Heuristika i višedimenzionalni tetraedar

Petar Svirčević*

Sažetak. *U ovome članku ćemo formulirati i u jednom smjeru dokazati na elementaran način dva teorema (ekvivalencije) o svojstvima težišta trokuta i težišta tetraedra, koja se koriste u matematičkim primjenama. Zatim ćemo bez dokaza iskazati tri teorema o višedimenzionalnom tetraedru (određivanje težišta, jedno specijalno svojstvo težišta i njegov volumen), s time da ćemo najprije dati i posebne slučajeve, koje znamo elementarno dokazati. Svrha je svega toga, da se prezentira heuristika (grč., nauka o metodama istraživanja novih spoznaja) ili ars inveniendi (lat., umijeće naslućivanja), koja ima veliku važnost u matematici, i ne samo u matematici.*

Ključne riječi: *višedimenzionalni tetraedar, težište, volumen*

Heuristics and a multidimensional tetrahedron

Abstract. *In this paper we will formulate and prove in one direction and in an elementary way two (equivalence) theorems referring to properties of the centre of gravity of a triangle i.e. a tetrahedron, which are found in mathematical applications. Then, without proving, we will state three theorems on a multidimensional tetrahedron (determining its centre of gravity, one special property of the centre of gravity and its volume), providing thereby special cases which we know how to prove in an elementary way. The purpose of this is to present heuristics or ars inveniendi, which is important in mathematics, and not only in mathematics.*

Key words: *multidimensional tetrahedron, centre of gravity, volume*

U ovome članku ćemo koristiti naziv AG nejednakost, koja je dana vezom

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{1}$$

gdje se broj

$$A_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \tag{2}$$

naziva aritmetička sredina, a broj

$$G_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{3}$$

*Željeznička tehnička škola u Zagrebu, e-mail: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

geometrijska sredina od nenegativnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Primijetimo da u (1) vrijedi jednakost ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Napomenimo, da se može pokazati i obrat ove implikacije, koji nije očit. Ovu nejednakost u općem obliku prvi je dokazao A. L. Cauchy 1820., a do danas su dani i drugi dokazi. Ovdje nećemo izvesti opći dokaz, koji se može naći u [2], nego ćemo dati provjeru, odnosno dokaze, samo za $n = 1, 2, 3, 4$. Ako je $n = 1$ nejednakost (1) je oblika $a_1 \geq a_1$, odnosno, u tom je slučaju ta nejednakost uvijek jednakost.

Iz evidentne nejednakosti $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \tag{4}$$

pa je time dokazano (1) za slučaj $n = 2$.

Dokaz AG nejednakosti za slučaj $n = 3$ malo je teži. Iz prvog razreda srednje škole poznat je rastav $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, ili

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \geq 0, \tag{5}$$

uz uvjet $a, b, c > 0$, pa odatle slijedi nejednakost

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \tag{6}$$

Ako uzmemo da je $a^3 = a_1, b^3 = a_2, c^3 = a_3$ i to supstituiramo u (6) dobivamo

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}. \tag{7}$$

Na kraju ćemo dokazati AG nejednakost za slučaj $n = 4$ koji je također jednostavan. Primijenimo li (4) dvaput na zbroj od četiri nenegativna broja imamo

$$\frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)}{4} \geq \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + 2\sqrt{a_3 a_4}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

ili

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \tag{8}$$

Sada ćemo prijeći, uz jednu definiciju i napomene, na formuliranje i dokazivanje najavljenih teorema.

Definicija 1. *Ako je u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n postavljen Kartezijev pravokutni koordinatni sustav $O(X_1, X_2, \ldots X_n)$, tada se točke iz toga sustava označavaju s $A_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ gdje je $k \in \mathbb{N}$.*

Sa strane mnemotehnike oznaka iz prethodne definicije nadamo se da je prikladna. Naime, svakoj koordinati uređene n-torke pripadaju dva prirodna broja, gdje se indeks odnosi na broj koordinate, a broj u zagradi na mjestu eksponenta se odnosi na pripadnu točku. Koristeći tu oznaku lakše ćemo doći nepotpunom indukcijom do heuristički iskazanih teorema, koje onda treba matematičkom indukcijom, ili na neki drugi način, dokazati.

a) Jednodimenzionalni tetraedar

Napomena 1. *Na pravcu, tj. na 1-dimenzionalnom euklidskom prostoru* E^1*, neka je postavljen Kartezijev koordinatni sustav* $O(X_1)$*, a u tom sustavu su zadane dvije točke* $A_1(x_1^{(1)})$ *i* $A_2(x_1^{(2)})$ *koje su desno orijentirane. U školi se ranije reklo da je udaljenost ovih dviju točaka dana s*

$$d(A_1, A_2) = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}, \tag{9}$$

ako želimo sačuvati orijentaciju, ili uzmemo tu vrijednost po apsolutnoj vrijednosti, ako nam je važan samo iznos. Sada idemo na terminološko poopćenje, pa ćemo tu udaljenost zvati volumen 1-dimenzionalnog orijentiranog tetraedra, te ćemo to prikazati pomoću determinante drugog reda, tj.

$$V_1 = \frac{1}{1!} \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Očigledno je da su relacije (9) i (10) međusobno ekvivalentne. Prisjetimo se, da je koordinata težišta (polovišta) dužine jednaka aritmetičkoj sredini koordinata njezinih krajeva, dakle

$$T_{(1)} \left(\frac{x_1^{(1)} + x_1^{(2)}}{2} \right). \tag{11}$$

Lako se pokaže, da je točka $T_{(1)}$ *unutar 1-dimenzionalnog tetraedra, čiji su vrhovi u točkama* A_1 *i* A_2*, njegovo težište (polovište) onda i samo onda ako je produkt udaljenosti* x_1 *i* x_2 *te točke od točaka* A_1 *i* A_2 *maksimalan, naime to znači da je*

$$(x_1 \cdot x_2)_{\max} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 h_1 \cdot h_2 \tag{12}$$

gdje je $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{2}h_2 = \frac{1}{2}\left| x_2^{(1)} - x_1^{(1)} \right|$ *dakle* h_1 *i* h_2 *udaljenosti zadane točke od krajeva intervala.*

b) Dvodimenzionalni tetraedar

Teorem 1. *Točka* $T_{(2)}$ *unutar trokuta, čiji su vrhovi u točkama* A_1*,* A_2 *i* A_3*, je njegovo težište onda i samo onda ako je produkt udaljenosti te točke od stranica trokuta maksimalan.*

Dokaz. Neka su x_1, x_2 i x_3 udaljenosti točke $T_{(2)}$ od $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$ i $\overline{A_1A_2}$, a duljine tih stranica su b_1, b_2 i b_3 redom.

Ako je P površina $\triangle A_1A_2A_3$, tada vrijedi jednakost

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 2P. \tag{13}$$

Iz AG nejednakosti (7) dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^3. \tag{14}$$

Ako u (14) uvrstimo $a_i = b_i x_i$ i uvažimo (13), tada slijedi nejednakost

$$b_1x_1 \cdot b_2x_2 \cdot b_3x_3 \leq \left(\frac{2P}{3}\right)^3. \tag{15}$$

Jasno je da će u (15) vrijediti jednakost, kada je

$$b_1x_1 = b_2x_2 = b_3x_3 = \frac{2P}{3}. \tag{16}$$

Ako su h_1, h_2 i h_3 duljine visina trokuta na stranice $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_1}$ i $\overline{A_1A_2}$, redom, tada iz (16) slijedi $b_1x_1 = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3}\frac{1}{2}b_1h_1$, odnosno $x_1 = \frac{1}{3}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_i = \frac{1}{3}h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Iz elementarne geometrije znamo da je težište trokuta udaljeno od svake stranice za jednu trećinu duljine odgovarajuće visine. Ta se tvrdnja dobije, ako uvažimo da težište trokuta dijeli težišnicu na dva dijela, gdje se duljine tih dijelova odnose kao 1:2. Svakako da je dužina veće duljine spojnica vrha trokuta i težišta, a dužina manje duljine je spojnica težišta i polovišta tome vrhu nasuprotne stranice. Ako iz navedenog vrha postavimo pripadnu visinu i primijenimo Talesov poučak, tada dobijemo redom relacije (17), a to znači da je točka $T_{(2)}$ težište zadanog trokuta.

Jasno je, da lijeva strana u (15) ima maksimalnu vrijednost kada postoji jednakost, dakle $(b_1x_1 \cdot b_2x_2 \cdot b_3x_3)_{\max} = (b_1b_2b_3)(x_1x_2x_3)_{\max}$ jer je produkt $(b_1b_2b_3)$ konstantan.

Ako uvažimo ovaj rezultat i (17) zaključujemo da je

$$(x_1x_2x_3)_{\max} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 h_1h_2h_3 \tag{18}$$

što je i trebalo naći. Dakle dokazan je prvi smjer u ekvivalenciji ili lijeva implikacija. Da bi teorem bio u potpunosti dokazan trebalo bi dokazati i drugu ili desnu implikaciju. Dokaz toga obrata nije elementaran, jer bi trebalo tražiti ekstreme funkcije tri varijable.

Napomena 2. *U ravnini, tj, na 2-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^2 postavimo Kartezijev pravokutni koordinatni sustav $O(X_1, X_2)$. U tome sustavu neka su zadane tri točke $A_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $A_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ i $A_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$ desno orijentirane, koje određuju $\triangle A_1A_2A_3$, gdje od prije znamo da je njegova površina dana s formulom*

$$P = \frac{1}{2}\left[x_1^{(1)}(x_2^{(2)} - x_2^{(3)}) + x_1^{(2)}(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) + x_1^{(3)}(x_2^{(1)} - x_2^{(2)})\right], \tag{19}$$

kada hoćemo sačuvati orijentaciju. Ako nam je važan samo iznos, tada ćemo taj izraz uzeti po apsolutnoj vrijednosti. Sada ćemo ići na terminološko poopćenje, pa ćemo tu površinu zvati volumen 2-dimenzionalnog orijentiranog tetraedra, te ćemo *ga prikazati pomoću determinante trećeg reda, tj.*

$$V_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Lako se dokaže ekvivalencija između (19) i (20). I napokon recimo, da smo u prvom razredu srednje škole pokazali, da težištu trokuta pripadaju koordinate koje su aritmatička sredina odgovarajućih koordinata njegovih vrhova, dakle

$$T_{(2)}\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+x_1^{(3)}}{3}, \frac{x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+x_2^{(3)}}{3}\right) \tag{21}$$

c) Trodimenzionalni tetraedar

Teorem 2. *Točka $T_{(3)}$ unutar tetraedra, čiji su vrhovi u točkama A_1, A_2, A_3 i A_4, gdje nikoje tri nisu kolinearne niti sve četiri komplanarne, je njegovo težište onda i samo onda ako je produkt udaljenosti te točke od strana tetraedra maksimalan.*

Dokaz. Budući su A_1, A_2, A_3 i A_4 vrhovi tetraedra $A_1A_2A_3A_4$, tada njegovu bazu i plašt čine trokuti $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_2A_3A_4$, $\triangle A_3A_4A_1$, $\triangle A_4A_1A_2$, čije su površine $B_{123} = P(\triangle A_1A_2A_3)$, $B_{234} = P(\triangle A_2A_3A_4)$, $B_{341} = P(\triangle A_3A_4A_1)$, $B_{412} = P(\triangle A_4A_1A_2)$, a visine tetraedra na te baze neka su h_4, h_1, h_2, h_3 redom. Na osnovu uvedenih oznaka je jasno, da je volumen V_3 tetraedra $A_1A_2A_3A_4$ dan relacijama

$$V_3 = \frac{1}{3}B_{123}h_4 = \frac{1}{3}B_{234}h_1 = \frac{1}{3}B_{341}h_2 = \frac{1}{3}B_{412}h_3. \tag{22}$$

Nadalje neka su udaljenosti točke $T_{(3)}$ od strana tetraedra dane s $x_4 = d(T_{(3)}, \triangle A_1A_2A_3)$, $x_1 = d(T_{(3)}, \triangle A_2A_3A_4)$, $x_2 = d(T_{(3)}, \triangle A_3A_4A_1)$ i $x_3 = d(T_{(3)}, \triangle A_4A_1A_2)$. Iz (21) i (22) slijedi

$$B_{234}x_1 + B_{341}x_2 + B_{412}x_3 + B_{123}x_4 = 3V_3. \tag{23}$$

Zadatak kaže da treba naći $T_{(3)}$, tako da bude

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)_{\max}. \tag{24}$$

Iz AG nejednakosti (9) dobivamo nejednakost

$$a_1a_2a_3a_4 \le \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4. \tag{25}$$

Ako u (25) uvrstimo $a_1 = B_{234}x_1$, $a_2 = B_{341}x_2$, $a_3 = B_{412}x_3$ i $a_4 = B_{123}x_4$ i te uvažimo (23), tada slijedi nejednakost

$$B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4 \le \left(\frac{3V_3}{4}\right)^4 \tag{26}$$

U (26) su sve veličine fiksne osim varijabli x_1, x_2, x_3 i x_4, pa sada možemo lako naći (24), dakle u (26) će vrijediti jednakost, kada je

$$B_{234}x_1 = B_{341}x_2 = B_{412}x_3 = B_{123}x_4 = \frac{3V_3}{4} \tag{27}$$

a odatle je $B_{234}x_1 = \frac{3}{4}V_3 = \frac{3}{4}\frac{1}{3}B_{234}h_1$ ili $x_1 = \frac{1}{4}h_1$, pa na analogan način dobivamo i druge jednakosti, dakle

$$x_k = \frac{1}{4}h_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{28}$$

Iz statike znamo, da je težište tetraedra udaljeno od svake strane (baze i plaštnih trokuta) za jednu četvrtinu duljine odgovarajuće visine tetraedra. Na osnovu (28) zaključujemo da je $T_{(3)}$ težište tetraedra.

Jasno je da lijeva strana u (26) ima maksimalnu vrijednost kada postoji jednakost, dakle $(B_{234}x_1 \cdot B_{341}x_2 \cdot B_{412}x_3 \cdot B_{123}x_4)_{\max} = (B_{234}B_{341}B_{412}B_{123})(x_1x_2x_3x_4)_{\max}$, jer je produkt $(B_{234}B_{341}B_{412}B_{123})$ konstantan.

Ako uvažimo ovaj rezultat i (28) zaključujemo da je

$$(x_1x_2x_3x_4)_{\max} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 h_1h_2h_3h_4. \tag{29}$$

što je i trebalo naći. Dakle dokazan je prvi smjer u ekvivalenciji ili desna implikacija. Da bi teorem bio u potpunosti dokazan trebalo bi dokazati i drugu ili lijevu implikaciju. Dokaz toga obrata nije elementaran, jer bi trebalo tražiti ekstreme funkcije četiri varijable.

Napomena 3. *U prostoru, tj, u 3-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^3 postavimo Kartezijev pravokutni prostorni koordinatni sustav $O(X_1, X_2, X_3)$, a u njemu neka su zadane četiri točke*

$$A_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}), \;\; A_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}), \;\; A_3(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}) \;\; i \;\; A_4(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}),$$

koje su desno orijentirane i određuju 3-dimenzionalni tetraedar $T_1T_2T_3T_4$. Volumen toga tetraedra može se izraziti pomoću determinante četvrtog reda

$$V_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \\ 1 & x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Naime do (30) dolazimo tako da nađemo mješoviti produkt $(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_4}))/6$ jer to je zapravo $1/6 = 1/3!$ volumena paralelopipeda, koji je razapet s vektorima $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Ukratko ćemo objasniti kako smo do ovoga zaključka došli. Vidimo da je mjerni broj volumena dane prizme jednak iznosu mješovitog produkta vektora $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Budući je volumen trostrane prizme $A_1A_2A_3A_4B_3B_2$ jednak polovici volumena zadane prizme, a volumen tetraedra (trostrane piramide) $A_1A_2A_3A_4$ je jednak jednoj trećini volumena navedene trostrane prizme, onda je jasno zašto se u (30) pojavljuje koeficijent $1/6$.

Težište navedenog tetraedra dano je s

$$T_{(3)}\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+x_1^{(3)}+x_1^{(4)}}{4}, \frac{x_2^{(1)}+x_2^{(2)}+x_2^{(3)}+x_2^{(4)}}{4}, \frac{x_3^{(1)}+x_3^{(2)}+x_3^{(3)}+x_3^{(4)}}{4}\right). \tag{31}$$

Iskažimo riječima kako možemo doći do ove relacije. Dakle postavimo, kroz bilo koji vrh tetraedra i težišta njemu nasuprotne strane (trokuta), pravac. Taj pravac je nosilac težišnice i težišta tetraedra. Težišnica je spojnica tih dviju točaka. Ako isti postupak provedemo sada za još jedan vrh tetraedra i težište njemu nasuprotne strane, tada dobivamo još jedan pravac. Jasno je da se ovi pravci, kao i težišnice, sijeku u težištu tetraedra. Koordinate toga težišta se dobiju kao rješenje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice. I u ovom slučaju dobivamo da su njegove koordinate jednake aritmetičkoj sredini odgovarajućih koordinata zadanih vrhova, što se vidi iz (31).

Svakako da smo ovo zadnje razmatranje mogli koristiti i u dokazu teorema 2. Naime, dobili bi da se udaljenosti vrha tetraedra i njegovog težišta od ravnine, u kojoj se nalazi njima nasuprotna strana, odnose kao $4:1$.

d) Višedimenzionalni tetraedar

Napomena 4. *Iz prethodno dokazanih 1-, 2- i 3-dimenzionalnih slučajeva može se pretpostaviti da analogne tvrdnje vrijede i za više dimenzije, koje se više ne mogu vizualno predočiti. Sada će biti iskazane analogne tvrdnje, koje se ovdje neće dokazivati, jer za dokaz nije dovoljna srednjoškolska matematika. Svrha je svega ovoga, da se vidi kako se dolazi do općih hipoteza, koje onda treba strogo dokazati, odnosno iz njih se specijalizacijom dobiju posebni slučajevi koje smo već dokazali.*

Teorem 3. *Težište n-dimenzionalnog tetraedra* $T_1T_2\ldots T_{n+1}$, *koji je nedegeneriran, dano je s*

$$T_{(n)}\left(\frac{x_1^{(1)}+x_1^{(2)}+\ldots+x_1^{(n+1)}}{n+1},\ldots,\frac{x_n^{(1)}+x_n^{(2)}+\ldots+x_n^{(n+1)}}{n+1}\right), \tag{32}$$

ako su vrhovi u točkama $A_1, A_2, \ldots A_n$ *a one se nalaze u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru* E^n, *gdje je postavljen Kartezijev pravokutni koordinatni sustav* $O(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Napomena 5. *Intuitivno znamo što bi ovdje značio uvjet nedegeneriranosti za sustav od* $n+1$ *točke (nikoje dvije točke nisu identične, i nikoje tri točke ne leže na istom pravcu, i nikoje četiri točke ne leže u istoj ravnini,…, i nikoja* $n+1$ *točka ne leže u n-dimenzionalnoj ravnini), pa ga nećemo strogo definirati, jer ionako teorem 3 ne dokazujemo, što vrijedi i za teorem 4 i teorem 5. Ako u (32) uvrstimo redom* $n = 1, 2, 3$ *dobivamo formule (11), (21) i (31), što je i bilo za očekivati. Na kraju možemo reći, da težištu n-dimenzionalnog tetraedra pripadaju koordinate koje su aritmetička sredina odgovarajućih koordinata njegovih vrhova.*

Teorem 4. *Točka* $T_{(n)}$ *unutar n-dimenzionalnog tetraedra, čiji su vrhovi u točkama* $A_1A_2\ldots A_{n+1}$, *gdje moraju biti ispunjeni uvjeti nedegeneriranosti, je njegovo težište onda i samo onda ako je produkt udaljenosti te točke od "strana" n-dimenzionalnog tetraedra maksimalan.*

Napomena 6. *Da je teorem 4 stvarno poopćenje već pokazanih rezultata vidi se i tako što za* $n = 1, 2, 3$ *jednakost*

$$(x_1x_2\ldots x_{n+1})_{\max} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} h_1h_2\ldots h_{n+1} \tag{33}$$

postaje redom (12), (18) i (29).

Kao što se teorem 4 dobiva kao poopćenje teorema 1, 2 i 3 na više dimenzije, tako se i dane formule (10), (20) i (30) za volumene tetraedara pomoću determinanti poopćavaju na formulu za volumen n-dimenzionalnog tetraedra.

Teorem 5. *U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n postavljen je Kartezijev pravokutni koordinatni sustav. U tom sustavu neka je dana $n+1$ točka $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ gdje su ispunjeni uvjeti nedegeneriranosti. Te točke određuju n-dimenzionalni tetraedar $T_1T_2\ldots T_{n+1}$, čiji se volumen zove volumen n-dimenzionalnog desnoorijentiranog tetraedra. Volumen toga tetraedra je dan pomoću determinante $(n+1)$-og reda*

$$V_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \cdots & x_n^{(n+1)} \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Napomena 7. *Na kraju recimo, da ako u (34) uvrstimo redom $n = 1, 2, 3$ dobivamo formule (10), (20) i (30), koje smo također očekivali.*

Literatura

[1] BLANUŠA D., *Viša matematika, I dio, PRVI SVEZAK*, Tehnička knjiga, Zagreb

[2] BRNETIĆ I., *Nejednakosti među sredinama*, HMD, Zbornik radova (1. kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2000.

[3] MURRAY R. SPIEGEL, *Theoretical Mechanics*, SCHAUMS OUTLINE SERIES, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, Sydney

[4] PAVKOVIĆ B., *Metoda posebnih slučajeva*, HMD, Zbornik radova, Šesti susret nastavnika matematike; Zagreb, 3.-5. srpnja 2002.

[5] PAVKOVIĆ B., DAKIĆ B., HANJŠ Ž., MLADINIĆ P., *Male teme iz matematike*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 1994.

[6] RADIĆ M., *Algebra II. dio*, školska knjiga, Zagreb 1979.

[7] SVIRČEVIĆ P., *Konstrukcija težišta poligona i težišta njegovog ruba*, HMD, Zbornik radova (Šesti susret nastavnika matematike Republike Hrvatske), Zagreb 2002.