POVIJESNA RUBRIKA

Arthur Cayley

Kao i za sve drugo, tako i za matematičku teoriju vrijedi: ljepota se može spoznati, ali ne objasniti.

Franka Miriam Brückler*

Još jedan od velikih matematičara koji su radili kao pravnici bio je i Arthur Cayley. Osobito je pridonio razvoju moderne apstraktne algebre, ali i geometrije te teorije grafova.

Rođen je 16. kolovoza 1821. u Richmondu u Engleskoj, no prvih osam godina proveo je u St. Petersburgu u Rusiji. Nakon tog se obitelj vratila u Englesku. Već u školi je pokazao talent za matematiku. Otac je želio da nastavi obiteljsku trgovačku tradiciju, no Arthurov učitelj je preporučio da ga se potakne na studij matematike te se 1838. upisao na Trinity College u Cambridgeu, gdje je diplomirao 1842. Za vrijeme studija istakao se i u znanju jezika (njemački, francuski, talijanski i grčki). Već je tokom studija objavio tri matematička članka, a nakon diplome dobio je *Fellowship* na četiri godine i predavao je to vrijeme u Cambridgeu. U te je četiri godine objavio još 28 radova. No, nakon istjecanja *Fellowship*-a morao je naći profesiju te je odabrao pravo. Od 1849. do 1863. radio je kao odvjetnik. Specijalnost su mu bila pitanja prijenosa vlasništva. Iako je bio uspješan pravnik, uvijek je pravo smatrao samo sredstvom za zaradu novaca kako bi se mogao baviti matematikom. U tih 14 godina rada kao pravnik objavio je oko 250 matematičkih radova. Ukupno je tokom životu objavio 967 radova iz raznih područja matematike!

Komunicirao je sa sir William Rowan Hamiltonom (1805–1865) i James Joseph Sylvesterom (1814–1897). Hamilton je najpoznatiji po otkriću kvaterniona (poopćenje kompleksnih brojeva), a Sylvester po razvoju teorije matrica i otkriću diskriminanti za jednadžbe stupnja većeg od 2. S njima je godinama Cayley razmjenjivao matematičke ideje. Osobito je mnogo komunicirao sa Sylvesterom jer je i on bio pravnik te su često zajedno radili pri sudu i tokom radnog dana raspravljali o matematici.

Godine 1863. Cayley dobiva mjesto profesora matematike u Cambridgeu, što je za njega doduše značilo bitno smanjenje prihoda (kao i danas, pravnici su i tad bili bolje plaćeni od znanstvenika), ali je Cayley prihvatio mjesto sretan da ima mogućnost potpuno se posvetiti matematici. Ubrzo iza toga se oženio i imao je vrlo sretan brak. Pokazao je velik interes za pokret za sveučilišno obrazovanje žena. Godine 1881. pozvan je održati niz predavanja na *Johns Hopkins University* u Baltimoreu (SAD), gdje je Sylvester u međuvremenu postao profesor matematike. Tamo je proveo prvih pet mjeseci godine 1882. Po povratku je (1883) postao predsjednik *British Association for the Advancement of Science*. Njegov govor tom prigodom bio je popularni prikaz matematike za znanstveni krug, a ujedno vrijedan povijesni pregled različitih matematičkih teorija. Godine 1889. *Cambridge University Press*

*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: `bruckler@math.hr`

zamolio ga je da pripremi svoja sabrana djela. Cayley je umro za vrijeme uređivanja tih djela, 26. siječnja 1895. u Cambridgeu. Pogrebu su prisustvovali ne samo djelatnici Sveučilišta već i službeni predstavnici Rusije i SAD te neki od najznačajnijih britanskih filozofa.

U teoriji grafova, Cayley je pridonio njenom uspostavljanju kao samostalne matematičke discipline te razvoju njenih primjena na kemiju. Teorija grafova je matematičko područje koje se bavi grafovima, tj. objektima koji se mogu prikazati određenim brojem točaka (tzv. vrhovi) povezanih određenim brojem linija (tzv. bridovi). Pritom nije bitan izgled prikaza grafa, nego samo koji vrhovi su bridovima međusobno povezani. Tipičan primjer grafa su crteži kemijskih molekula. Tako npr. molekulu vode prikazujemo grafom

$$\mathrm{H} - \mathrm{O} - \mathrm{H}\,,$$

odnosno s tri vrha povezanih s dva brida, gdje dva vrha predstavljaju atome vodika, a jedan predstavlja atom kisika. Takvi prikazi ustalili su se upravo u Cayleyjevo doba, a on je u nizu članaka tokom 1870-ih i 1880-ih godina riješio neka od kemijskih pitanja svodivih na pitanja teorije grafova. Tako je npr. matematički dokazao da su molekule alkana $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$, npr.

$$\mathrm{CH}_4:\quad \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{H} & & \\ & & | & & \\ \mathrm{H} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{H}\,, \\ & & | & & \\ & & \mathrm{H} & & \end{array}$$

moguće samo za $m = 2n + 2$. Iz kemije je poznato da su u alkanima sve veze jednostruke i da nema ciklusa (zatvorenih prstenova unutar molekule). Time grafovi molekula alkana spadaju u vrstu grafova koje danas zovemo **stabla** i kojima se mnogo bavio Cayley. Stabla se pojavljuju u nizu praktičnih primjena, tako npr. pri ispisivanju rodoslovlja ili hijerarhije kompjutorskih direktorija. S obzirom da u alkanu imamo n četverovalentnih C-atoma tj. vrhova iz kojih izlaze po 4 brida, te m jednovalentnih H-atoma tj. vrhova iz kojih izlazi po jedan brid, ukupno imamo $\frac{4n+m}{2}$ bridova (dijelimo s 2 jer smo svaki brid prebrojali dvaput tj. brojali smo ga jednom u svakom od njegova dva kraja). S druge strane, ukupan broj atoma tj. vrhova u grafu alkana $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$ je $m + n$. Za sva stabla vrijedi da je broj bridova za 1 manji od broja vrhova, dakle mora vrijediti $\frac{4n+m}{2} = m + n - 1$ tj. $m = 2n + 2$.

U geometriji, Cayley je razvio (osobito analitičku) geometriju u n dimenzija. Cayleyjev rad na n-dimenzionalnoj geometriji primijenjen je na proučavanje kontinuuma prostor-vrijeme. Predložio je da se euklidska i neeuklidske geometrije[1] promatraju kao posebni tipovi geometrija. Vezano za to, jedan je od onih koji anticipiraju modernija fizikalna otkrića:

> *No pretpostavimo da je fizikalni prostor našeg iskustva samo aproksimativno euklidski prostor, koje bi tome bile posljedice?*

[1] U neeuklidskim geometrijama kroz točku izvan pravca ili ne postoji paralela s pravcem (tzv. eliptičke geometrije), ili ih ima više od jedne (tzv. hiperboličke geometrije). Otkrivene su u prvoj polovini 19. stoljeća, a primjenu su našle u modernoj fizici i astronomiji.

(iz govora pri imenovanju za predsjednika *British Association for the Advancement of Science*)

Po Arthuru Cayleyju danas mnogo matematičkih pojmova nosi ime, osobito u algebri. Neki od najpoznatijih su:

Cayleyjev teorem koji kaže da je svaka konačna grupa izomorfna nekoj grupi permutacija. Pojednostavljeno rečeno, konačna grupa je neki konačan skup na kojem je definirana neka operacija (npr. skup $\{1, 2, \ldots, 12\}$ (sati na običnom satu) uz „zbrajanje na satu" u kojem je $1+2 = 3$, ali i $5+10 = 3$ tj. 10 sati iza 5 je 3 sata). Ta operacija mora imati svojstvo zatvorenosti (rezultat ostaje u skupu), asocijativnosti (ne trebamo zagrade ako samo ponavljamo tu operaciju), ima neutralni element (onaj s kojim operacija ne mijenja druge elemente, npr. u gornjem primjeru to je 12 jer kad se kazaljka pomakne za 12 sati na satu dođe u istu poziciju u kojoj je i bila) i svaki element ima inverzni (onaj s kojim operacija daje neutralni element, npr. inverz od 10 sati je 2 jer je $10 + 2 = 12$). Posebne grupe su grupe permutacija: njihovi elementi su (ne nužno sve) permutacije nekog skupa, a kao operacija uzima se komponiranje permutacija. Izomorfnost dviju grupa znači da se one razlikuju samo po karakteru i/ili imenima elemenata i operacija, ali da kad bismo im pravila za operaciju ispisali u „tablicu zbrajanja", te bi tablice podjednako izgledale. Npr. grupa $\{0, 1\}$ s operacijom binarnog zbrajanja ima tablicu

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Ako imamo grupu s elementima $\triangle$ i $\odot$ s operacijom $\heartsuit$ tako da je

$\heartsuit$	$\triangle$	$\odot$
$\triangle$	$\triangle$	$\odot$
$\odot$	$\odot$	$\triangle$

usporedbom gornjih dviju tablica vidimo da se one razlikuju samo po oznakama, ali ne i po smislu, dakle su grupe koje one predstavljaju izomorfne. Tablice poput gornjih danas zovemo **Cayleyjeve tablice**. Cayley ih je uveo 1854. Tada je uspostavio opću teoriju grupa (prije toga su jedine poznate grupe bile grupe permutacija). Tada je uočio da npr. i matrice[2] s obzirom na zbrajanje čine grupu.

Upravo je Cayleyjev rad na matricama imao osobito velike posljedice za matematiku i njene primjene: poslužio je kao temelj kvantne mehanike, koju je razvio W. Heisenberg 1925. Cayley je prvi uveo množenje matrica. Dokazao je **Cayley-Hamiltonov** teorem[3] za matrice s dva reda i dva stupca (kvadratne matrice[4] reda 2) i za one s tri reda i tri stupca (kvadratne matrice reda 3). Taj teorem kaže da svaka kvadratna matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu. Karakteristična jednadžba matrice je jednadžba

$$\det(A - xI) = 0$$

[2]Matrica je pravokutna tablica brojeva, npr. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[3]Za kvadratne matrice reda 4 dokazao ga je W. R. Hamilton, a za općenite kvadratne matrice F. G. Frobenius 1896.

[4]Kvadratna matrica je matrica koja ima jednak broj redaka i stupaca.

gdje „det” označava determinantu matrice[5], I je jedinična matrica s istim brojem redaka i stupaca kao A (oblika $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$), a x je nepoznanica (broj). Npr. za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je $A - xI = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ =(broj s matricom množimo tako da sve njene elemente pomnožimo tim brojem)= $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ =(matrice oduzimamo po pozicijama)= $\begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix}$ pa je

$$\det(A - xI) = (2 - x) \cdot (-x) - 1 \cdot (-1) = x^2 - 2x + 1$$

tj. karakteristična jednadžba od A je

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Cayley-Hamiltonov teorem kaže da A možemo uvrstiti na mjesto x-a u nju te da ako slobodni član shvatimo kao slobodni član puta jedinična matrica, dobit ćemo istinitu matričnu jednakost:

$$A^2 - 2A + 1 \cdot I = 0$$

(desno je $0 =$ nul-matrica odgovarajuće veličine $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$). Zadatak za one koji znaju množiti matrice: provjerite da je za gornju matricu A, matrica $A^2 - 2A + I$ zaista jednaka nul-matrici. Možete pokušati pokazati i Cayley-Hamiltonov teorem za matrice reda 2: ponovite gornji postupak s matricom $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$!

Literatura

[1] MacTutor History of Mathematics, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley.html`

[2] Wikipedia, `http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley`

[3] ERIC W. WEISSTEIN, ARTHUR CAYLEY, u: *MathWorld — A Wolfram Web Resource*. `http://scienceworld.wolfram.com/biography/Cayley.html`

[4] D. VELJAN, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[5] Determinanta kvadratne matrice je njoj po određenim pravilima pridružen broj. Za kvadratnu matricu reda 2 njena determinanta računa se po pravilu $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$.