati *2m* elemenata.

$$l^t = [x_1\ y_1\ x_2\ y_2 \ldots \ldots x_m\ y_m],\ n = 2m \quad (1.5)$$

Broj parametara u dvodimenzionalnoj ortogonalnoj transformaciji je uvijek četiri

$$x^t = [a,\ b,\ x_0,\ y_0],\ u{=}4 \qquad (1.6)$$

Helmertova transformacija je linearni posredni tj. parametrički model i prva dizajn matrica *A* je derivacija mjerenja po parametrima, tj. jednadžbi (1.3) po vektoru parametara (1.6) , a to je u ovom slučaju jednostavno.

$$A = \begin{bmatrix} \xi_1 & -\eta_1 & 1 & 0 \\ \eta_1 & \xi_1 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_m & -\eta_m & 1 & 0 \\ \eta_m & \xi_m & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

Kako je posredni tj. parametrički model (1.3) linearan, približne vrijednosti parametara i ne moraju biti poznate. Mogu se uzeti bilo koje vrijednosti za njih. Ako se računanja u izjednačenju mogu vršiti s velikim brojem znamenki onda kao elemente približnog vektora parametara bez problema možemo uzeti slijedeće vrijednosti:

$$x_0^t = [1\ 0\ 0\ 0] \qquad (1.8)$$

U tom slučaju elementi vektora neslaganja su jednostavno razlike između lokalnih i globalnih koordinata.

$$\omega^t = [\xi_1 - x_1\ \eta_1 - y_1\ \xi_2 - x_2\ \eta_2 - y_2 \ \ldots \ldots\ \xi_m - x_m\ \eta_m - y_m] \qquad (1.9)$$

Ukoliko ne postoje posebne informacije o kvaliteti pojedinih globalnih koordinata, pretpostavlja se da su sve koordinate određene jednom te istom preciznošću i prema tome su im sve težine jednake. Bilo koji pozitivni broj može se uzeti kao težina za sve globalne koordinate, ali je zbog jednostavnosti najbolje uzeti vrijednost jedinice. U tom je slučaju matrica težina jednaka jediničnoj matrici.

$$P = I \qquad (1.10)$$

Zato je formiranje normalnih jednadžbi pojednostavljeno:

$$N = A^t A,\ u = A^t \omega \qquad (1.11)$$

U koliko za globalne koordinate postoji njihova matrica varijance-kovarijance onda se matrica težina računa kao inverzna matrica varijance-kovarijance matrice globalnih koordinata:

$$P = C_{GK}^{-1}$$

Ako su približne vrijednosti nepoznatih parametara definirane po (1.8) onda su elementi vektora neslaganja (1.9) numerički veliki brojevi i zato formiranje normalnih jednadžbi zahtijeva veliki broj znamenki i ne samo formiranje normalnih jednadžbi, već se i sve ostale operacije u procesu izjednačenja moraju dovršiti s mnogo znamenki (double precision).

> 5. Zaključak

Dakle, ako želimo prijeći iz Gauss-Krügerovih koordinata u UTM koordinate za područje grada Sarajeva možemo koristiti linearnu transformaciju (ξ,η)→(X,Y) čija točnost na rubnom području iznosi npr. za točku $T_{1409} = \sqrt{0,025^2 + 0,009^2} = 0,026m$ dok u sredini područja za točku $T_{1368} = \sqrt{0,000^2 + 0,005^2} = 0,005m$ što je dovoljna točnost u većini geodetskih radova.

Može se uočiti da točke s ruba područja transformacije imaju veća odstupanja nego ostale točke (Tablica 3).

Dakle, ovaj rad je namijenjen svima koji žele računati pozicije točaka na području grada Sarajeva u UTM projekciji i s datumom WGS84, a na raspolaganju su im Gauss-Krügerove koordinate na starom Besselovom datumu iz 1841.

U ovom sam radu pokazao da se za točnost od 0,03 m može upotrijebiti linearna transformacija, a ta točnost je dovoljna za najveći postotak geodetskih projekata. Važno je naglasiti da se pogreške od 0,03 m događaju na rubnim dijelovima, dok je na svim drugim mjestima na području grada Sarajeva postignuta točnost mnogo bolja.

Umjesto silnih računanja dovoljno je upotrijebiti linearnu transformaciju sa sljedećim parametrima:

A= 0,999814237 m
b= 7,49345E-07 m
x_0= -59,036 m
y_0= 1.203,864 m

i u uvrstiti ih u formule:
x=aξ-bη+x0, y= bξ+aη+y0
te će se tako dobiti tražene UTM koordinate.

> Literatura

» Frankić, K. (2007): Uvod u izjednačenje metodom najmanjih kvadrata, Građevinski fakultet-odsjek za geodeziju, Sarajevo.
» Frankić, K. (2009): Matematička kartografija, Građevinski fakultet-odsjek za geodeziju, Sarajevo.
» Frankić, K. (2009): Geodetske projekcije, Građevinski fakultet-odsjek za geodeziju, Sarajevo.
» Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet, Zagreb.
» Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja II, skripta, Geodetski fakultet, Zagreb.
» Pribičević, B. (2005): Pomorska geodezija, Geodetski fakultet, Zagreb.
» Bašić, T. (2008): Geodetski referentni okviri, Geodetski fakultet, Zagreb.
» URL-1: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Usgs_map_traverse_mercator.PNG.
» URL-2: http://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_system.
» URL-3: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/5/57/Utm-zones.svg.