Prolegomena 9 (1) 2010: 97–121

Benacerraf o matematičkom znanju

VLADIMIR DREKALOVIĆ
Univerzitet Crne Gore, Filozofski fakultet, Danila Bojovića 3, 81 402 Nikšić, Crna Gora
v.drekalovic@yahoo.com

PREGLEDNI ČLANAK / PRIMLJENO: 15–12–08 PRIHVAĆENO: 06–03–09

SAŽETAK: Uzročna teorija znanja iskorištena je od strane nekih teoretičara koji su se, baveći se filozofijom matematike, dotakli teme matematičkog znanja. Neki od njih govore o nužnosti uzročnog uvjeta za opravdanje, čime se stvaraju uvjeti za obnavljanje starog sukoba empiristâ i racionalistâ. Uzročna teorija je, isticanjem uvjeta uzročnosti kao nužnog za opravdanost, dala poticaj suvremenim empiristima da krenu čak i na do tada nedodirljive spoznajne temelje matematike. Međutim, u kom smislu možemo govoriti o opravdanosti kao uzročnosti kad je riječ o matematičkom znanju? Da li uzročnošću-čulnošću možemo opravdati matematički iskaz 2+2=4? Je li nam za znanje tog iskaza neophodna čulnost, vizualna predodžba jabuka ili klikera koje zbrajamo na našim prvim satovima matematike u školi? Stoje li stvari isto i s iskazom da se kroz bilo koje dvije točke može povući točno jedan pravac, ili da je zbroj kutova bilo kojeg trokuta kut čija je mjera jednaka zbroju mjera dvaju pravih kutova? Iako je u ovom radu, uglavnom, dan pregled stavova autora koji pokušavaju govoriti o primjeni uzročne teorije u shvaćanju matematičkog znanja, ideja koja se podržava u njemu jest da je znanje, iskazano matematičkim tvrđenjem, dobiveno i preneseno dokazom. Dokaz, sam po sebi, jamac je istine. On nas uvjerava u točnost matematičkih tvrdnji. Dokazujući spoznajemo. Najveći dio onoga što znamo (tvrdimo) zasnovano je dokazom na prethodnim znanjima (tvrđenjima). Zbog prethodnog možemo reći da je znanje u matematici po svojoj prirodi drugačije od znanja u empirijskim znanostima, to jest da ne iziskuje uzročnu vezu koja se smatra nužnim uvjetom za znanje u tim znanostima.

KLJUČNE RIJEČI: Benacerraf, dokaz, matematika, uzročnost, znanje.

1. Benacerrafov problem

Paul Benacerraf je 1973. godine objavio tekst "Mathematical truth". U njemu, između ostalog, razmatra jedan filozofski problem u matematici, kasnije prozvan "Benacerrafova dilema", a koji se odnosi na mogućnost stjecanja znanja u matematici. Ukratko rečeno, ta "dilema je sukob između platonizma, ontologije apstraktnih objekata, zahtijevane za matematičku istinu, i empirizma, shvaćanja da je opažanje osnova znanja o objektima”.[1]

U četvrtom dijelu teksta “Mathematical truth” Benacerraf se bavi određenjem pojma znanja. On traži odgovore na takva pitanja kao što su: kada za nekoga možemo reći da posjeduje znanje o nečemu? Što znači reći da osoba zna da je crni objekt koji drži u ruci gljiva tartuf? Ono što bismo mogli nazvati znanjem, kaže autor, podrazumijeva, prije svega, “određeno stanje” (možda psihološko) onoga koji spoznaje. Pored toga što je za Benacerrafa bitnije, neophodno je postojanje određene *uzročne veze* između onoga tko spoznaje i onoga što se spoznaje. Riječima autora, takav objekt “mora imati odgovarajuću ulogu u uzročnom objašnjenju […] vjerovanja da je crni objekt koji [ta osoba] […] drži gljiva tartuf”.[2] Međutim, Benacerraf ne objašnjava što znači “odgovarajuća uloga”.

Najjednostavniji slučaj postojanja uzročne veze neke činjenice *p* s nečijim vjerovanjem u *p* jest opažanje.[3] Činjenica koju opažamo je, po pravilu i u uobičajenim okolnostima, uzrok našeg vjerovanja u nju. Sjećanje je, kao i opažanje, vrsta uzročnog procesa. Osoba *S* sjeća se činjenice *p* u vremenu *t*. To vjerovanje uzrokovano je vjerovanjem iz nekog prošlog vremena. Zaključivanje se može naći u ulozi dijela uzročnog niza. Na primjer, neki čovjek zasniva svoje vjerovanje u jedan iskaz na vjerovanju u skup drugih iskaza. Tako njegovo vjerovanje u posljednji iskaz može biti promatrano kao posljedica uzrokovana njegovim prethodnim vjerovanjima. Zaključivanje može biti dio uzročnog lanca. Ono može biti kraj lanca zasnovanog na opažanju i sjećanju. Ni glavni predstavnik uzročne teorije, Goldman, nije jasan kada govori o tome može li zaključivanje biti promatrano kao samostalan uzročni proces.[4]

Vratimo se Benacerrafu. U općem slučaju, smatra on, osoba *X* zna činjenicu *p* ako *X* posjeduje vjerovanje da *p*, pri čemu je to vjerovanje uzrokovano i određeno činjenicom da *p*. Ako je izostala takva veza između *X* i činjenice da *p*, čak i ako *X* ima točno vjerovanje, onda o znanju ne možemo

[1] Hart (1996: 4).

[2] Benacerraf (1973: 23).

[3] Goldman (1967: 357).

[4] Pitanje je da li zaključivanje kao dio uzročnog lanca može biti promatrano samostalno kao uzročni proces. Drugim riječima, da li subjektovo vjerovanje da *q*, ako on iz *q* zaključuje *p*, uzrokuje njegovo vjerovanje da *p*? Na ovo pitanje neću pokušati dati konačan odgovor. Sklon sam reći da zaključivanje *jest* uzročni proces, to jest da kada je netko *zasnovao* svoje vjerovanje u jedan iskaz na svom vjerovanju u neki skup iskaza, onda njegovo vjerovanje u taj skup iskaza može biti promatrano kao uzrok njegovog vjerovanja u prvi iskaz. Ali ja ne želim zasnovati svoju teoriju na ovoj tvrdnji. Sve što tvrdim jest da ako je lanac zaključivanja “dodan” uzročnom lancu, onda je čitav lanac uzročni proces (Goldman 1967: 362).

govoriti. Zašto je taj uvjet bitan? Pretpostavimo da je *p* zaista točno, da *X* vjeruje da je *p*, ali da vjerovanje *X*-a u *p* nije zasnovano "odgovarajućim" svjedočanstvom, svjedočanstvom koje je vezano za *p*. U takvom slučaju, smatra Benacerraf, ne možemo govoriti o znanju. Očigledno, na njegovo shvaćanje znanja snažno je utjecala Goldmanova uzročna teorija.

Na ovom bi mjestu trebalo podsjetiti na klasičnu definiciju znanja. Po toj definiciji znanje je opravdano istinito vjerovanje. Drugim riječima, istinitost *p*, vjerovanje da je *p* istinito i opravdanje za to vjerovanje jesu pojedinačno nužni, a zajedno su dovoljan uvjet za znanje. Benacerraf u svom tekstu ne spominje ni klasičnu definiciju niti pokušaj da se ona dovede u pitanje. Međutim, uspoređujući Benacerrafovu definiciju s klasičnom, primjećuje se da je uvjet opravdanosti, u stvari, zamijenjen uvjetom uzročnosti. Benacerraf ne spominje pojam opravdanosti, ali je jasno da on nastoji preciznije odrediti uvjet opravdanosti iz klasične definicije. Bolje rečeno, to je njegova interpretacija opravdanosti. On uzročnost ne shvaća kao jedan od više različitih načina opravdanja, već je to za njega jedini način opravdanja ako želimo govoriti o vjerovanju kao znanju. Uzročnost nije ni dopuna, pokušaj pojačanja klasične definicije dodatnim uvjetom. Za Benacerrafa je to zamjena za opravdanost. To jest pokušaj pojačanja definicije, ali ne dodatnim uvjetom, nego zamjenom uvjeta. Međutim, je li novi uvjet ispunio očekivanje? Da li uzročnost uvijek jamči opravdanje za vjerovanje? Da li su mogući slučajevi u kojima je uzročni uvjet ispunjen, vjerovanje istinito, a da ne možemo reći da je i opravdano, pa onda ne možemo reći ni da je riječ o znanju? Uzmimo jedan primjer. Pretpostavimo da se oko nas nalazi sistem ogledala kojeg nismo svjesni (ne znamo da se radi o ogledalima), a koji pred nas "dovodi" sliku objekta koji se zaista nalazi ispred nas, ali koji zbog ogledala direktno ne vidimo. U ovom slučaju imamo istinito vjerovanje da je objekt ispred nas. Odgovarajući uzročni lanac postoji, ali teško možemo govoriti o znanju.

Zahtjev za "odgovarajućim" svjedočanstvom i za uzročnom vezom onoga tko spoznaje s "odgovarajućim" izvorom znanja posebnu težinu dobiva kad je u pitanju matematika, s obzirom na prirodu objekata kojima se ona bavi. Ta priroda, kako Benacerraf kaže, prijeti da "će biti nemoguće objasniti kako bilo tko zna bilo koju točnu tvrdnju teorije brojeva".[5] Zašto bi to bilo nemoguće? Benacerrafa brine priroda matematičkih objekata koja nije ista kao priroda objekata neke empirijske znanosti, uslijed čega je nejasan zahtjev za uzročnim odnosom između tih objekata i onoga tko ih spoznaje. Više nemamo ispred sebe atome, stanice, biljke, životinje, ljude, atmosferska pražnjenja, nebeska tijela. Čini se da nemamo objekte

[5] Benacerraf (1973: 24).

i događanja koje možemo opažati čulima, kao što biolog promatra borbu jelena za opstanak, ili kao što kemičar promatra reakciju lakmus papira na kiselinu. Od pomoći nam nije ni upotreba nekih pomagala, kao što je teleskop za astronoma, ili mikroskop za liječnika. Ispred sebe imamo objekte kao što su skupovi, preslikavanja, brojke, figure hiperboličke geometrije, algebarske strukture. Kakva je priroda tih objekata? Gdje se oni nalaze? Kako da sad u odnosu na te objekte za koje nismo ni sigurni da ih možemo opažati govorimo o uzročnom odnosu između njih i onoga tko ih spoznaje? Kako govoriti o znanju za koje je, po Benacerrafu, neophodna uzročnost? Takva pitanja su razlozi njegove brige.

Jedan način shvaćanja Benacerrafove uzročnosti predlaže Philip Kitcher u svojoj knjizi *The Nature of Mathematical Knowledge*. Prvo, mi stječemo mnoga znanja od naših učitelja. Njihov autoritet igra bitnu ulogu. Drugo, neka od tih znanja stečena su uz pomoć opažanja. Naše rano učenje pospješeno je korištenjem pomagala kao što su štapovi ili kuglice. Kasnije koristimo dijagrame. Treće, matematika ima dugu povijest. Izvori matematičkog znanja leže u praktičnim aktivnostima naših predaka, Egipćana, Babilonaca ili ljudi koji su vremenski još dalje od nas. Kasniji razvoj matematike je sve manje posla imao s takvim praktičnim aktivnostima i rijetki su momenti kada matematičari ponovo pokazuju zanimanje za fizičke osobine svakodnevnih stvari. Matematika svakog doba uvjetovana je ranijim dostignućima. Diofantovi rezultati bili su inspiracija za Fermata, a njegov za Gaussa i Kroneckera. Euklid i Descartes su postavili osnove koje su koristili Newton i Leibniz, a njihove metode iskoristili su i proširili Euler, Lagrange, Cauchy i Weierstrass.[6]

Kitcher prihvaća da je veoma ograničen opseg matematičkog znanja koji može biti stečen promatranjem i kombiniranjem običnih stvari. Međutim, to je za njega bitna osnova na kojoj niču moćne teorije suvremene matematike. Baveći se praktičnim problemima i metodama Babilonaca, Grci su razvili teorije kojima su sistematizirana ranije dobivena rješenja. Njihovo znanje zasnovano je na empirijskom znanju njihovih prethodnika. S druge strane, to znanje služilo je kao osnova znanja njihovih sljedbenika. U svakom dobu znanje pojedinaca stvara se preko znanja učitelja koji prenose ono što je matematička zajednica do tada postigla. Takvo znanje rezultat je dugog niza matematičkih epizoda, pri čemu prvu čine najjednostavnija opažanja. Ovakvu ideju mogli bismo nazvati *evolutivnom teorijom* matematičkog znanja.

> Vjerovanje matematičara u neki aksiom elementarne aritmetike vjerojatno je stvoreno zahvaljujući velikom broju različitih uzročnih procesa: prisje-

[6] Kitcher (1984: 92).

> ćanjem o pročitanim tekstovima i o odslušanim predavanjima, opažajnim uočavanjem da aksiom važi za početni segment niza matematičkih simbola i, možda, zahvaljujući nekim daljim procesima […] Mi možemo steći sigurno matematičko vjerovanje isključivim korištenjem pamćenja i opažanja: ovo se događa svaki put kada je naše znanje matematičkih istina zasnovano na iskustvu čitanja knjiga ili slušanja predavanja (ili na pamćenju takvog iskustva).[7]

Kitcherova ideja je sljedeća. Izvor matematičkog znanja naših dalekih predaka bilo je isključivo opažanje, slično situaciji u kojoj se nalazi i svatko od nas u djetinjstvu. To znanje, proširujući ga dalje, prenose na nove generacije matematičari.

Benacerraf razlikuje dva shvaćanja matematičke istine i matematičkog znanja: prvo zove "standardnim", a drugo "kombinatornim" shvaćanjem. On smatra da je Gödel predstavnik prvog shvaćanja po kojem, da bismo govorili o znanju, *mora postojati veza između matematičara i objekata o kojima on govori*, slično vezi koja postoji između fizičara i njegovih objekata. A kakva je ta veza u fizici? Fizičar daje iskaze o objektima koje opaža neposredno ili nekim pomagalima, o objektima koji se nalaze ispred njega, koji, čini se, postoje. On govori o načinu na koji se Sunčeva svjetlost odbija ili prelama u odnosu na površinu morske vode. Govori o uvjetima prostiranja zvučnih valova koje proizvodi avion u letu. Govori o silama koje djeluju na ljudsko tijelo koje se okreće na vrtuljku. Dolaženje do zakona fizike potaknuto je takvim primjerima. Ti zakoni su općenitiji iskazi koji se odnose na šire klase događaja, kao što su odbijanje i prelamanje svjetlosti u odnosu na neku površinu, prostiranje zvučnih i svjetlosnih valova, kružno kretanje. Njihovu istinitost najčešće možemo potvrditi i čulima u bilo kojem pojedinačnom događaju koji pripada klasi na koju se zakon odnosi. A kakva je veza između matematičara i objekata kojima se on bavi? Da bismo odgovorili na to pitanje moramo više znati o prirodi tih objekata i o mjestu na kojem se nalaze, ako se ono uopće može odrediti. Priroda tih objekata, svakako, nije ista kao priroda objekata fizike i oni su mnogo "udaljeniji" od naših čula nego objekti fizike. Gödel u svom tekstu "What is Cantor's continuum problem?" kaže da mi, bez obzira na udaljenost objekata matematike (teorije skupova) od čula, imamo neku vrstu opažanja (intuiciju)[8] o tim objektima. On ne misli da manje povjerenja treba imati u intuiciju nego u opažanje, pa zbog toga znanje matematike nije ništa manje pouzdano od znanja fizike:

[7] Kitcher (1984: 93–94).

[8] Mogli bismo reći da je intuicija neposredno uviđanje, duhovno gledanje, neposredno stečeno znanje do kog se nije došlo putem iskustva ili razmišljanja, "otkrivanje koje se razvija iz čovjekove duše" (Goethe).

> S druge strane, objekti […] teorije skupova […] očigledno ne pripadaju fizičkom svijetu, štoviše, njihove posredne veze s fizikalnim iskustvom vrlo su slabe.
>
> Ali, iako su objekti teorije skupova daleki od čulnog iskustva, možemo reći da imamo neko opažanje tih objekata, budući da nam se *aksiomi nameću kao istiniti*. Ne vidim zašto bismo takvu vrstu opažanja, *matematičku intuiciju*, smatrali nesigurnijom od čulnog opažanja koje nas navodi da gradimo fizikalne teorije […] Paradoksi teorije skupova teško da su neugodniji za matematiku nego što su čulne obmane za fiziku. [9]

Takvu usporedbu Benacerraf smatra površnom. Za njega je analogija s čulnim opažanjem bez mnogo smisla, sve dok ne bude jasno *kako* nam se to "aksiomi nameću kao istiniti". Nije jasno, kaže Benacerraf, kakva je veza između matematičara i objekata koje on spoznaje, pa nije jasno ni možemo li govoriti o znanju. Koje spoznajne moći, koja čula koristimo kad govorimo o točnosti aksioma? Kako stječemo to znanje? U fizici imamo zadovoljen uvjet postojanja uzročne veze. Krećemo od čula i prihvaćamo kao znanje jedino takva vjerovanja koja su zasnovana na našim čulnim moćima.[10] Osim intuitivne "jasnoće", Gödel govori i o još jednom načinu njihove "provjere". To je "provjera" tvrdnji koje izvodimo iz tih aksioma i za koje se čini da ih je moguće "opažati" izravnije nego aksiome (imati jasniju intuiciju o njima). Na primjer, "provjerljive" posljedice aksioma više beskonačnosti su iskazi teorije brojeva koji su provjerljivi izračunavanjem za dan cijeli broj. Ali, Benacerraf smatra da smo naišli na novi problem. Kako znamo iskaze aritmetike koji su nam neophodni za to izračunavanje?

Što je po Benacerrafu pozitivno u shvaćanju koje zove "standardnim"? Gödel smatra da su objekti matematičkog znanja daleko od čulnog iskustva. S druge strane, Benacerraf je kao uvjet bilo kojeg znanja postavio postojanje uzročne veze između čovjeka koji spoznaje i objekata znanja. Prihvatimo li oba stanovišta, matematičko znanje nije moguće s obzirom na ne-čulnu prirodu objekata matematike. Benacerraf cijeni Gödelovo nastojanje da se taj "jaz" između matematičara i njegovih objekata premosti, međutim, on se ne slaže s Gödelom jer ovaj pretpostavlja postojanje posebne sposobnosti, intuicije, uz pomoć koje imamo "vezu" s tim objektima.[11]

Gödelovo shvaćanje matematičkih objekata, kao stvari koje su daleko od čula i koje spoznajemo uz pomoć posebne moći, ima veliku sličnost s Platonovim učenjem o idejama. Ideje su za Platona "čiste forme"

---

[9] Gödel (1947/64: 483–484).
[10] Benacerraf (1973: 26).
[11] Benacerraf (1973: 26).

koje postoje i nalaze se daleko od čulnog svijeta. One su prauzor, pralik svega što se pojavljuje pred našim čulima. Sve što postoji u promjenljivoj stvarnosti samo je sjena ideja. Ideje ne možemo spoznati čulima, već pomoću njih nešto znamo tek o sjenama ideja. U istom smo položaju kao i čovjek koji čitav život provodi u pećini, okrenut leđima prema izlazu, i u mogućnosti je da vidi tek sjene likova koji su van pećine, a na koje pada svjetlost. Te sjene, kao kopije ideja, mi imamo pred čulima. Platon *znanje* definira kao *vjerovanje koje je točno i opravdano.* Ako je tako, možemo li onda govoriti o znanju o idejama? Ako možemo, kako da se takvo vjerovanje opravda? Platon, kao i Gödel, govori o posebnoj moći uz pomoć koje stječemo znanje o objektima koji su daleko od čula. Tu sposobnost on ne zove "intuicija", nego "anamneza".[12] Po Platonu, duša je besmrtna i prije dolaska u čovječje tijelo ona je promatrala svijet ideja. Ona sve zna, ali dolaskom na zemlju mnogo toga i zaboravlja (*Fedon*, 249c). Promatranjem pojedinih stvari, duša odmah zapaža sličnost s onim što je prije gledala i tako se dobiva sjećanje kao oblik znanja. Sjećati se ne znači ništa drugo nego dobiti (iznijeti) znanje iz samog sebe. Kod Gödela imamo intuiciju, a kod Platona sjećanje. Platonovim riječima:

> Pošto je, dakle, duša besmrtna i pošto se više puta ponovo rađala i budući da je promatrala sve stvari i na zemlji i u podzemnom svijetu, onda ona nema ništa što nije naučila. Prema tome, nije nikakvo čudo što ona o vrlini i ostalim stvarima ima sjećanja na ono što je ranije znala. Pošto je cijela priroda homogena i pošto je duša sve naučila, onda ne postoji ništa što bi nekoga moglo spriječiti da, ako se podsjeti samo na jedno, što se kod ljudi zove učenjem, sve ostalo pronađe sam …[13]

Kako to "prisjećanje" duše izgleda na primjeru, Platon je pokazao u dijalogu *Menon* (82, 85b). Sokrat razgovara s robom svoga prijatelja o geometrijskom problemu: kako odrediti kvadrat čija je površina jednaka osam kvadratnih jedinica mjere? Pri tom je dan kvadrat koji je jedinica mjere. On ga pitanjima navodi da se "sjeti" kako napraviti kvadrate površine četiri, devet i šesnaest kvadratnih jedinica, a zatim kako od ovog posljednjeg dijagonalnom podjelom njegovih četvrtina dobiti traženi kvadrat. Zašto je Platon za Sokratovog sugovornika izabrao baš roba? Upravo da bi njegovom ulogom što jače podržao svoju teoriju o sjećanju. Rob je čovjek bez obrazovanja i ovozemaljskog predznanja iz područja geometrije. Zato svako znanje koje pokaže ne može imati drugi izvor osim sjećanja.

Pored "standardnog" shvaćanja matematičke istine, Benacerraf govori i o "kombinatornom" shvaćanju. Za nosioce ovog shvaćanja *ne po-*

---

[12] Benacerraf (1973: 26).
[13] Platon, *Menon*, 81d.

stoji imperativ o postojanju veze između matematičara i objekata o kojima on govori, poput imperativa o postojanju takve veze između istraživača koji se bave nekim prirodnim znanostima i njegovih objekata. Za zagovornike "kombinatornog" shvaćanja, priroda matematičkih objekata nije bitna za matematičko znanje. Beznačajna su pitanja tipa: da li ti objekti postoje? Ako da, gdje se nalaze? Kakva je naša veza s njima? Kako spoznajemo bilo što o njima? Po "kombinatornom" shvaćanju, znanje, iskazano matematičkom tvrdnjom, dobiveno je i preneseno dokazom, bez obzira na to što su, u stvari, objekti matematičkog znanja. Dokaz, sam po sebi, jamac je istine. On nas uvjerava u točnost matematičkih tvrdnji. Dokazujući, spoznajemo. Sve što znamo (tvrdimo) zasnovano je dokazom na prethodnim znanjima (tvrdnjama). Po ovom shvaćanju, sam dokaz je jamac istine, te nas posebno ne trebaju brinuti ideje o apstraktnoj prirodi matematičkih objekata. Eventualno, ni takav njihov status neće poremetiti spoznajni projekt stjecanja matematičkog znanja. Sva matematička "realnost" opisana je i shvaćena zahvaljujući dokazu.

Odmah u oči upada jasna primjedba koja se može uputiti "kombinatornom" shvaćanju. Naime, put "unazad", na kojem se svaki iskaz oslanja na prethodne, nije beskonačan. Nakon konačno mnogo koraka na kraju (početku) čekaju nas aksiomi, iskazi koje matematičari smatraju istinitim, bez potrebe da ta istinitost bude potkrijepljena dokazom. Ali kako onda, uzimajući u obzir "kombinatorno" shvaćanje da je znanje dobiveno dokazom, znamo da su aksiomi točni? Za ovo shvaćanje nije interesantna Gödelova intuicija ili potraga za nekom drugom vezom između aksioma i objekata o kojima oni govore. Upravo to brine Benacerrafa. On smatra nedostatkom takvog shvaćanja što "izbjegava ono što mi se čini neophodnim za prikaz istine", a to je put preko objekata o kojima govore "iskazi čija je istina definirana".[14] "Kombinatornom" shvaćanju, nastavlja on, nedostaje ne samo veza između početnih iskaza matematičke teorije i stvari na koje se ti iskazi odnose, već i želja da se ta veza nađe. Gödel je takvu želju pokazao koristeći pojam intuicije.

Postoji više načina da se zasnuje neki skup aksioma. Recimo, aksiomi mogu biti uvedeni dogovorom,[15] bez posebnog obrazloženja njihovog izbora. Benacerraf ne vidi razloge za bilo kakav dogovor koji nema opravdanje. On u dogovoru ne vidi garanciju istine. Postupak postuliranja i postavljanja hipoteza bez veze s objektima o kojima one govore za Benacerrafa je nedovršen posao. "Mathematical truth" privodi kraju tražeći podršku za svoj stav u Russellovim riječima:

[14] Benacerraf (1973: 29).
[15] Quine (1936).

> Metoda "postuliranja" onoga što želimo ima mnoge prednosti; one su iste kao prednosti krađe nad poštenim radom,[16]

ili Benacerrafovim riječima:

> … postuliranje konvencijom i slični postupci ne mogu dovesti do istine. Oni nisu samo moralno već isto tako i praktično manjkavi.[17]

O kakvoj to krađi i nemoralu govore Russell i Benacerraf kad je riječ o izboru aksioma? Problem je u njihovom izboru. Koliko je taj izbor proizvoljan bez obzira na to što oni mogu zadovoljavati uobičajene zahtjeve?[18] Zašto je izabran baš taj skup, a ne neki drugi? Koji aksiomi su istiniti? Čime je ta istinitost opravdana? Kakav je to pošteni rad? Benacerraf traži opravdanje matematičkog znanja polazeći od svog određenja znanja, znanja uopće. Ali kakvog smisla ima govoriti o "uzročnoj vezi" između onoga tko spoznaje i objekata koji se spoznaju kad je riječ o matematičkom znanju?

Moglo bi se reći da u osnovi razlikovanja "standardnog i "kombinatornog" shvaćanja leži razlikovanje dvije vrste istine – "predmetne" i "koherencijske". U prvom slučaju *podrazumijevamo* postojanje odgovarajućih objekata ili stanja stvari s kojima subjekt koji spoznaje ostvaruje neku vrstu veze i na osnovi kojih formira odgovarajuća vjerovanja ili iskaze. Govoriti o nekoj vrsti dostupnosti matematičkih objekata, na primjer, o "uzročnom" djelovanju tih objekata na ljudski um, ima smisla samo ako prihvatimo takvu vrstu istine. Druga vrsta istine leži u osnovi "kombinatornog" shvaćanja. Neophodno je da svi iskazi čine koherentan sistem bez proturječnih tvrdnji, ili tvrdnji koje bi u bilo kojem smislu bile nesuglasne. Koherentnost i suglasnost, po ovom shvaćanju, znače istinitost. Status koherentnosti matematičkih teorija osiguran je jednim od triju standardnih uvjeta koji se uvijek zahtijevaju od bilo kojeg skupa aksioma, kao i samom prirodom svake matematičke teorije (struktura deduktivno izvedena).

2. Teorija uzročnosti i matematika

Postoje uzročne teorije koje se odnose i na matematičko znanje, i veoma su slične Benacerrafovoj. Mark Steiner u svojoj knjizi *Mathematical*

---

[16] Russell (1919: 71).

[17] Benacerraf (1973: 30).

[18] Konzistentnost, neovisnost i kompletnost su standardni zahtjevi. Za skup aksioma kažemo da je konzistentan ako se iz njega ne mogu izvesti dva proturječna tvrđenja. Neovisnost aksioma znači nemogućnost da se bilo koji aksiom izvede iz preostalih. Kompletnost skupa aksioma znači da se svako tvrđenje unutar teorije mora moći dokazati ili pobiti.

Knowledge[19] govori, ne o uzročnoj teoriji znanja, već o uzročnoj teoriji *opažanja*. On smatra da možemo reći da "Ja vidim intuitivno da S", gdje "S" stoji umjesto aritmetičke istine. "Ja vidim da si ljut" opisuje opažajnu činjenicu do koje smo došli uz pomoć vida. To je primjer vjerovanja do kojeg smo došli bez bilo kakve pomoći zaključivanja ili dokaza.[20] Subjekt ne može *vidjeti* F (F je matematička ili bilo koja druga činjenica), osim ako F ne sudjeluje kao dio događaja koji kod subjekta uzrokuje neko opažajno iskustvo.[21] Ipak, kada god damo neki komentar sličan prethodnom, a koji se tiče znanja uopće, vrijedno je zapitati se o tome kako stvari stoje s matematikom. Kako matematički objekti uzrokuju naše opažaje? Može li i tu, kao i u fizičkom svijetu, biti primjera halucinacija i iluzija? Pogledajmo sljedeći primjer.

Pretpostavimo da X gleda na sat koji se nalazi na polici. Što je neophodno da bi se moglo reći da X vidi sat na polici? Naravno, na polici mora biti sat koji je u X-ovom vidnom polju, ali to nije dovoljno. Razlog je što je neki znanstvenik mogao kod X-a izazvati specijalne stimulanse kojima bi on stekao dojam (identičan čulnom) kao da je sat na polici, iako njega tamo, recimo, nema. Čak i ako bi sat bio na polici, o znanju ne možemo govoriti.[22]

Prethodni primjer podsjeća na značaj uzročne veze za znanje. Bitno je da je predmet znanja u uzročnoj vezi s opažajnim stanjem subjekta. To što je sat u opažajnom prostoru subjekta nije dovoljno za znanje jer se subjekt može nalaziti u nekom halucinatornom stanju. Stanja "točnih halucinacija" ili iluzija ne prihvaćamo kao osnovu znanja. Čak i ako opažajno stanje odgovara stanju stvari, njime ne "vidimo" činjenicu sve dok stanje stvari ne postane "uzročno relevantno" za čulni dojam.[23] Razlika između stvarnog opažanja i stanja iluzije je prilično jasna u slučaju opažanja fizičkih objekata. Može li se na sličan način govoriti i kad je riječ o matematičkom znanju? Može li se govoriti o razlikovanju "točne halucinacije" i "opažanja" i u slučaju intuicije o apstraktnim objektima? Imamo li samo "točnu halucinaciju", jer matematičari i ne polažu mnogo na opažanje? Descartes nam u svojoj Prvoj meditaciji kaže da možemo biti sigurni u matematičke istine čak i dok spavamo, ali, kako? Da li mi o svrsi i načinu funkcioniranja intuicije imamo išta drugo osim analogije s opažanjem fizičkog svijeta? Kako to da imamo bilo kakve spoznaje o ovoj "realnosti" izvanmentalnih, nekonkretnih objekata koje ne opažamo? Steiner smatra

[19] Steiner (1975).

[20] Steiner obezvrjeđuje značaj dokaza kao sredstva kojim se dolazi do matematičkog znanja, o čemu će niže biti riječi.

[21] Steiner (1975: 117–118).

[22] Grice (1961: 438–439).

[23] Steiner (1975:120).

da je neophodno napraviti "provjeru" korektnosti funkcioniranja intuicije. U primjeru sa satom koji je na polici, on dozvoljava da imamo znanje i kao rezultat umjetne stimulacije, ali samo ako ćemo "vidjeti" sat kada je na polici, a da u suprotnom nemamo takav dojam. Da li umjetna stimulacija funkcionira kao pouzdan "posrednik" lako je utvrditi jednostavnim eksperimentom – ukloniti s police sat, i vidjeti imamo li i dalje dojam da je on tamo. Isti eksperiment Steiner predlaže i za intuiciju. Time bismo mogli razlikovati pravu intuiciju matematičkih objekata od praznog umišljanja koje nije uzrokovano nikakvim matematičkim objektom. Ako subjekt nije u stanju da razlikuje ta dva stanja, on ne može imati ni znanje.[24] Nije sasvim jasno kako bi eksperiment trebao izgledati u slučaju provjere intuicije, o čemu ni Steiner ne pruža dodatnu pomoć. Lako je naslutiti da bi sat predstavljao matematičke objekte, ali nije jasno tko bi trebao predstavljati znanstvenika i umjetni stimulator.

U vezi s predloženim "provjeravanjem" postoji još jedno interesantno pitanje. Je li proceduru, ako je ona uopće izvodiva, potrebno provoditi za svaku pojedinačnu istinu? Benacerraf smatra da je matematika učenje o "strukturama", prije nego o pojedinačnim matematičkim objektima.[25] To znači da, onda, možemo govoriti o intuiciji struktura prije nego o intuiciji istina ili pojedinačnih objekata. Drugim riječima, govorimo o intuiciji teorije skupova, geometrijskoj intuiciji, topološkoj intuiciji, itd., to jest, radi se o posebnim intuicijama.[26]

> Na primjer, netko zamišlja ili gleda materijalne oblike, i onda ne ostaje više na njihovom konkretno-prostornom mnoštvu. On skuplja mišljenjem objekte u mnoštvo i onda ima intuiciju o njihovoj strukturi. Ovo je način na koji bi čovjek mogao postati upoznat sa standardnim modelom ZF teorije skupova – s apstrahiranjem od točaka na tabli poredanih na određeni način. Tako se stiže do intuicije o strukturi ZF skupova.[27]

Rezultat apstrakcije neće biti promatran kao intuicija pojedinačnih skupova koji čine ZF sistem. To je intuicija njihove strukture. Posjedovanje intuicije o ovoj strukturi nije isto što i zamišljanje točaka na tabli. Ta intuicija može početi zamišljanjem točaka u nizu, ali se ne završava tako. Mentalno stanje nastalo apstrakcijom od geometrijskih osobina niza točaka kvalitetno je drugačije od jednostavnog zamišljanja.

Značajne komentare u vezi s Benacerrafovim tekstom "Mathematical truth" dala je i Penelope Maddy u svojoj knjizi *Realism in Mathematics*. Za nju je posebno interesantna definicija znanja koju daje Benacerraf, a o

---

[24] Steiner (1975:133).
[25] Benacerraf (1965).
[26] Steiner (1975:134).
[27] Steiner (1975:134–135).

kojoj je iznad bilo riječi. Maddy takvu definiciju znanja primjenjuje dosljedno i u matematici. Realist poput nje smatra da ono što čini "2+2=4" točnim jest priroda apstraktnih objekata 2 i 4 i operacije plus. Međutim,

> … da bih znala da je "2+2= 4", ti objekti moraju igrati odgovarajuću uzročnu ulogu u stvaranju mog vjerovanja. Ali kako mogu objekti koji čak i ne nastanjuju fizički univerzum sudjelovati u bilo kakvom uzročnom odnosu? Sigurno je da biti apstraktan podrazumijeva i biti uzročno nedostupan. Tako, ako je platonizam točan, ne možemo imati nikakvo matematičko znanje. Pretpostavljajući da imamo takvo znanje, platonizam mora biti pogrešan.[28]

Ovim je iznesena bit Benacerrafove dileme. Ako je za znanje neophodna uzročnost, onda imamo sljedeći izbor. Prva mogućnost: prihvatiti mogućnost znanja u matematici. U tom slučaju, matematički objekti nisu apstrakcije, nego objekti dostupni čulima. Druga mogućnost: prihvatiti apstraktnu prirodu matematičkih objekata. U tom slučaju, ne možemo ih spoznati, jer kako nešto znati o apstraktnom, pita Maddy.

Pretpostavimo, ipak, da ono što matematičari stvaraju stoljećima jest znanje. U čemu je onda problem? Je li on u određenju prirode matematičkih objekata, ili u definiciji znanja? Može li biti da priroda matematičkih objekata nije apstraktna? Možemo li vidjeti, dodirnuti ili okusiti brojeve, preslikavanja, skupove ili algebarske strukture? Naravno, ne. A je li znanje baš ono što definira Benacerraf? Je li uvjet uzročnosti neophodan za znanje? Ovo pitanje otvara drugo. Da li sve što spoznajemo dolazi od čula? Ako da, onda uvjet uzročnosti u Benacerrafovoj definiciji ima smisla. Dakle, Benacerrafova dilema nastaje ako prihvatimo i Benacerrafovu definiciju znanja.

Edmund Gettier je tekstom "Is justified true belief knowledge?"[29] pokušao pokazati da tradicionalna definicija znanja nije odgovarajuća. Predložio je dva primjera u kojima je trebalo da budu zadovoljeni uvjeti iz tradicionalne definicije, ali u kojima se, intuitivno, nije radilo o znanju. On je u napad na Platonovo određenje znanja krenuo tumačeći na svoj način pojam opravdanosti. On od čitaoca traži da, kao premisu, prihvati mogućnost opravdanog vjerovanja u iskaz koji, u stvari, nije točan. Iako se, čini se, mogu naći primjeri opravdanih neistinitih vjerovanja, zapitajmo se ima li smisla neko vjerovanje smatrati opravdanim, iako ono nije točno? Pogledajmo, za trenutak, pojmove koji se pojavljuju u Platonovoj definiciji znanja. To su vjerovanje, opravdanost, istina i znanje. Je li je Platon u svojoj definiciji znanja ispoštovao pravilo za koje očekujemo da zadovoljava svaka definicija, a to je da su pojmovi kojima se definira novi

[28] Maddy (1990: 37).
[29] Gettier (1963).

pojam već definirani i jasniji od novog pojma? Jesu li pojmovi opravdanosti i istine jasniji od pojma znanja? Ovu neraščišćenu situaciju koristi Gettier. Moguće je imati opravdano vjerovanje u iskaz koji nije točan, kaže on. Ali, zar nije baš "slaganje s onim što jest" krajnje mjerilo opravdanosti nekog vjerovanja? Ili, možda, to "slaganje" nije ni nužan uvjet? Da li opravdanje može biti i rezultat rada naših čula uz eventualnu upotrebu nekih pomagala? Radi odgovora razdvojimo znanosti koje zovemo empirijskim od onih koje to nisu.

Kod prvih je uloga čula i informacija koje one donose presudna u stjecanju vjerovanja. Na primjer, astronom promatrajući nebeska tijela stječe vjerovanja o njihovom međusobnom položaju, kao i o nekim drugim događajima u svemiru. Psihijatar promatra postupke svog pacijenta, izraze lica, analizira iskaze i na osnovi toga izgrađuje vjerovanje o njegovom karakteru. *Stjecanje takvih vjerovanja je opravdano, uzimajući u obzir metode, uvjete, posebnosti i mogućnosti tih znanosti. Međutim, jasno je da takva vjerovanja nisu obavezno i istinita.* Na primjer, zbog nesavršenosti čula, ili nesavršenosti pomagala koja posreduju između čula i predmeta istraživanja, ili zbog toga što su neka vjerovanja stečena tek s određenom vjerovatnoćom, itd.

Kako stvari stoje u matematici? Kako matematičar stječe vjerovanje i kad je ono za njega opravdano? Može li njegovo vjerovanje biti opravdano i istovremeno neistinito? *Opravdanje za vjerovanje u matematičke iskaze* (skoro sve[30]) *jest dokaz*. Opravdanje u matematici jest dokaz. Ono ne jamči tek približnu, vjerojatnu istinu kao što je uloga opravdanja u nekim empirijskim znanostima. Ono je dovoljan razlog za istinu. Zašto dovoljan? Da li matematičar testira istinitost svojih tvrdnji uspoređujući ih s "onim što jest"? Ne. Njegov odlazak u svijet stvarnosti, ako je uopće moguć,[31] više je ilustracija njegovih iskaza ili njihova potvrda. Nikako dokaz istinitosti. U istinitost svojih iskaza matematičar postaje siguran jer ih izvodi na valjan[32] način, iz iskaza u čiju istinitost već vjeruje.[33] Može li se onda dogoditi da matematičar ima opravdano istinito vjerovanje koje nije znanje? Ne, jer je svako znanje matematičara stečeno upravo opravdano – dokazom koji je dovoljan uvjet istinitosti. Znanje u matematici nije stečeno razlozima koji su približno istiniti ili sasvim slučajno dovode do istine kao u Gettierovim primjerima. Dakle, Gettierovi kontraprimjeri su

[30] Osim aksioma.

[31] Kako da iskaze geometrije Lobačevskog potvrdimo u svijetu koji prepoznaju naša čula?

[32] Za izvođenje možemo reći da je valjano ako jamči da će iz istinitih premisa biti dobiven istiniti zaključak.

[33] Izuzetak su aksiomi.

neprimjenljivi i besmisleni u matematici. Samo pitanje “je li opravdano istinito vjerovanje znanje?” je bez osnova kad je riječ o matematici. Njoj upravo odgovara Platonova definicija znanja kao istinitog i opravdanog vjerovanja. Budimo još precizniji. Budući da opravdanje u matematici podrazumijeva dokaz, i budući da je istinitost za matematičara zasnovana dokazom, dovoljno je reći da je matematičko znanje ono vjerovanje koje je opravdano dokazom.

Maddy se bavi Gettierovim primjerima na početku drugog poglavlja *Realizma.*[34] Za nju se oni čine bitnim kad je riječ o znanju uopće. Ona ne pravi jasnu ogradu da se primjeri možda ne odnose na matematiku, nego samo na neke empirijske znanosti kod kojih ima smisla govoriti o uzročnosti kad se govori o znanju. Doduše, ona na početku fusnote 18 na strani 41 kaže da se:

> … uzročni uvjet ne zahtijeva za matematičko znanje, jer ne postoji matematički Gettierov slučaj, to jest matematički slučaj u kojem subjekt ima opravdano točno vjerovanje, a nema znanje.

Zbog ovoga bismo mogli pomisliti da je Maddy odustala od Benacerrafove definicije znanja, po kojoj se uzročnost traži kao uvjet bilo kojeg znanja. Međutim, u nastavku spomenute fusnote, pobrinula se da ne bude jasna:

> Ali takvi slučajevi mogu se pojaviti, ako ne za sve […] platoniste, a ono barem za realista teorije skupova.

Benacerrafov tekst “Mathematical truth” objavljen je deset godina nakon Gettierovog teksta. Ali, Benacerraf govoreći o matematičkom znanju ne spominje Gettiera, niti primjere njegovog tipa. To je znak koliko ih je Benacerraf smatrao bitnim za matematiku. Uzročna veza o kojoj on govori u slučaju matematičkog znanja trebala bi podrazumijevati relaciju između vjerovanja u matematičku istinu i činjenica-objekata koje to vjerovanje čine istinitim, kombiniranje opažanja, pamćenja, uočavanje niza događaja koji je konstruiran valjanim zaključivanjem. Govoriti o tome ima smisla tek ako smo matematički realisti, to jest, ukoliko tvrdimo da matematičke činjenice postoje.

3. Dokaz – postupak matematičkog opravdanja

Ako matematičara pitamo gdje možemo naći matematičke objekte ili kako ih možemo opaziti, odgovor vjerojatno nećemo dobiti. Za njegov rad je sasvim nebitno imaju li matematički objekti mjesto u prostoru, boju ili mi-

[34] Maddy (1990: 37).

ris ili ne. Pitati gdje se brojevi nalaze za njega nema smisla ništa više nego pitati o tome kakav miris ima neka Beethovenova simfonija. Matematika je, smatra on, već rekla svojim iskazima sve što se o tim objektima moglo reći. Ona nam govori o beskonačnim skupovima beskonačnih objekata (na primjer, skup nizova u beskonačnodimenzionalnom prostoru), o savršeno ravnim i neograničenim crtama, o objektima bez dijelova (točkama). Teško da u našoj opažajnoj okolini možemo naći tako brojne i savršene stvari. To je jedan od bitnih razloga zbog kojih mnogi filozofi smatraju da nam matematički objekti nisu uzročno dostupni i da su izvan prostora i vremena. Takav se stav čini prihvatljivim, ali on je potaknuo druga pitanja. Kako išta možemo znati o tim čulno udaljenim stvarima? Platon je predložio teoriju o sjećanju duše. Frege smatra da su matematički objekti razumu dani direktno, tako da on nema nikakve prepreke do njih.[35] Gödelovo mišljenje je da, bez obzira na njihovu udaljenost od čulnog iskustva, imamo nešto poput opažanja teorije skupova, što se vidi iz činjenice da nas aksiomi "tjeraju" da vjerujemo u njihovu točnost. Ipak, ni Fregeovo ni Gödelovo gledište nam mnogo ne pomažu u objašnjenju kako do znanja o takvim objektima dolazimo. Ona prije potvrđuju apstraktnost, čulnu udaljenost i neovisnost tih objekata.

Benacerraf u "Mathematical truth" pretpostavlja postojanje matematičkih iskaza koje možemo znati direktno, ne zahvaljujući zaključivanju iz drugih iskaza. Kandidati za te iskaze bili bi prije svih aksiomi. Postoje autori koji smatraju da nije sasvim jasno da ijedan matematički iskaz, pa i aksiom, može biti znan bez zaključivanja.[36] Po tom gledištu, aksiomi su prihvaćeni ne direktno, nekom vrstom opažanja ili slično, već na taj način što se iz njih mogu izvesti rezultati za koje se i bez njih pretpostavljalo da važe. Da li, na primjer, u komutativni zakon za zbrajanje prirodnih brojeva vjerujemo bez ikakvog zaključivanja, neposredno? Čini se, bez obzira na njegovu očiglednost, da ne. Možda u njega vjerujemo na osnovi primjera kao što je 3+5=5+3, ili možda na osnovi definiranog pojma zbrajanja?[37] O čemu god da se radi, nije riječ ni o kakvom neposrednom vjerovanju, već vjerovanju koje je izvedeno iz nekog ranijeg vjerovanja.

Jednostavno odbacivanje Benacerrafove teorije matematičkog znanja ne oslobađa nas pitanja o tome kako to znanje nastaje, to jest, kakva je priroda veze između nas i matematičkih objekata. Možemo li govoriti o posebnoj vrsti znanja, *prima facie* matematičkom znanju? Ako da, onda govorimo o posebnoj epistemološkoj teoriji.

---

[35] Frege (1950: paragraf 105).

[36] Resnik (1997: 84).

[37] Peanovi aksiomi.

Benacerrafova ideja susreće se s dodatnim problemom. I Newton i Einstein bavili su se istim "objektom" – gravitacijom – bez obzira na razlike u njihovim teorijama. I suvremeni i raniji biolozi bave se i bavili su se istim biljkama i životinjama, bez obzira na razlike u njihovim teorijama. U ovim slučajevima, čini se, možemo sa sigurnošću reći da postoji uzročna veza između vjerovanja i njihovih predmeta. Postoji "stalnost" objekata na koje se vjerovanja odnose. Kako stvari stoje u matematici? Da li su objekti kojima se bavi jedan matematičar isti kao i oni kojima se bavi drugi? Da li matematičari koristeći iste nazive misle na iste objekte? Moglo bi se reći "skoro" da. Preciznije, da na iste, do izomorfizma. Oni poistovjećuju sve različite, ali strukturno identične modele. Tako se realni brojevi mogu promatrati kao Dedekindovi presjeci ili kao beskonačni nizovi racionalnih brojeva. Frege, von Neumann i Zermelo definiraju prirodne brojeve kao različite skupove, itd. Takvi slučajevi stvaraju filozofski, ali ne i matematički problem. Zermelo je broj 2 definirao kao $\{\{\{\}\}\}$, dok ga je von Neumann definirao kao $\{\{\},\{\{\}\}\}$. Von Neumannov i Zermelov skup su različiti skupovi, pa broj 2 ne može biti identičan s oba skupa.[38] Kako da odlučimo s kojim je identičan? Zar to ne bi trebalo biti odlučivo na osnovi "stanja stvari"? Zar ne bi trebalo biti da je ili broj 2 jednak sa Zermelovim dva ili ne? Ne postoje matematički iskazi koji daju odgovor na to pitanje. Poistovjećivanje broja dva s bilo kojim od tih skupova ili ni s jednim ne dovodi u sukob nijednu matematičku tvrdnju.[39] Ipak, ako ne možemo odlučiti ni to da li su prirodni brojevi Zermelovi, ni to da li su von Neumannovi skupovi, možemo li zaključiti da ne znamo ni to da li su skupovi uopće? Možemo li iz istih razloga sumnjati u to da su realni brojevi nizovi, beskonačni zbrojevi ili skupovi racionalnih brojeva, zatim da su funkcije skupovi uređenih parova, itd. Ako nismo sigurni što su brojevi, ima li smisla da vjerujemo da brojevi postoje, na ma kakav se način to postojanje izražavalo? Za odgovor na ovo pitanje zgodno nam može poslužiti jedan Quineov primjer.[40] Neka osoba je realist u vezi sa stolovima i molekulama. Neki konkretan stol identičan je s nekim mnoštvom molekula, od beskonačno mnogo mnoštava koje molekule mogu činiti. Je li to mnoštvo ovo ili ono, za to ta osoba nema evidenciju, ni fizičku ni bilo koju drugu. Međutim, to nije razlog da on ne vjeruje u postojanje stola koji, svakako, čini neko mnoštvo molekula. Oslanjajući se na ovakve razloge, mogli bismo reći da ni naša nesigurnost u vezi s tim što su brojevi, zaista, ne osporava naše vjerovanje da oni na neki način postoje.

[38] Benacerraf (1965).
[39] Resnik (1997: 91).
[40] Quine (1981: 34).

Posvetimo se sada ulozi dokaza u matematici. Kakva je njegova uloga u stjecanju matematičkog znanja? Je li to opravdanje za vjerovanje u matematičke iskaze? Ako da, je li to i jedini način opravdanja? Možemo li i u matematici dozvoliti opravdana vjerovanja u neistinite iskaze? Ako ne, znači li to da je dokaz u matematici znak ne samo opravdanja nego i istinitosti? Može li se dogoditi da netko zna neki matematički iskaz, ali da ne samo da ne zna dokaz tog iskaza nego da ne zna čak ni je li taj iskaz dokaziv? Krenimo od posljednjeg pitanja. Za nekoga tko zna dokaz nekog iskaza možemo reći da zna i sam iskaz. Ponekad se događa da netko zaboravi dokaz koji je ranije znao, ali se još uvijek sjeća da je dokaz izvediv i čak da ga je i sam znao. Uz malu pomoć možda bi se i prisjetio tog dokaza. Možda bismo i tada mogli govoriti o znanju iskaza. Međutim, pretpostavimo da netko ne zna ni dokaz, niti to postoji li dokaz za neki iskaz. Bismo li tada, u bilo kom smislu, mogli govoriti o znanju iskaza?

Posljednje pitanje izgleda kao retoričko, ali nije baš tako. Naime, postoje autori, poput Steinera, koji, na primjer, u *Mathematical Knowledge* pokušava pokazati da uloga dokaza u spoznaji matematičkih istina i nije toliko bitna i da netko može znati neku matematičku istinu iako ne zna niti dokaz, niti čak zna da li dokaz, uopće, postoji![41] U konkretnom primjeru, radi se o Bernoullijevom problemu kojim se u osamnaestom stoljeću bavio Euler i po kojem je

$1+1/4+1/9+1/16+ \dots = \pi^2/6$. (kvadrirani simbol u brojniku označava Ludolfov broj, tj., 3,141592 …)

Budući da se radi o ideji koja se ne sreće često u literaturi, poklonimo joj malo pozornosti.

Eulerovi razlozi izgledaju ovako. Ako jednadžba stupnja 2n ima oblik

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0$$

i 2n različitih nula

$$r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots, r_n, -r_n$$

onda je

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n}$$

ekvivalentno s

$$b_0(1- x^2/r_1^2)\,(1-x^2/r_2^2) \dots (1-x^2/r_n^2)$$

a odavde dobivamo da je

$$b_1=b_0(1/ r_1^2 + 1/ r_2^2+ \dots +1/ r_n^2). \quad (1)$$

[41] Dokaz na ovom mjestu podrazumijeva niz iskaza, pri čemu je svaki izveden iz prethodnih nužno, valjanim pravilom zaključivanja.

S druge strane, koristeći razvoj funkcije sin(x) iz jednadžbe sin(x) = 0 dobivamo

$$x/1-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\ldots=0.$$

Promatrajmo posljednji zapis kao jednadžbu "beskonačnog stupnja", čime činimo jednu vrstu induktivnog koraka.[42] Njeni korijeni su nule funkcije sin(x), to jest,

$$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \ldots$$

Dijeleći posljednju jednadžbu s x i ne uzimajući broj 0 kao rješenje dobivamo jednadžbu

$$1-x^2/3!+x^4/5!-x^6/7!+\ldots=0$$

čiji su korijeni

$$\pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \ldots$$

Po analogiji s (1) dobivamo

$$\begin{aligned}\sin(x)/x &= 1-x^2/3!+x^4/5!-x^6/7!+\ldots\\ &= (1-x^2/\pi^2)(1-x^2/4\pi^2)(1-x^2/9\pi^2)\ldots\end{aligned}$$

i da je

$$1/3! = 1/\pi^2+1/4\pi^2+1/9\pi^2+\ldots$$

tako da konačno dobivamo

$$1+1/4+1/9+1/16+\ldots=\pi^2/6.$$ [43]

Pravi dokaz ove jednadžbe dao je tek kasnije Leibniz. Kako je Euler došao do vjerovanja u posljednju jednadžbu? Vjerojatno je približno računao vrijednost lijeve strane posljednje jednakosti na veliki broj decimalnih mjesta. Zatim je znao na osnovi iskustva da konstanta π vjerojatno ima veze s takvim sadržajem.

> Konačno, nije postojala vrijednost koja je u istu svrhu mogla biti bolje iskorištena, dok je $\pi^2/6$ bila jednostavna i *estetski* prihvatljiva. Imajući sve okolnosti u vidu znanje jednakosti je bilo *skoro* sigurno, i *skoro* opravdano.[44] (kurziv V. D.)

Citirani dio izlazi van granica ozbiljnog teksta s komentarom o jednostavnosti i ljepoti, no nastavimo se baviti spomenutim primjerom. Po Steinerovom mišljenju, težina Eulerovih argumenata bila je takva da nitko

---

[42] Nemamo u vidu postupak matematičke indukcije koji je, u stvari, vrsta deduktivnog zaključivanja, već indukciju sličnu onoj koja se primjenjuje u prirodnim znanostima.

[43] Polya (1954).

[44] Steiner (1975: 105).

razuman nije mogao pobiti činjenicu da je $\pi^2/6$ jednako spomenutom zbroju. Ne možemo reći da je Euler dokazao spomenutu jednakost. On je koristio analogiju između “konačne” i “beskonačne” jednadžbe, što je, u stvari, samo naslućivanje, nagađanje o postojanju analogije. Međutim, u velikom broju slučajeva u različitim područjima matematike ta se analogija ne može postaviti. On je koristio postupak koji je sličan induktivnom postupku koji se koristi u prirodnoj znanosti. Po Steinerovom mišljenju Euler je imao znanje o jednakosti, ali nije imao znanje o dokazu, niti je čak znao da će dokaz te jednakosti ikada biti učinjen. Sa sličnim razlozima želeći umanjiti značaj dokaza za matematičko znanje, Steiner spominje indijskog matematičara Srinivasa Ramanujana.[45] Smatra da je on najočitiji primjer nekoga tko je imao matematičko znanje bez dokaza. Bila mu je strana zapadna strogost u razmišljanju, ali je imao mogućnost da nasluti najkompliciranije formule teorije eliptičkih funkcija od kojih su mnoge kasnije bile dokazane.

> … moje vjerovanje je da je Ramanujan imao mogućnost opažanja matematičkih struktura.[46]

Međutim, matematika takva naslućivanja ne može prihvatiti kao valjan način zaključivanja. Prema tome, ne može prihvatiti ni to da se radi o znanju. Takva vjerovanja mogu samo biti poticaj za razmišljanje o stvarnom dokazu činjenice koja se naslućuje. Steinerovo razmišljanje u vezi s posljednjim primjerom ukazuje nam na jedno bitno pitanje. On, naime, opravdava neka matematička vjerovanja na sličan način kao što bi opravdanim smatrao vjerovanja koja nikakve veze nemaju s matematikom. U vezi s tim, slijedi još jedno bitno pitanje. Možemo li, onda, i u matematici dozvoliti opravdana neistinita vjerovanja nošeni inercijom koja odgovara svim empiristima? Zaista, pokušajmo zamisliti kako bi izgledalo opravdano neistinito matematičko vjerovanje.

4. Psihologistički prigovor dokazu u vezi s opravdanjem

Postoje značajni prigovori koji se upućuju dokazu kao sredstvu kojim se stječe matematičko znanje. Oni imaju empirističku pozadinu i reakcija su na uvjerenje da je čitavo matematičko znanje apriorne prirode. Kant apriornost opisuje ovako:

[45] Srinivasa Ramanujan (1887–1920) bio je indijski matematičar koji je skoro bez ikakvog formalnog obrazovanja u vezi s čistom matematikom dao bitan doprinos u okviru matematičke analize, teorije brojeva i još nekih matematičkih područja.

[46] Steiner (1975: 136).

> … pod apriornim znanjem ćemo podrazumijevati, ne znanje koje je nezavisno od ovog ili onog iskustva, već znanje apsolutno nezavisno od bilo kakvog iskustva.[47]

Što shvaćamo pod iskustvom i što je to nezavisno od svakog iskustva? Iskustvo shvaćamo kao cjelinu svih dojmova koji nastaju kao rezultat podražaja koja naša čula primaju u ovom svijetu. Pri tom empiristi govore o vanjskom iskustvu vezano za podražaje čiji je izvor izvan našeg tijela, kao i o unutrašnjem iskustvu koje je rezultat unutrašnjih stimulacija.

Je li dokaz postupak kojim dolazimo do apriornog znanja? Slobodnije govoreći, dokaz unutar nekog formalnog sistema možemo shvatiti kao niz rečenica u jeziku tog sistema takav da je svaki član niza ili aksioma sistema ili rečenica koja je dobivena iz prethodnih članova niza u skladu s nekim pravilom izvođenja. Kada bismo mogli reći da neki matematički iskaz,[48] poštujući Kantovo određenje, znamo apriorno? Ako imamo skup A elementarnih apriornih iskaza (aksioma), skup R pravila izvođenja koja tu apriornost "čuvaju" i dokaz čija je svaka rečenica ili element skupa, ili je dobivena iz prethodnih rečenica suglasno nekom elementu skupa R.

Psihologizam, kao vrsta empirizma, osporava mogućnost da matematičke iskaze, kako elementarne tako i izvedene, možemo znati apriorno. Nas posebno interesira osporavanje izvedenih iskaza, jer se time pokušava obesnažiti uloga dokaza. Argumentacija je sljedeća. Shvaćanje nekog dokaza odgovara nekom psihološkom procesu subjekta. Dokaz ispisan na papiru tek je svima nama vidljiva materijalizacija tog procesa. Iskazi od kojih dokaz kreće moraju biti elementarni apriorni iskazi, aksiomi. Dokaz se nastavlja korištenjem pravila izvođenja koja bi trebala "čuvati" apriornost, to jest, ako su premise apriorni iskazi, takav je i zaključak. Koristeći rječnik psihologista, i pravilo izvođenja se može promatrati kao psihološki proces. Taj proces bi se sastojao u prijelazu s vjerovanja u iskaze-premise na odgovarajuće vjerovanje-zaključak, bez posredovanja bilo kakvih drugih vjerovanja u tom prijelazu. Shvatiti dokaz nekog iskaza značilo bi iskusiti proces kojim se dolazi do apriornog znanja o tom iskazu, prolazeći i imajući u vidu sve procese od apriornog znanja aksioma, preko svih procesa koji nastaju kao posljedice primjene pravila izvođenja.[49]

Kitcher se u *The Nature of Mathematical Knowledge* pita je li činjenica da neki teoremi imaju izuzetno duge dokaze suglasna s pretpostavkom da ti teoremi mogu biti znani *a priori*. Zašto bi dužina dokaza bila bitna stvar na ovom mjestu? Ključna stvar na koju neki autori žele uka-

---

[47] Kant (1965: 32–22).

[48] Koji nije aksiom.

[49] Kitcher (1984: 38).

zati, preispitujući značaj dokaza, jest sigurnost, nesumnjivost koju subjekt osjeća u odnosu na rezultat dokaza.

> Ne postoji algebraičar niti matematičar tako stručan u svome području koji je sasvim uvjeren u bilo koju istinu neposredno nakon što ju je otkrio […] On se stalno vraća dokazu, njegova uvjerenost se povećava; još više s podrškom njegovih prijatelja […] i s općom suglasnošću i odobravanjem učenog svijeta.[50]

Međutim, Hume nije usamljen u takvim razmišljanjima.[51]

> Da li prirodnjak koji se ni na jedan način nije bavio slonovima izuzev koristeći mikroskop može misliti da dovoljno poznaje te životinje? Nešto analogno postoji i u matematici. Logičar, takoreći, dijeli svaki dokaz u veoma veliki broj elementarnih operacija; kada smo sve te korake redom izložili i kada smo ustanovili da je svaki korektan, da li smo onda i shvatili stvarno značenje dokaza? Hoćemo li ga shvatiti čak i kada naprežući pamćenje budemo u mogućnosti da ga ponovimo izlažući sve te elementarne operacije u baš onom redu u kojem ih je izložio onaj tko je dokaz pronašao? Očigledno ne; nećemo biti svjesni cjelokupne realnosti; ono što čini jedinstvo dokaza bit će nam sasvim neshvatljivo.[52]

Hjumovsko shvaćanje u liku Kitchera ima suvremenog predstavnika. On, naime, nastoji ukazati na znakove koji bi trebali pokazati nesigurnost naših uvjerenja u neke matematičke iskaze, a vezano za dužinu njihovog dokaza. Kod dugih dokaza naša pažnja može popustiti, te se ponekad možemo pogrešno pozvati na nešto što smo ranije dokazali. Pogrešno u smislu da smo možda zaboravili sve detalje tvrdnji na koje se oslanjamo u daljem dokazu, ili da smo jednostavno zaboravili dokaz te tvrdnje. Slično, Descartes žali zbog činjenice što su duža izvođenja nesigurna, jer nadilaze prostor onoga što sebi možemo istovremeno predstaviti. Doduše, on smatra da to stanje možemo popraviti stalnim ponavljanjem kako bismo težili tome da čitav lanac zaključivanja imamo kao cjelinu – jedan akt shvaćanja.[53] U vezi s Descartesovim prijedlogom, prirodno je pitanje o granicama ljudskih mentalnih mogućnosti. Kako bi se Descartesov prijedlog ostvario kod dužih dokaza o kojima govori Kitcher? Dokaz svake tvrdnje koja je već dokazana, a koja se koristi u daljnjem dokazu, trebali bismo ponavljati sa željom da on postane "jedna cjelina" s čitavim dokazom. Ipak, složenost nekih dokaza znatno komplicira ovu zamisao. Praktično, mnoga matematička područja međusobno su zavisna i činjenice iz jednog područja često se uzimaju kao već znane-dokazane činjenice u drugome

[50] Hume (1973: 180).
[51] Za slične ideje vidjeti Poincaré (1913), Resnik (1997) i Davis and Hersh (1981).
[52] Poincaré (1913: 217).
[53] Descartes (1954).

području. Nije rijetkost da se barata činjenicama iz prvog područja baveći se nekim dokazima u drugom, a bez obveze da se napravi prisjećanje o dokazu iz prvog područja.

Psihologističkim prigovorima, koje smo naveli, dovodi se u pitanje stjecanje matematičkog znanja dokazom. Što leži u osnovi takvih prigovora? Dokaz se shvaća kao niz koraka kojim se dolazi do neke matematičke tvrdnje. Ali, da bi taj niz za subjekta bio opravdanje za njegovo vjerovanje, on mora biti doživljen, shvaćen. Mora imati svoj "psihološki put".

Zamjerka koju psihologizam nalazi matematičkom dokazu kao opravdanju jest u nemogućnosti da se to opravdanje "doživi jedinstveno kao cjelina". Zaista, dokaz velikog broja matematičkih tvrdnji veoma je složen i teško da ih netko može objasniti i shvatiti kao "jedinstvenu cjelinu". Na primjer, tvrdnja koju dokazujemo oslonjena je na nekoliko drugih tvrdnji, ova opet na neke druge, itd. Ta činjenica je prirodna posljedica strukture svake matematičke teorije. Ona ima svoje osnovne tvrdnje iz kojih se uz odgovarajuća pravila izvode sve ostale. Svaka nova tvrdnja sve je više "udaljena" od aksioma teorije i za njezino objašnjenje – opravdanje potrebno je sve više tvrdnji koje su ranije prihvaćene kao istine. Dodatni je problem to što neke tvrdnje u okviru jedne teorije jesu već prihvaćene i dokazane – opravdane tvrdnje u okviru neke druge teorije. Na primjer, mnoge istine teorije skupova uzimaju se kao općeprihvaćene tvrdnje bez dokaza kao sredstvo kojim se dokazuju – opravdavaju tvrdnje nekih drugih teorija. Svako tko želi da sve matematičke tvrdnje opravda – dokaže – objasni jedinstvenim doživljajem, naići će na poteškoću. Dokaz se izvodi postupno, korak po korak, pri čemu se za svaki iskaz ponovo traži dokaz – opravdanje. Čitav posao može postati veoma složen. Međutim, za svaku matematičku istinu koju su ljudi otkrili (koju znaju) *može se rekonstruirati postupak njenog opravdanja*. Može se dogoditi da je taj postupak složen i dug, sastavljen od mnogo (ali konačno mnogo) iskaza i njihovih dokaza. Toliko mnogo da ih nitko ne može u jedinstvenoj doživljenoj cjelini predočiti sebi i drugima. Međutim, rekonstrukcija tog puta je *izvediva*, to jest opravdanje postoji.

Psihologistički prigovor o jedinstvenoj cjelini koja se shvaća, očigledno, namjerno je uveden ne bi li se uzdrmala neprikosnovenost i sigurnost matematičkih tvrdnji. Ali, ovako, *ad hoc* uveden uvjet, neće ostaviti na miru ni veliki broj iskaza drugih znanosti. Koliko još ima iskaza drugih znanosti, pri čemu za opravdanje vjerovanja u njih nije moguće osigurati shvaćanje cjeline? Ili, bolje je pitati, koliko postoji iskaza znanosti takvih da je za opravdanje vjerovanja u njih moguće osigurati jedinstvenost o kojoj govore psihologisti? Većina iskaza svake znanosti nisu trivijalne, očigledne činjenice, iako ih mi zbog opće prihvaćenosti najčešće tako doživljavamo. One obično za svoje opravdanje, također, podrazumijevaju niz drugih tvrdnji koje, opet, imaju svoja opravdanja. Tako i sagledavanje opravdanja takvih istina teško može biti dano u jedinstvenom doživljaju.

Prigovor u vezi s utjecajem autoriteta na stjecanje vjerovanja i njihovo opravdanje najmanje bi trebalo da pogađati matematiku. Matematičko opravdanje subjekta koji vjeruje u to da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak zbroju dvaju pravih kutova neusporedivo je jače od onog koji vjeruje u povijesni iskaz o broju poginulih vojnika u bitci kod Waterlooa ili onog koji vjeruje u iskaz geografije o vremenu stvaranja mlađih vjenačnih planina. Naime, učitelj matematičkim opravdanjem ne može učenika uvjeriti u opravdanost neke neistinite matematičke tvrdnje, što nije slučaj u drugim znanstvenim područjima. Prethodno slijedi iz činjenice da opravdanje – dokaz u matematici jamči i istinitost, što se ne može reći za druga područja. U njima dozvoljavamo postojanje vjerovanja koja nisu istinita. S druge strane, opravdanost u matematici ne dozvoljava neistinitost. Opravdanost je u njoj dovoljan uvjet za istinitost.

I krajnji empiristi[54] će danas prihvatiti stav da opravdanje matematičkih iskaza treba tražiti u dokazu. Međutim, mjesto na kojem čekaju za napad jest razgovor o opravdanosti polaznih matematičkih tvrdnji – aksioma. Postavljaju očekivana pitanja. U redu. Većina matematičkih tvrdnji opravdana je i izvedena polazeći od aksioma. Ali, zašto bi oni bili opravdani? Za njih ne postoji dokaz. Kako su onda opravdani? Ako za njih ne postoji opravdanje, onda nijedan matematički iskaz nije opravdan. Ako za njih postoji opravdanje, kakvo je ono kada nije dokaz? Matematičar je spreman za odgovor. On govori o potrebnim i očekivanim osobinama skupa aksioma. Govori o njihovoj plodnosti, o razlozima za i protiv njihovog prihvaćanja. Ne zanima ga mnogo razmišljanje o tome je li ideja za formulaciju pojedinih aksioma dobivena Platonovim sjećanjem duše na udaljeni svijet prauzora, ili na neki drugi način.

Nesumnjivo je da su tekovine prethodnih civilizacija i praktična dostignuća naših predaka vezana za računanje i mjerenje utjecala na ideje o tome kako izabrati elementarne tvrdnje pojedinih teorija koje nam se čine čulno provjerljivim.[55] Također, kroz osobne doživljaje tvrdnji tih teorija i osobno se od djetinjstva uvjeravamo da nas one tjeraju da vjerujemo u njihovu istinitost. Međutim, činjenica je da mnogi čulni doživljaji koje imamo teško mogu biti predočeni i formalizirani kroz neku strogu teoriju čiji bi objekti predstavljali, na neki način, objekte koje opažamo. S druge strane, postoje različite matematičke teorije čiju "egzemplifikaciju" teško

[54] Izuzev Steinera.

[55] Aksiomi euklidske geometrije, Peanovi aksiomi.

možemo učiniti. Postoje teorije koje nemaju nikakvu praktičnu primjenu, niti se tvrdnje o njihovim objektima mogu uočiti u nekom odnosu objekata koje opažamo.

Praktična iskustva naših predaka, naša praktična iskustva iz djetinjstva ili prisjećanja naše besmrtne duše su poticaj, ideja i motivacija za izbor elementarnih matematičkih iskaza, ali to nije dovoljno. Intuicija za te iskaze, ma što podrazumijevali pod tim, mora biti oblikovana strožim – formalnim – uvjetima koje postavljamo pred svaki skup aksioma. Najčešće govorimo o trima nužnim uvjetima koje svaki skup aksioma mora zadovoljiti, a o čemu je već bilo riječi. Nakon te formalizacije, usvajanja skupa aksioma koji zadovoljava određene uvjete, prestaje bilo kakva veza matematičara, u smislu opravdanja, s opažajnom okolinom. Eventualni primjeri iz nje, ako su oni s obzirom na prirodu teorije mogući, mogu biti tek ilustracija te teorije.

Bibliografija

Benacerraf, P. 1965. “What number could not be”, *Philosophical Review* 74, 47–73.

——. 1973. “Mathematical truth”, u Hart (1996: 14–30).

Benacerraf P., H. Putnam (ur.). 1983. *Philosophy of Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press).

Davis, P. J. i R. Hersh. 1981. *The Mathematical Experience* (Boston, Mass.: Houghton Mifflin).

Descartes, R. 1954. *Geometry* (New York: Dover)

Frege, G. 1950. *The Foundations of Arithmetic* (Oxford: Blackwell).

Gettier, E. 1963. “Is justified true belief knowledge?”, *Analysis* 23, 121–123.

Goldman, A. 1967. “A causal theory of knowing”, *Journal of Philosophy* 64, 355–372.

Grice, P. 1961. “The causal theory of perception”, u R. Swartz (ur.), *Perceiving, Sensing and Knowing* (Berkeley: University of California Press), 438–472.

Gödel, K. 1947/64. “What is Cantor’s continuum problem?”, u Benacerraf i Putnam (1983: 470–485).

Hamilton E. i H. Cairns (ur.). 1961. *The Collected Dialogues of Plato* (Princeton: Princeton University Press).

Hart, W.D. (ur.). 1996. *The Philosophy of Mathematics* (Oxford: Oxford University Press).

Hume, D. 1973. *Treatise of Human Nature* (Oxford: Oxford University Press).

Kant, I. 1965. *Critique of Pure Reason* (London: Macmillan).

Kitcher, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge* (Oxford: Oxford University Press).

Maddy, P. 1990. *Realism in Mathematics* (New York: Oxford University Press).

Poincaré, H. 1913. *The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science and Method* (New York: Science Press).

Polya, G. 1954. *Induction and Analogy in Mathematics* (Princeton, N.J.: Princeton University Press).

Quine, W. V. O. 1936. "Truth by convention", u Benacerraf and Putnam (1983: 329–354).

——. 1981. *Theories and Things* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press).

Resnik, M. D. 1997. *Mathematics as Science of Patterns* (Oxford: Oxford University Press).

Russell, B. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen and Unwin).

Steiner, M. 1975. *Mathematical Knowledge* (Ithaca: Cornell University Press).