STUDENTSKA RUBRIKA

Josipova funkcija i još nešto

Krešimir Seršić*

Sažetak. *U radu se razmatra Josipova rekurzija. Najprije se daje kratki povijesni pregled Josipovog problema. Također analiziraju se neke generalizacije spomenutog problema.*

Ključne riječi: *binarni sustav, rekurzija, Josipov problem*

Josephus function and something else

Abstract. *Joseph's recursion is considered in this paper. A brief overview of the Josephus problem is given. Some generalisations of the given problem are also analysed.*

Key words: *binary system, recursion, Josephus problem*

1. Uvod

Da povijest i matematika mogu ići ruku pod ruku pokazuje ovaj drevni problem, nazvan Josipov problem. Tijekom rimsko - židovskog rata 67. godine poslije Krista, pobunjenik Josip Flavije zarobljen je zajedno sa svojih 40 suradnika u jednoj špilji, pokraj grada Jotapata od strane rimskih vojnika. Umjesto da se predaju, odlučili su se međusobno ubiti. Josip i njegov suradnik nisu bili za takvo rješenje pa je on dao sljedeći prijedlog. Njih 41 postavit će se u krug i svaka treća osoba bit će ubijena (nekoliko puta uokrug sa sve manjim brojem ljudi) dok ne preostanu na životu dvije osobe. Zahvaljujući svom matematičkom talentu Josip je brzo shvatio da će on i njegov suradnik preživjeti ako stanu na 16 i 31 mjesto. Tako se i dogodilo. Interesantno je da je Josip Flavije kasnije postao poznati rimski povjesničar (vidjeti [3]).

2. Josipova rekurzija

U našoj varijanti mi ćemo govoriti o brojevima umjesto osobama (vidjeti [1], [2]). Zamislimo da smo kružno zapisali brojeve (vidjeti [4]) od 1 do n tako da poslije broja n dolazi već napisani broj 1.

*In memoriam Krešimir Seršić (Čakovec, 1952. – Osijek, 2005.)

Za razliku od gore navedenog događaja iz povijesti Židova, precrtat ćemo (ili izbrisati) svaki drugi broj idući u krug po napisanim brojevima sve dok ne preostane samo jedan. Taj broj očito ovisi o broju n.

Primjer 1. Ako je $n = 5$ eliminiramo redom brojeve $2, 4$ i zatim ulazimo u drugi krug, gdje prvo nailazimo na broj 5, a zatim eliminiramo naredni broj 1. Kako je prvi neeliminirani broj 3, a drugi preostali 5, jasno je da će preostati broj 3. Isto tako za $n = 10$ bit će to broj 5.

Zbog jednostavnosti mi ćemo definirati funkciju $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdje je $J(n)$ broj koji preostane od brojeva $\{1, \ldots, n\}$, koristeći navedeni postupak.
Prvih nekoliko vrijednosti $J(n)$ izgledaju:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Gornja tablica sugerira, a to se može i dokazati da funkcija $J(n)$ "prebrojava" sve neparne brojeve, no tako da svaki put kada joj je argument potencija broja 2 krene ispočetka.

Ako stavimo $n = 2^m + l$, gdje je 2^m najveća potencija broja 2 koja nije veća od n, tada imamo (za dokaz vidjeti [1]):

$$J(2^m + l) = 2l + 1,\ 0 \leq l < 2^m. \tag{1}$$

Primjer 2. Kako je $100 = 2^6 + 36$ slijedi $J(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$.

Potencije broja 2 ovdje igraju važnu ulogu tako da je prirodno brojeve n i $J(n)$ zapisati u sustavu s bazom 2. Pretpostavimo da je

$$n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2$$

zapis broja n:

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2 + b_0,$$

gdje je svaki b_i ili 0 ili 1 i gdje je vodeća znamenka $b_m = 1$.
Neka je $n = 2^m + l$, $2^m > l \geq 0$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
n &= (1 b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0)_2;\\
l &= (0 b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0)_2;\\
2l &= (b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0 0)_2;\\
2l + 1 &= (b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0 1)_2;\\
J(n) &= (b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0 b_m)_2.
\end{aligned}$$

Formulu (1) možemo sada zapisati ovako:

$$J((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0 b_m)_2, \tag{2}$$

Za funkciju $J(n)$ imamo sljedeće rekurzivne relacije, drugim riječima za svaki prirodni broj n vrijedi:

$$\begin{aligned}
J(1) &= 1,\\
J(2n) &= 2J(n) - 1,\\
J(2n+1) &= 2J(n) + 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Relacije (3) zovemo Josipova rekurzija (vidjeti [1]).

Primjer 3. Za $(100)_{10} = (1100100)_2$ vrijedi

$$J((\mathbf{1}100100)_2) = (100100\mathbf{1})_2 = (73)_{10}$$

Uočimo, jedinica na početku argumenta Josipove funkcije, prelazi na kraj funkcijske vrijednosti tog argumenta.

Funkciju $J(n)$ možemo generalizirati uz pomoć proizvoljnih cjelobrojnih konstanti α, β_0, β_1:

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta_0, \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \beta_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Zatvorena forma ove generalizirane rekurzije za $n = 2^m + l$ (vidjeti [1]) je:

$$f(2^m + l) = 2^m\alpha + (2^m - 1 - l)\beta_0 + l\beta_1. \tag{5}$$

gdje je $0 \leq l < 2^m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Koristeći ovaj općenitiji oblik, relaciju (2) možemo pisati na drugačiji način:

$$\begin{aligned} &f((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2) = \\ &2f(b_m b_{m-1} \cdots b_1)_2) + \beta_{b_0} = \\ &4f((b_m b_{m-1} \cdots b_2)_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} = \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &2^m f((b_m)_2) + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} = \\ &2^m\alpha + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \end{aligned}$$

Umjesto standardnog binarnog zapisa sa znamenkama 0 i 1, zaključujemo da nam generalizirani oblik omogućava sljedeći oblik zapisa:

$$f((b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2) = (\alpha\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \cdots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_2. \tag{6}$$

Primjer 4. Ako u formulama (4) definiramo $\alpha = 3,\ \beta_0 = 4,\ \beta_1 = 5$ tada zbog (6) imamo:

$$f((1100100)_2) = (3544544)_2 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 32 + 4 \cdot 16 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 480.$$

Za kontrolu, uvrstimo naznačene vrijednosti u zatvorenu formu (5):

$$f(100) = 64 \cdot 3 + (64 - 1 - 36) \cdot 4 + 36 \cdot 5 = 480.$$

Uočimo, $J(n)$ je specijalni slučaj od $f(n)$ kada je $\alpha = 1, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 1$. Tada se formula (2) može zapisati pomoću 1 i -1. Idući primjer to ilustrira.

Primjer 5. Neka je zadan broj $(100)_{10} = (1100100)_2$. Upotrebom formula (2) i (6) dobivamo:

$$J((100)_{10}) = J((1100100)_2) = (1001001)_2 =$$

$$(1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1)_2 = 64 + 32 - 16 - 8 + 4 - 2 - 1 = 73.$$

3. ... i još nešto

Binarni racionalni broj iz intervala $\langle 0,1\rangle$ prikazujemo:

$$(0.a_1a_2\cdots a_m)_2 = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_{m-1}2^{-m+1} + a_m 2^{-m}$$

gdje je $\quad a_i \in \{0,1\} \quad$ za $\quad i \in \{1,\ldots,m\}$.

Primjer 6. $(0.11001)_2 = 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 0\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} = \frac{25}{32}$

Uočimo da je

$$(0.a_1a_2\cdots a_m)_2 = \frac{(a_1a_2\cdots a_{m-1}a_m)_2}{2^m}.$$

Namjera nam je konstruirati novu funkciju uz pomoć Josipove funkcije, koja bi bila definirana na svim brojevima iz $\langle 0,1\rangle$ a koji imaju konačan prikaz u binarnom sustavu. Ističem da uvažavamo nule iza posljednje jedinice.

Neka je $\mathcal{S}_m$ skup svih binarnih racionalnih brojeva iz intervala $\langle 0,1\rangle$ koji čine m elemenata iz skupa $\{0,1\}$ iza binarne točke. Ako takve brojeve (s binarnom točkom) promatramo kao binarni zapis broja iz $\langle 0,1\rangle$ tada imamo zanimljivu situaciju prikazanu sljedećim primjerom:

Primjer 7. Očito je da vrijedi:

$$(0.11001)_2 = (0.110010)_2 = (0.1100100)_2 = \cdots = (0.11001\underbrace{0\cdots 0}_{l})_2$$

gdje je $(0.11001)_2 \in \mathcal{S}_5$, $(0.110010)_2 \in \mathcal{S}_6$, $(0.1100100)_2 \in \mathcal{S}_7$ i općenito $(0.11001\underbrace{0\cdots 0}_{l})_2 \in \mathcal{S}_{5+l}$.

Kako je $(0.11001)_2$ najkraći od prikazanih, možemo ga smatrati njihovim reprezentantom. S obzirom na ovaj primjer neka je $\mathcal{S}_5^{'}$ skup svih reprezentanata gdje je $m = 5$.

Analogno tome neka je

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \mathcal{S}_i^{'}$$

skup svih reprezentanata tj. binarnih racionalnih brojeva iz $\langle 0,1\rangle$ koji završavaju znamenkom 1. Primijetimo da se svaki broj $r \in \mathcal{S}$ može na jedinstven način zapisati u obliku $\dfrac{n}{2^m}$, gdje je n neparan broj i $m \in \mathbb{N}$. Uočimo, skup svih binarnih racionalnih brojeva iz intervala $\langle 0,1\rangle$ koji se sastoje od proizvoljnog broja elemenata iz skupa $\{0,1\}$ iza binarne točke, možemo pisati:

$$\bigcup_i \mathcal{S}_i = \mathcal{S} \times \mathbb{N}_0$$

Drugim riječima svaki takav binarni broj može se prikazati kao uređeni par reprezentanta i konačnog broja nula iza posljednje jedinice tj.

$$((0.a_1a_2\cdots a_m)_2, l) \equiv (0.a_1a_2\cdots a_m\underbrace{0\cdots 0}_{l})_2, l \in \mathbb{N}_0$$

To ćemo koristiti u definiciji funkcije $\overline{J}$.

Funkciju $\overline{J} : \mathcal{S} \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathcal{S}$ definiramo pomoću Josipove funkcije u slučaju kada reprezentant iza binarne točke počinje jedinicom :

$$\overline{J}(r,l) = \overline{J}\left(\frac{n}{2^m}, l\right) = \frac{J(n \cdot 2^l)}{2^{m+l}}. \tag{7}$$

Ako reprezentant iza binarne točke počinje s k nula tada funkciju $\overline{J} : \mathcal{S} \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathcal{S}$ definiramo na sljedeći način:

$$\overline{J}(r,l) = \overline{J}\left(\frac{n}{2^{k+m}}, l\right) = \frac{J(n \cdot 2^l)}{2^{k+m+l}} \tag{8}$$

pri čemu su m i k prirodni brojevi, a n neparan broj takav da je $r = \dfrac{n}{2^m}$, odnosno $r = \dfrac{n}{2^{k+m}}$. Naglasimo, $\mathcal{S}$ je skup reprezentanata za $l = 0$ i vrijedi $J(2^m) = 1$, za $\forall m \in \mathbb{N}_0$.
Uzevši u obzir rekurzivne relacije (3), izraz (7) možemo pisati:

$$\begin{aligned} \frac{J(n \cdot 2^l)}{2^{m+l}} &= \frac{2 \cdot J(n \cdot 2^{l-1}) - 1}{2^{m+l}} = \frac{4 \cdot J(n \cdot 2^{l-2}) - 3}{2^{m+l}} = \cdots = \\ &= \frac{J(n)}{2^m} - \frac{2^l - 1}{2^{m+l}} = \frac{J(n)}{2^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+l}} = \\ &= \frac{J(n) - 1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+l}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Uzevši u obzir (8) analogno vrijedi:

$$\frac{J(n \cdot 2^l)}{2^{k+m+l}} = \cdots = \frac{J(n) - 1}{2^{k+m}} + \frac{1}{2^{k+m+l}}. \tag{10}$$

S obzirom na područje definicije funkcije $\overline{J}(r,l)$ očito je da su sada

$$(0.11001)_2, (0.110010)_2, (0.1100100)_2, \cdots, (0.11001\,\underbrace{0\cdots0}_{l})_2$$

različiti objekti. Primjenjujući formule (2), (6) , (7) , (8) , (9) i (10) imamo:

$$\begin{aligned} &\overline{J}((0.11001)_2) = \overline{J}((0.11001)_2, 0) = \overline{J}\left(\tfrac{25}{32}, 0\right) = \tfrac{1}{32} J(25) = \\ &\quad = \tfrac{1}{32} J((11001)_2) = (0.10011)_2 = (0.1\ 1\ \ -1\ \ -1\ 1)_2 = \tfrac{19}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{J}((0.110010)_2) = \overline{J}((0.11001)_2, 1) = \overline{J}\left(\tfrac{25}{32}, 1\right) = \tfrac{1}{64} J(50) = \\ &\quad = \tfrac{1}{64} J((110010)_2) = (0.100101)_2 = (0.1\ 1\ \ -1\ \ -1\ 1\ \ -1)_2 = \tfrac{37}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overline{J}((0.1100100)_2) = \overline{J}((0.11001)_2, 2) = \overline{J}\left(\tfrac{25}{32}, 2\right) = \tfrac{1}{128} J(100) = \\ &\quad = \tfrac{1}{128} J((1100100)_2) = (0.1001001)_2 = (0.11 - 1 - 11 - 1 - 1)_2 = \tfrac{73}{128}. \end{aligned}$$

Generalizirajmo naš slučaj. Ako binarni racionalni broj počinje iza decimalne točke s jedinicom, pišemo:

$$\begin{aligned} &\overline{J}((0.1a_2a_3\cdots a_{m-1}1)_2, l) = \frac{J((\overbrace{1a_2a_3\cdots a_{m-1}1}^{m}\overbrace{0\cdots0}^{l})_2)}{2^{m+l}} = \\ &= (0.a_2a_3\cdots a_{m-1}1\,\underbrace{0\cdots0}_{l}\,1)_2 = (0.1\beta_{a_2}\beta_{a_3}\cdots\beta_{a_{m-1}}1\,\underbrace{-1\cdots-1}_{l})_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Kako vrijedi $(0.1a_2a_3\cdots a_{m-1}1\underbrace{0\cdots0}_{l})_2 = 2\cdot(0.01a_2a_3\cdots a_{m-1}1\underbrace{0\cdots0}_{l})_2$, kada je općenito k nula iza decimalne točke, imamo:

$$
\begin{aligned}
&\overline{J}((0.\underbrace{0\cdots0}_{k}1a_2a_3\cdots a_{m-1}1)_2, l) = \tfrac{J((\overbrace{1a_2a_3\cdots a_{m-1}1}^{m}\overbrace{0\cdots0}^{l})_2)}{2^{m+l+k}} = \\
&(0.\underbrace{0\cdots0}_{k}a_2a_3\cdots a_{m-1}1\underbrace{0\cdots0}_{l}1)_2 = \\
&(0.1\underbrace{\;-1\cdots\;-1}_{k}\beta_{a_2}\beta_{a_3}\cdots\beta_{a_{m-1}}\;\;1\underbrace{\;-1\cdots\;-1}_{l})_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Istaknimo, (12) je najopćenitiji oblik funkcije $\overline{J}$ koji ćemo koristiti u daljnjem izlaganju.

Primjer 8. Uzmimo broj $(0.01100100)_2 = \frac{25}{64}$. Uočimo da je $k = 1$, odnosno $l = 2$. Proširimo $\frac{25}{64}$ s 2^l, pa dobijemo $\frac{100}{256}$. Prirodno je

$$
\overline{J}(0.011001, 2) = \overline{J}\left(\frac{25}{64}, 2\right) = \frac{1}{256}J(100) = \frac{73}{256} =
$$

$$
= (0.01001001)_2 = (0.1-11-1-11-1-1)_2
$$

Neka svojstva funkcije $\overline{J}$:

1. Kako Josipova funkcija J nije injektivna, zbog (7), (8), (9) i (10) zaključujemo da i funkcija $\overline{J}$ nije injektivna. Ako uzmemo zapis binarnog broja koji iza binarne točke ima w nula i jedinica, gdje je zbog (12) $w = k+m+l$, tada za $w = 3$ i uzevši $2^3 - 1$ takvih binarnih racionalnih brojeva iz $\langle 0, 1\rangle$ ($(0.000)_2$ ne uzimamo u obzir) imamo:

$$
\overline{J}((0.001)_2) = \overline{J}((0.010)_2) = \overline{J}((0.100)_2) = (0.001)_2 = \frac{1}{8}
$$

$$
\overline{J}((0.011)_2) = \overline{J}((0.101)_2) = (0.011)_2 = \frac{3}{8}
$$

$$
\overline{J}((0.110)_2) = (0.101)_2 = \frac{5}{8}, \qquad \overline{J}((0.111)_2) = (0.111)_2 = \frac{7}{8}
$$

Ako navedeno stavimo u preglednu tablicu tada za $w = 3$ imamo:

VRIJEDNOSTI FUNKCIJE $\overline{J}$	BROJ	FREKVENCIJA	UKUPNO
$\frac{7}{8}, \frac{5}{8}$	1	2	2
$\frac{3}{8}$	2	1	2
$\frac{1}{8}$	3	1	3

Legenda:
-oznaka BROJ je broj različitih vrijednosti iz domene funkcije $\overline{J}$ koje se preslikaju u istu vrijednost kodomene
-oznaka FREKVENCIJA je broj funkcijskih vrijednosti funkcije $\overline{J}$ koje imaju isti BROJ
-oznaka UKUPNO je produkt BROJ i FREKVENCIJA
Generalizirajmo problem. Ako uzmemo zapis binarnog broja koji iza binarne točke ima w nula i jedinica, tada uz poznavanje kombinatorike (varijacije s ponavljanjem) analiziramo na gornji način $2^w - 1$ binarnih racionalnih brojeva iz $\langle 0, 1\rangle$. U tom slučaju pregledna tablica izgleda:

VRIJEDNOSTI FUNKCIJE $\overline{J}$	BROJ	FREKVENCIJA	UKUPNO
$\frac{2^{w-1}+1}{2^w}, \frac{2^{w-1}+3}{2^w}, \dots, \frac{2^w-1}{2^w}$	1	2^{w-2}	2^{w-2}
$\frac{2^{w-2}+1}{2^w}, \frac{2^{w-2}+3}{2^w}, \dots, \frac{2^{w-1}-1}{2^w}$	2	2^{w-3}	$2 \cdot 2^{w-3}$
$\frac{2^{w-3}+1}{2^w}, \frac{2^{w-3}+3}{2^w}, \dots, \frac{2^{w-2}-1}{2^w}$	3	2^{w-4}	$3 \cdot 2^{w-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2^2+1}{2^w}, \frac{2^3-1}{2^w}$	$w-2$	2	$(w-2) \cdot 2$
$\frac{3}{2^w}$	$w-1$	1	$w-1$
$\frac{1}{2^w}$	w	1	w

Zbroj u stupcu UKUPNO iznosi:

$$\sum_{i=1}^{w-1} i \cdot 2^{w-i-1} + w = 2^w - 1.$$

2. Intresantno je vidjeti da li funkcija $\overline{J}$ ima fiksnu točku tj. binarni racionalni broj $r \in \langle 0, 1\rangle$ koji se sastoji od proizvoljnog broja elemenata nula i jedinica iza binarne točke. S obzirom na generalnu formulu (12) fiksna točka mora zadovoljavati slijedeće uvjete:
a) binarni broj se iza binarne točke sastoji od k nula
b) iza k nula nalazi se m jedinica
c) iza posljednje jedinice ne smije biti nula tj. $l = 0$
Ističemo, fiksna točka izgleda $0.\underbrace{0\cdots0}_{k}\underbrace{1\cdots1}_{m}$, gdje je k broj vodećih nula broja $r \in \langle 0, 1\rangle$. Pregledna tablica nekoliko početnih fiksnih točaka ovisno o broju k (vertikalno) i m (horizontalno) izgleda:

$k \diagdown m$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\dots$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\dots$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{31}{128}$	$\dots$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{31}{256}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

3. Kako za sliku funkcije $\overline{J}$ vrijedi $\mathcal{R}(\overline{J}) \subseteq \mathcal{S}$, kompozicija funkcije $\overline{J}$ sa sama sobom je moguća. Što više $\overline{J}$ je surjektivna funkcija. Ako uzmemo zapis binarnog proizvoljnog broja $r \in \langle 0, 1\rangle$ koji se sastoji od $w = k + m + l$ nula i jedinica, tada s obzirom na općeniti izraz (12) definiramo kompoziju funkcije

$$\overline{J}(r,l) = \frac{J(n)-1}{2^{w-l}} + \frac{1}{2^w}$$

na sljedeći način:

$$\overline{J}\circ\overline{J}(r,l) = \frac{J(J(n)-1)-1}{2^{w-l}} + \frac{3}{2^w}$$

$$\overline{J}\circ\overline{J}\circ\overline{J}(r,l) = \frac{J(J(J(n)-1)-1)-1}{2^{w-l}} + \frac{7}{2^w}$$

$$\overline{J}\circ\overline{J}\circ\overline{J}\circ\overline{J}(r,l) = \frac{J(J(J(J(n)-1)-1)-1)-1}{2^{w-l}} + \frac{15}{2^w}$$

i općenito za $n-$tu kompoziciju:

$$\underbrace{\overline{J}\circ\cdots\circ\overline{J}}_{n}(r,l) = \frac{\overbrace{J(\cdots J((J(n)-1)-1)\cdots)-1}_{n}}{2^{w-l}} + \frac{2^n-1}{2^w} \tag{13}$$

Ako sa ν označimo broj jedinica broja $r \in \langle 0, 1\rangle$ tada (13) ima smisla (jer $J(0)$ nije definiran) samo ako je $\nu \geq n$. U slučaju da je $\nu < n$ općenita n-ta kompozicija glasi

$$\underbrace{\overline{J}\circ\cdots\circ\overline{J}}_{n}(r,l) = \frac{2^\nu-1}{2^w} \tag{14}$$

Ističemo, fiksna točka izgleda $0.\underbrace{0\cdots0}_{\mu}\underbrace{1\cdots1}_{\nu}$, gdje je μ broj vodećih nula broja $r \in \langle 0, 1\rangle$. Pregledna tablica nekoliko početnih fiksnih točaka ovisno o broju

μ (vertikalno) i ν (horizontalno) izgleda:

$\mu\diagdown\nu$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\cdots$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\cdots$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{31}{128}$	$\cdots$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{31}{256}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

4. Pogledajmo ponašanje funkcije $\overline{J}$ oko 0 i 1. Zbog (10) vrijedi:

$$\overline{J}((0.\underbrace{0\cdots0}_{k}1)_2) = (0.1\underbrace{-1\cdots\quad-1}_{k})_2 = \frac{1}{2^{k+1}}$$

Zamislimo da imamo zapis binarnog broja $(0.\underbrace{0\cdots0}_{k}1)_2$ kada broj nula k teži u beskonačnost. U tom slučaju imamo

$$\lim_{k\to\infty}\overline{J}((0.\underbrace{0\cdots0}_{k}1)_2) = \lim_{k\to\infty}(0.1\underbrace{-1\cdots\quad-1}_{k})_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = 0$$

što je u suglasnosti sa (7) i (8).
Analogno, ako broj jedinica k teži u beskonačnost imamo

$$\lim_{k\to\infty}\overline{J}((0.\underbrace{1\cdots1}_{k})_2) = \lim_{k\to\infty}(0.\underbrace{1\cdots1}_{k})_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots = 1$$

što je također u suglasnosti sa (7) i (8).

Literatura

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley 1994. Second Edition.

[2] L. Halbeisen, N. Hungerbuhler, *The Josephus Problem*, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux 9 1997.

[3] Josephus F, *The jewish war, Book III*, Heineman(1927).

[4] `www.mathworld.wolfram.com/Josephusov problem`