PRENOSIMO IZ DRUGIH ČASOPISA

Povijest zlatnog reza prema Albert van der Schoot*†

Bruno Artman‡

Sažetak. *Zlatni rez (skraćeno od engleskog: GS) je omjer $f : d$ stranice f prema dijagonali d u pravilnom peterokutu*[1]. *Iz sličnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle CSB$ na* Slici 1 *lako dobivamo:*

$$d : f = f : (d - f) \Longrightarrow d(d - f) = f^2,$$

što ukazuje na omjer površina. Iz posljednje jednakosti za zadani d Euklid[2] *geometrijski dobiva duljinu stranice f (vidjeti* Sliku 2*). Modernijim pristupom, rješavanjem navedene kvadratne jednadžbe ($d^2 - df - f^2 = 0$), dobivamo pozitivno rješenje*

$$f = d\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034\, d.$$

U knjizi Elementi IV *Euklid koristi ovo rješenje za kostrukciju pravilnog peterokuta, a u knjizi* Elementi XIII*, gdje se raspravlja o pravilnim poliedrima, navodi niz svojstava GS, te pomoću njih konstruira pravilne dodekaedre i ikozaedre.*

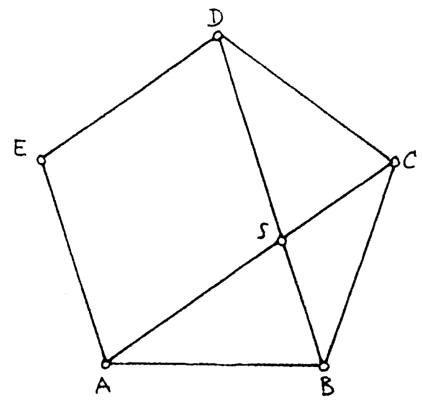
*Mitteilungen der Deutschen Mathematiker- Vereinigung **14**(2006), br. 2

†Albert van der Schoot, *Die Geschichte des Goldenen Schnitts. Aufstieg und Fall der Göttlichen Proportion. (Reihe Äesthetik, 3)*, Stuttgart, Frommann-Holzboog, 2005. 382 str.

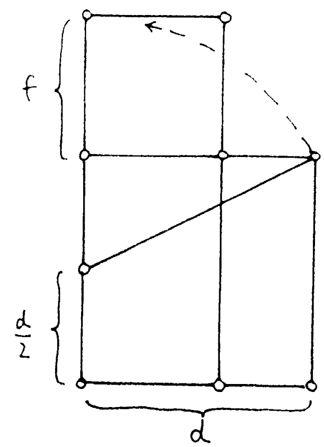
‡Mathematisches Institut, Bunsenstraße 3–5, 37 073 Götthingen

[1] Neki puta zlatni rez definira se kao omjer $d : f$.
Također, tzv. omjer zlatnog reza praktično je definirati preko dijeljenja dužine duljine D na veći a i manji dio b, tako da bude: $D : a = a : b$. Ako uzmemo u obzir da je $D = a + b$, onda prethodi omjer daje kvadratnu jednadžbu $a^2 - ab - b^2 = 0$ iz koje dobivamo $a = \frac{b}{2}(\sqrt{5} + 1)$. To znači da smo dužinu podijelili na dva dijela u omjeru tzv. zlatnog reza $a : b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1.618034$. Primjerice, to je omjer između dulje i kraće stranice standardnog papira za pisanje.

[2] Euklid, *Elementi II, 11.* Prekrasno, kako su ovdje formula za rješavanje i korijeni kvadratne jednadžbe komprimirani u jednoj slici. To zapravo ne znači da je Euklid prethodno algebarski riješio jednadžbu, ali možemo pretpostaviti da mu je peterokut poslužio kao motivacija.



Slika 1: Peterokut s dijagonalama



Slika 2: Prema Euklid, *Elementi II, 11*

Zlatni rez je i u povijesti umjetnosti toliko prisutan da mu je u poznatoj ediciji "Ästhetik" posvećen čitav jedan svezak. O tome opsežno piše Albert van der Schoot i objašnjava mnoge primjene u elementarnoj matematici, filozofiji, te posebno estetici i psihologiji XIX. stoljeća u kome je zlatni rez bio moderna tema. To se nastavlja još i danas, a može se naći u našim školskim knjigama.

U knjizi Alberta van der Schoota zlatni rez ponajprije se prikazuje u odnosu s proporcijama u umjetnosti, jer je prema predaji *"Pitagorino otkriće brojčanih odnosa između konsonantskih intervala i omjera racionalnih brojeva čak prva poznata estetska spoznaja koja je ikada formulirana"*.

O povijesti zlatnog reza i njegovom poimanju kao estetskom idealu raspravit ćemo u nastavku. Što se u antičkim izvorima može naći o zlatnom rezu? Je li on sastavni dio učenja o proporcijama u renesansi? Može li se zlatni rez, kao estetska norma u umjetnosti, izvesti iz prirode? Može li se estetska naklonost prema zlatnom rezu empirijski dokazati? — Razmotrit ćemo samo matematičke aspekte.

Vezano uz Euklida raspravlja se ponajprije o tome koliko, po raznim antičkim autorima, ljepota može biti općenito određena proporcijama, pogotovo zlatnim rezom. Nakon antike slijedi dugi period šutnje. Tek redovnik fra Luca Pacioli (1445 – 1517) piše o toj temi u svom entuzijastičkom rukopisu [5] *"Divina Proportione"* (1498., tiskano 1509.) Sadržaj ove knjige skoro je isključivo matematički izvadak Euklida, gdje se svako svojstvo zlatnog reza hvali. Primjerice:

> 5. Njegovo divno svojstvo: Zbroj kvadrata manjeg dijela i kvadrata cjeline jednak je trostrukom kvadratu većeg dijela. (Euklid *Elementi, XIII, 4*)

Pacioli ne spominje Fibonaccia.[3] Vjerojatno je Johannes Kepler (1571 – 1630) bio prvi koji je još 1608. godine eksplicitno iskazao povezanost Fibonaccijevog niza

[3] poznat i kao Leonardo od Pize (1175 – 1240) poznatog po tzv. nizu Fibonaccievih brojeva: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Više detalja o Fibonaccievim brojevima može se vidjeti primjerice u [1]

sa zlatnim rezom. Ovdje, kao i inače u knjizi, Schoot za spomenute matematičke odnose objašnjava opširnu povezanost s filozofijom i duhovno-povijesnom situacijom autora.

Po svim izvorima, do 1850. godine nema naznaka da je zlatni rez imao posebno značenje u umjetnosti. Tu se u međuvremenu pojavljuje Adolph Zeising (1810 – 1876). Godine 1854. izlazi njegova knjiga *"Nova znanost o proporcijama ljudskog tijela, razvijena na temelju do sada neotkrivenog morfološkog zakona koji prodire kroz cijelu prirodu i umjetnost ..."* Taj, do sada nepoznati temeljni zakon, je zlatni rez !!! Zeising dijeli i razvrstava mjere ljudskog tijela po zlatnom rezu. Prva točka cijele ljudske figure je pupak, pri čemu se gornji dio tijela prema donjem dijelu po njegovim podacima odnosi kao $\frac{381.9660113}{618.0339887}$, što odgovara veličini omjera zlatnog reza (0.618034). Podjela se do 8 puta iterira, primjerice do razmaka između usta i nosa, uvijek prema zlatnom rezu (vidi sliku kod Zeisinga, str. 157). Zeising u svojim razmatranjima jedino ima problema s veličinom stopala, koja su po njegovoj teoriji predugačka.

Zeising je zapravo (često necitirani) izvor mnogih povjesničara umjetnosti, koji misle da ukazivanjem na zlatni rez mogu dokazati estetsku kvalitetu neke građevine, neke slike ili skulpture. O mnogima autor diskutira u drugoj polovini knjige, uvijek s pažljivom analizom postavljanja ove teorije u određeni duh vremena. Odgovarajući sud o tome donosi 1902. godine talijanski filozof Benedetto Croce, koji princip zlatnog reza ubraja u *"astrologiju estetike"* (str. 232). Zlatni rez, kao ni astrologija, ne može se izvući iz svog područja.

Da paradoks bude veći, 1930. godine baš je od strane matematike došlo do novih pokušaja, kako bi se kriteriji ljepote formalizirali. Poznati matematičar George Birkhoff (1884 – 1944), koji se bavio diferencijalnim jednadžbama, 1933. godine objavljuje svoju knjigu *Aesthetic Measure*, u kojoj definira estetsku mjeru nekog umjetničkog djela kao omjer $M = \frac{O}{C}$, pri čemu O označava *Red*, a C *Kompleksnost*, kako god se to već mjeri. Temeljnu formulu još malo proširuje, kako bi se ocijenili ravninski mnogokuti, da bi se uopće nešto moglo dovesti u red. Kod ovog natjecanja za ljepotu između 90 primjera je kvadrat (str. 242–250 sa slikama najljepših i najružnijih mnogokuta na str. 246). Nakon diskusije o *"zlatnom pravokutniku"* (njegove stranice su omjeru zlatnog reza), koji se prema prethodno definiranim mjerama posebno ne ističe, Birkhoff postavlja retoričko pitanje:

> *Nije li onda točno da u zlatnom pravokutniku prebiva neka tajanstvena ljepota koja ga čini uzvišenijim od svih ostalih pravokutnih oblika?*

Van der Schoot to komentira ovako: "Granica između racionalnog i okultnog očigledno je vrlo malena" (str. 247). Birkhoffov stav među ostalima prihvatili su i psiholozi, pa se tako primjerice u Grimmovim bajkama broj karaktera po kriteriju "dobar : loš" odnosi u omjeru zlatnog reza (str. 276).

Početkom informatičkog doba 60-tih godina, filozof iz Stuttgarta Max Bense i njegov učenik Rul Gunzenhäuser ponovo su se počeli baviti temom izračunavanja estetske vrijednosti, pri čemu sada *Informacija* i *Redundancija* dolaze umjesto Birkhoffove *Kompleksnosti* i *Reda* (str. 249-263).

Kod svih tih mjerenja i izračunavanja stalno se uspoređuju pravokutnici, a pri tome već su Birkhoffovi mnogokuti dovoljno komplicirani primjeri. Ali što je to na običnom pravokutniku tako "lijepo" ne ispituje se (str. 299).

U posljednjem poglavlju svoje knjige Van der Schoot navodi kratki pregled od Pitagore do najnovijeg doba, pri čemu ističe specifične spoznajne interese osoba koje navodi. Tek romantičari XIX. stoljeća, prije svih – Zeising, u zlatnom rezu prepoznali su most između prirode, umjetnosti i psihologije. Koliko slabo je ovaj most održiv vjerojatno se nikada neće moći objasniti entuzijastima zlatnog reza.

Naravno, u knjizi o povijesti umjetnosti ne mogu se očekivati dubokoumna matematička razmišljanja. Ipak, za svakog matematičara koji se zanima za veze između umjetnosti i matematike, to je vrlo interesantna lektira.

Literatura

[1] XXX – Vezano uz matematičke aspekte dovoljna je neka jednostavnija uvodna knjiga o teoriji brojeva (vidi primjerice web stranicu knjižnicu Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku: `www.mathos.hr`)

[2] GHYKA, MATILA, *The Geometrie of Art and Life*, New York, 1977. (tipičan primjer knjige za GS-entuzijaste)

[3] HERZ-FISCHLER, ROGER, *A Mathematical History of the Golden Number*, New York, Dover, 1998

[4] DERS, *The Home of Golden Numberism*, Math. Intelligencer **27**(2005), 69-71 (biografski podaci o Zeisingu i daljnja uputa na literaturu)

[5] PACIOLI, LUCA, *Divina Proportione*, latinski tekst s njemačkim prijevodom, C. Winterberg (Hg.), Wien, 1889.