UDK 528.232.2:514.774.8
Izvorni znanstveni članak

# Numeričke vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80

**Miljenko LAPAINE, Dražen TUTIĆ, Miroslava LAPAINE – Zagreb***

*SAŽETAK. S obzirom na stalni razvoj instrumentalne i mjerne tehnike, potrebno se pripremati za računanja koja neće dovoditi do nepotrebnih dodatnih pogrešaka. U skladu s tim, u članku se upozorava na problem numeričkih vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80. Daju se numeričke vrijednosti izvedenih konstanti na 24 pouzdane znamenke.*

*Ključne riječi: elipsoid GRS 80, Besselov elipsoid, osnovni geodetski parametri.*

## 1. Uvod

Sva računanja u geodeziji mogu se obaviti s pomoću računala mnogo točnije i brže nego što je to bilo moguće nekada. Danas nitko i ne pomišlja na to da za geodetska računanja upotrijebi npr. logaritamske tablice ili logaritmar ("rehenšiber"). Kako bi se iskoristile prednosti računala, ulazni podaci moraju imati odgovarajuću točnost. Podaci koji nisu mjereni, nego unaprijed zadani, nazivaju se konstante ili parametri i obično se preuzimaju iz knjiga ili priručnika.

U ovome radu bit će riječi o numeričkim vrijednostima geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80.

U uvodu ćemo se podsjetiti na to da su se geodetska računanja u Hrvatskoj u proteklih stotinjak godina temeljila na Besselovu elipsoidu. O povijesnim pojedinostima nastanka i primjene Besselova elipsoida, a u povodu njegove 150. obljetnice, pisao je Zeger (1991).

Kao svojevrsnu zanimljivost ističemo činjenicu da se veličine poluosi Besselova elipsoida (1.1) koje se često susreću u literaturi, u izvorniku (Helmert, 1880) odnose na tzv. legalni metar. Odnos između legalnog i internacionalnog metra dan je relacijom:

* Prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 10000 Zagreb, Kačićeva 26, mlapaine@geof.hr,
mr. sc. Dražen Tutić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 10000 Zagreb, Kačićeva 26, dtutic@geof.hr,
mr. sc. Miroslava Lapaine, 10000 Zagreb, Ilica 164.

1 metar (legalni) = 1,000 013 355 metar (internacionalni)

Međutim, bez obzira na to, iste numeričke vrijednosti (1.1) primjenjivane su do današnjih dana kao da se odnose na internacionalni metar. Budući da se poluosi Besselova elipsoida u svim daljnjim geodetskim računanjima uzimaju kao zadane, bespogrešne veličine, navedena identifikacija dviju različitih mjernih jedinica nije dovela do pogrešnih rezultata.

U literaturi je Besselov elipsoid uvijek zadan numeričkim vrijednostima svojih poluosi $a$ i $b$ u metrima, njihovim dekadskim logaritmima ili u oba zapisa istodobno. Međutim, numeričke vrijednosti poluosi i njihovih logaritama nisu međusobno usklađene (Lapaine i dr., 1992).

Besselov elipsoid obično je u literaturi zadan numeričkim vrijednostima poluosi $a$ i $b$ u metrima (Osnovni geodetski radovi 1953, Čubranić 1979):

$$a = 6\,377\,397.15500 \qquad b = 6\,356\,078.96325 \tag{1.1}$$

ili u obliku dekadskih logaritama (Pravilnik za državni premer 1951, Jordan/Eggert/Kneissl 1958):

$$\log a = 6.80464\,34637 \qquad \log b = 6.80318\,92839 \tag{1.2}$$

ili istodobno u oba oblika (Borčić 1955a, 1955b, 1976, Čubranić 1974a, 1974b, 1979, Helmert 1880, Svečnikov 1953, Živković 1972). Antilogaritmiranjem izraza (1.2) dobiju se poluosi u metrima

$$a = 6\,377\,397.15507\,6050 \qquad b = 6\,356\,078.96289\,7785 \tag{1.3}$$

odakle se vidi da postoji razlika prema izrazima (1.1) koja je malo manja od milimetra. Već je Mittermayer (1964) uočio da ta razlika nije uvijek zanemariva.

Postavlja se pitanje izbora početnih vrijednosti za poluosi. Dva bi pristupa mogla biti ispravna. Prvi je da se u skladu s Pravilnikom za državni premer (1951) kao početne vrijednosti parametara Besselova elipsoida prihvate poluosi u logaritamskom obliku (1.2). Druga je mogućnost, prema naredbi ministra financija iz 1924. o prihvaćanju Gauss-Krügerove projekcije (Osnovni geodetski radovi, 1953), prihvaćanje numeričkih vrijednosti poluosi u metrima (1.1). Lapaine i dr. (1992) predložili su da se točnija geodetska računanja temelje na preporuci iz priručnika Jordan/Eggert/Kneissl (1958), prema kojoj Helmertove logaritme za poluosi

$$\log a = 6.80464\,34637\,00\ldots \qquad \log b = 6.80318\,92839\,00\ldots \tag{1.4}$$

treba uzeti kao osnovne i bespogrešne veličine. Na temelju njih, svi se ostali parametri, kao što su primjerice polumjer zakrivljenosti u polu, prvi i drugi numerički ekscentricitet, prva, druga i treća spljoštenost, mogu izračunati s proizvoljnom točnošću.

Lapaine i dr. (1992) izračunali su navedene parametre na 24 pouzdane znamenke na dva načina. Rezultati su objavljeni u navedenom radu, a dobiveni su s pomoću

Petersovih tablica (Peters, Stein 1965) i primjenom softvera The Derive, proizvoda tvrtke Soft Warehouse.

Koliko je poznato autorima ovoga rada, u Hrvatskoj se upotrebljavao i još se upotrebljava Besselov elipsoid kao osnova za geodetska računanja, ali ne postoji službeni dokument u kojem bi bile objavljene službene numeričke vrijednosti osnovnih parametara toga elipsoida. Po svemu sudeći do takve objave neće ni doći jer je nedavno službeno objavljen prijelaz na nove geodetske datume i kartografske projekcije (NN, 2004a).

## 2. GRS 80

Geodetski referentni sustav 1980 (GRS 80) prihvaćen je na XVII. generalnoj skupštini Međunarodne unije za geodeziju i geofiziku (International Union for Geodesy and Geophysics – IUGG) na osnovi sljedećeg zaključka:

"Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku

priznaje da Geodetski referentni sustav 1967 (GRS 67), prihvaćen na XIV. generalnoj skupštini IUGG-a u Luzernu 1967. godine, ne predočuje više s dovoljnom točnosti dimenzije i oblik Zemlje i polje ubrzanja sile teže, za mnoge zadatke u geodeziji, geofizici, astronomiji i hidrografiji, a s obzirom na to da postoje pogodnije vrijednosti,

preporuča:

a) zamjenu sustava GRS 67 novim sustavom GRS 80, koji se opet temelji na teoriji geocentričnog ekvipotencijalnog elipsoida definiranog sljedećim dogovorenim konstantama:

- polumjerom Zemljina ekvatora:
  $a = 6\,378\,137 \quad \mathrm{m}$
- geocentričnom gravitacijskom konstantom Zemlje (uključivši atmosferu):
  $GM = 3\,986\,005 \quad \times 10^8 \ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$
- geopotencijalnom spljoštenosti (dinamičkom) isključivši stalni utjecaj Zemljinih doba:
  $J_2 = 108263 \times 10^{-8}$
- kutnom brzinom Zemljine rotacije:
  $\omega = 7\,292\,115 \quad \times 10^{-11}\ \mathrm{rad\ s}^{-1}$

b) upotrebu istih računskih formula kao i za GRS 67 koje su prihvaćene na XV. generalnoj skupštini IUGG-a u Moskvi i objavljene od IUGG-a.

c) da prije definirana mala poluos elipsoida mora biti paralelna smjeru koji prolazi konvencionalnim međunarodnim ishodištem za gibanje pola i da je početni meridijan paralelan nul-meridijanu geografskih dužina, koje je prihvatio BIH (Bureau International de l'Heure)".

Mjerodavan je i sljedeći zaključak Međunarodnoga geodetskog društva (International Association of Geodesy – IAG):

"IAG

priznaje da je IUGG na svojoj XVII. generalnoj skupštini uveo novi Geodetski referentni sustav 1980 i zato

preporuča da se taj sustav upotrebljava kao službeni referentni sustav za geodetske radove te

potiče računanja ubrzanja sile teže kako na površini tako i u atmosferi na osnovi toga sustava" (Moritz 1980, 1992).

Citirani zaključak IUGG-a govori da je GRS 80 geocentričan, to jest da je njegovo ishodište u središtu masa Zemlje. Orijentacija sustava je specifična u sljedećem: os rotacije referentnog elipsoida nalazi se u smjeru konvencionalnog ishodišta za gibanje pola (CIO – Conventional International Origin for Polar Motion), a početni meridijan je isti kao za međunarodnu službu vremena (BIH – Bureau International de l'Heure). Takvoj definiciji odgovara pravokutni koordinatni sustav XYZ, ishodište kojega je središte Zemlje, čija se os Z poklapa s osi rotacije elipsoida, u skladu s CIO, i čija os X prolazi početnim meridijanom u skladu s BIH.

Ekvipotencijalni rotacijski elipsoid određen je s četiri parametra. IUGG je odabrao sljedeće:

$a$ – polumjer ekvatora

$GM$ – geocentričnu gravitacijsku konstantu

$J_2$ – dinamičku spljoštenost

$\omega$ – kutnu brzinu.

Polumjer ekvatora $a$ je velika poluos meridijanske elipse; mala poluos označuje se s $b$. Geocentrična gravitacijska konstanta $GM$ je produkt Newtonove gravitacijske konstante $G$ i ukupne Zemljine mase $M$. Konstanta $J_2$ definirana je izrazom

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}, \tag{2.1}$$

gdje su $C$ i $A$ glavni momenti tromosti nivo-elipsoida ($C$ polarni, $A$ ekvatorski moment tromosti).

U nastavku će nam trebati prvi ekscentricitet $e$, definiran izrazom

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \tag{2.2}$$

i drugi ekscentricitet $e'$, definiran izrazom

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \tag{2.3}$$

Formule zatvorenog oblika navedene su u 3. poglavlju (IAG, 1971, Specijalna publikacija br. 3). Izvođenje tih formula može se naći u knjizi (Heiskanen i Moritz, 1967) poglavlja 2-7 do 2-10.

## 2.1. Računanje $e^2$

Prema Moritzu (1992) osnovna izvedena konstanta je kvadrat prvog ekscentriciteta, $e^2$, koji je prije definiran. Iz

$$J_2 = \frac{e^2}{3}\left(1 - \frac{2}{15}\frac{me'}{q_0}\right) \tag{2.4}$$

može se napisati

$$e^2 = 3J_2 + \frac{2me'e^2}{15q_0}, \tag{2.5}$$

gdje je

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}, \tag{2.6}$$

pa se iz $be' = ae$ dobije

$$e^2 = 3J^2 + \frac{4}{15}\frac{\omega^2 a^3}{GM}\frac{e^3}{2q_0}. \tag{2.7}$$

To je osnovna jednadžba za $e^2$, izražena s pomoću $a$, $GM$, $J_2$ i $\omega$. Ta nelinearna jednadžba može se riješiti nekim od iteracijskih postupaka ako se uzme u obzir da je

$$2q_0 = \left(1 + \frac{3}{e'^2}\right)\arctan e' - \frac{3}{e'} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}n}{(2n+1)(2n+3)}e'^{2n+1}, \tag{2.8}$$

gdje je drugi ekscentricitet

$$e' = e(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Rješavanje navedene nelinearne jednadžbe ne može se sasvim izbjeći, ali se može prevesti na rješavanje neke druge nelinearne jednadžbe. Tako su primjerice Poder i Engsager (1998) predložili sljedeći algoritam, koji izravno daje spoljštenost $f$ i drugi ekscentricitet $e'$.

Početne vrijednosti su:

$$m_\mathrm{a} = \frac{\omega^2 a^3}{GM}, \quad f = e'^2, \quad q_\mathrm{e} = \frac{2}{15}$$

Iteracija se provodi ovako:

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{15}m_\mathrm{a}(1-f)^3/q_\mathrm{e}$$

$$e'^2 = \frac{f(2-f)}{(1-f)^2}$$

$$q_e = \sum_{k=1}^{8} \frac{2k+2}{(2k+3)(2k+5)} (-e'^2)^k .$$

## 2.2. Geometrijske konstante i njihove numeričke vrijednosti

Kada smo odredili numeričku vrijednost za prvi ekscentricitet $e$, onda se druge geometrijske konstante za elipsoid mogu računati po dobro poznatim formulama:

$$b = a\sqrt{1-e^2} \quad \text{(mala poluos)} \tag{2.10}$$

$$f = \frac{a-b}{a} \quad \text{(spljoštenost)} \tag{2.11}$$

$$f' = \frac{a-b}{b} \quad \text{(druga spljoštenost)} \tag{2.12}$$

$$n = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{(treća spljoštenost)} \tag{2.13}$$

$$c = \frac{a^2}{b} \quad \text{(polumjer zakrivljenosti na polu).} \tag{2.14}$$

Sljedeće konstante su točno izračunane do decimalnog mjesta kako je upisano. Prema Moritzu (1992) računanja su neovisno napravili Chung-Yung Chen i Hans Sünkel. U slučaju sumnje ili kada je potrebna veća točnost, mogu se te veličine računati s pomoću zadanih konstanti po formulama iz prijašnjeg poglavlja (Moritz 1992).

Tablica 1. *Konstante elispoida GRS 80 prema Moritzu (1992).*

| | |
|---|---|
| Zadane konstante (točno) | |
| $a$ = 6 378 137 m | velika poluos |
| $GM$ = 3 986 005 × $10^8$ $m^3$ $s^{-2}$ | geocentrična gravitacijska konstanta |
| $J_2$ = 108 263 × $10^{-8}$ | dinamička spljoštenost |
| $\omega$ = 7 292 115 × $10^{-11}$ rad $s^{-1}$ | kutna brzina |
| Izračunane konstante | |
| $b$ = 6 356 752.3141 m | mala poluos |
| $c$ = 6 399 593.6259 m | polumjer zakrivljenosti na polu |
| $e^2$ = 0.006 694 380 022 90 | prvi ekscentricitet |
| $e'^2$ = 0.006 739 496 775 48 | drugi ekscentricitet |
| $f$ = 0.003 352 810 681 18 | spljoštenost |
| $f^{-1}$ = 298.257 222 101 | recipročna vrijednost spljoštenosti |

Vrijedno je spomenuti da se osim navedene numeričke vrijednosti za geocentričnu gravitacijsku konstantu *GM* u literaturi mogu naći i druge numeričke vrijednosti. Najčešće se spominje vrijednost

$$GM = 3\ 986\ 004.418 \times 10^{8}\ \mathrm{m}^{3}\ \mathrm{s}^{-2}$$

kao standardna numerička vrijednost sustava IERS (McCarthy, Petit 2004). Groten (2000) je predložio da ta vrijednost konstante *GM* uđe u novi sustav GRS 2000. Međutim, budući da se u ovome radu bavimo sustavom GRS 80, u daljnjim razmatranjima upotrebljavat ćemo vrijednost za tu konstantu iz tablice 1.

Dok su kod Besselova elipsoida kao osnovni parametri bile zadane numeričke vrijednosti njegovih poluosi (ili logaritmi poluosi), kod elipsoida GRS 80 samo je velika poluos $a$ zadana svojom numeričkom vrijednošću. Drugi geometrijski parametar nije zadan svojom numeričkom vrijednošću nego nelinearnom jednadžbom. Rješenje te jednadžbe zapisano na 12 znamenaka objavio je Moritz (1992) uz napomenu da se u slučaju potrebe taj i drugi parametri mogu izračunati po odgovarajućim formulama.

Već je Cimbálnik (1987) uočio problem u ograničenom broju objavljenih znamenaka geometrijskih konstanti te upozorava na moguće nesporazume, odnosno upotrebu drugih numeričkih konstanti (Kirschmer, 1981).

Numeričke vrijednosti u tablici 2 dobivene su na dva načina. Prvi je upotrebom programskog paketa *Mathematica 4*, koji ima ugrađene algoritme za numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi. Potrebno je znati približnu vrijednost ili interval u kojem treba očekivati rješenje. Pritom je moguće zadati proizvoljan broj znamenaka koji treba ispisati u rezultatu, broj znamenaka na koji će se računati međurezultati (on je redovito za 5 do 10 veći od broja sigurnih znamenaka) i maksimalni broj iteracija koji treba biti takav da se osigura željena točnost.

Tablica 2. *Geometrijske konstante elipsoida GRS 80 napisane na 24 znamenke.*

| | |
|---|---|
| $a$ | $= 6.37813\ 70000\ 00000\ 00000\ 000 \cdot 10^{6}$ m (zadano) |
| $b$ | $= 6.35675\ 23141\ 40347\ 43838\ 862 \cdot 10^{6}$ m |
| $c$ | $= 6.39959\ 36258\ 64031\ 64801\ 394 \cdot 10^{6}$ m |
| $e^2$ | $= 6.69438\ 00229\ 03415\ 74957\ 495 \cdot 10^{-3}$ |
| $e$ | $= 8.18191\ 91042\ 83185\ 07068\ 860 \cdot 10^{-2}$ |
| $e'^2$ | $= 6.73949\ 67754\ 81621\ 90622\ 331 \cdot 10^{-3}$ |
| $e'$ | $= 8.20944\ 38151\ 93342\ 25976\ 402 \cdot 10^{-2}$ |
| $1/f$ | $= 2.98257\ 22210\ 08827\ 11243\ 163 \cdot 10^{2}$ |
| $f$ | $= 3.35281\ 06811\ 83637\ 41816\ 505 \cdot 10^{-3}$ |
| $1/f'$ | $= 2.97257\ 22210\ 08827\ 11243\ 163 \cdot 10^{2}$ |
| $f'$ | $= 3.36408\ 98375\ 23347\ 02342\ 429 \cdot 10^{-3}$ |
| $n$ | $= 1.67922\ 03946\ 29406\ 14691\ 445 \cdot 10^{-3}$ |

Drugi način na koji su izračunane numeričke vrijednosti je s pomoću vlastitog programa za rješavanje nelinearne jednadžbe. S obzirom na to da uobičajena aritmetika na računalu omogućuje računanja na 16 ili 20 znamenaka, što ovdje nije dovoljno, bilo je potrebno upotrijebiti programski jezik koji omogućuje računanja na proizvoljni broj znamenaka. Jedan je od takvih programskih jezika Java, koji u paketu Math.BigDecimal omogućuje rad sa četiri osnovne računske operacije s brojevima (+, –, *, /) na proizvoljan broj decimala. Upotrebom toga paketa napisan je program koji metodom raspolavljanja traži rješenje nelinearne jednadžbe i računa ostale parametre elipsoida.

Ako se uzme spljoštenost zaokružena na manji broj decimala $f = 1/298.257222101$ (NN 2004a), pa se na temelju $a$ i $f$ izračunaju ostali parametri, njihove vrijednosti prikazane su u tablici 3.

Tablica 3. *Geometrijske konstante elipsoida GRS 80 izračunane u aritmetici na 16 znamenaka uz pretpostavku zadane spoljoštenosti f = 1/298.257222101.*

$$
\begin{array}{lll}
a & = 6.37813\ 70000\ 00000 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m} & \text{(zadano)} \\
b & = 6.35675\ 23141\ 403\underline{56} \cdot 10^{6}\ \mathrm{m} & \\
c & = 6.39959\ 36258\ 640\underline{23} \cdot 10^{6}\ \mathrm{m} & \\
e^2 & = 6.69438\ 00229\ 00\underline{787} \cdot 10^{-3} & \\
e & = 8.18191\ 91042\ 8\underline{1579} \cdot 10^{-2} & \\
e'^2 & = 6.73949\ 67754\ \underline{78957} \cdot 10^{-3} & \\
e' & = 8.20944\ 38151\ 9\underline{1719} \cdot 10^{-2} & \\
1/f & = 2.98257\ 22210\ \underline{10000} \cdot 10^{2} & \text{(zadano)} \\
f & = 3.35281\ 06811\ 8\underline{2319} \cdot 10^{-3} & \\
1/f' & = 2.97257\ 22210\ \underline{10000} \cdot 10^{2} & \\
f' & = 3.36408\ 98375\ 2\underline{2019} \cdot 10^{-3} & \\
n & = 1.67922\ 03946\ 2\underline{8745} \cdot 10^{-3} &
\end{array}
$$

Podvučene su one znamenke koje se razlikuju od "pravih" znamenaka, tj. od onih koje se dobiju računanjem na veći broj znamenaka, a na temelju definicije sustava GRS 80. Prirodno se postavlja pitanje utjecaja numeričkih vrijednosti tih konstanti na računanja u geodeziji.

## 2.3. Utjecaj numeričkih vrijednosti konstanti elipsoida GRS 80 na računanja pravokutnih koordinata u ravnini projekcije u Hrvatskoj

Na temelju članka 9. stavka 2. Zakona o državnoj izmjeri i katastru nekretnina ("Narodne novine", broj 128/99) Vlada Republike Hrvatske je na sjednici održanoj 4. kolovoza 2004. donijela Odluku o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske (NN 2004a, 2004b). Prema toj odluci:

"Elipsoid GRS 80 s veličinom velike poluosi a = 6378137,00 m i spljoštenošću $\mu$ = 1/298,257222101 određuje se službenim matematičkim modelom za Zemljino tijelo u Republici Hrvatskoj."

"Koordinatni sustav poprečne Mercatorove (Gauss-Krügerove) projekcije – skraćeno HTRS96/TM, sa srednjim meridijanom 16°30' i linearnim mjerilom na srednjem meridijanu 0,9999 određuje se projekcijskim koordinatnim sustavom Republike Hrvatske za područje katastra i detaljne državne topografske kartografije."

Za vrijednosti u sustavu HTRS96/TM vrijede sljedeća teorijska svojstva:

$$N(\varphi, l) = N(\varphi, -l)$$

i

$$E(\varphi, l) + E(\varphi, -l) = 1\ 000\ 000.$$

Iz rezultata u tablici 4 vidi se da su numeričke vrijednosti koordinata istih točaka izračunane s pomoću "točnih" parametara elipsoida (tablica 2) i parametara elipsoida dobivenih iz skraćene vrijednosti spljoštenosti (tablica 3) praktički jednake. Razlika se pojavljuje samo na dva mjesta, i to u iznosu jedinice posljednje, sedme decimale.

Tablica 4. *Usporedba pravokutnih koordinata u sustavu HTRS96/TM izračunanih u aritmetici sa 16 značajnih znamenaka i zaokruženih na 7 decimala.*

| Elipsoid GRS 80 | | Osnovni parametri iz tablice 2 zaokruženi na 16 znamenaka | | Osnovni parametri iz tablice 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $l = \lambda - \lambda_0$ | E | N | E | N |
| 40° | 3° | 756 176.508 6107 | 4 433 399.209 5628 | 756 176.508 6107 | 4 433 399.209 5628 |
| 45° | 3° | 736 516.988 2959 | 4 988 826.302 1496 | 736 516.988 2959 | 4 988 826.302 1497 |
| 50° | 3° | 715 048.757 8164 | 5 544 607.567 1510 | 715 048.757 8164 | 5 544 607.567 1510 |
| 40° | 1° | 585 386.080 2293 | 4 429 565.066 9395 | 585 386.080 2293 | 4 429 565.066 9395 |
| 45° | 1° | 578 838.956 9699 | 4 984 932.397 5118 | 578 838.956 9699 | 4 984 932.397 5118 |
| 50° | 1° | 571 687.956 0418 | 5 540 772.213 0794 | 571 687.956 0418 | 5 540 772.213 0794 |
| 40° | –1° | 414 613.919 7707 | 4 429 565.066 9395 | 414 613.919 7707 | 4 429 565.066 9395 |
| 45° | –1° | 421 161.043 0301 | 4 984 932.397 5118 | 421 161.043 0301 | 4 984 932.397 5118 |
| 50° | –1° | 428 312.043 9582 | 5 540 772.213 0794 | 428 312.043 9582 | 5 540 772.213 0794 |
| 40° | –3° | 243 823.491 3893 | 4 433 399.209 5628 | 243 823.491 3893 | 4 433 399.209 5628 |
| 45° | –3° | 263 483.011 7041 | 4 988 826.302 1496 | 263 483.011 7041 | 4 988 826.302 1497 |
| 50° | –3° | 284 951.242 1836 | 5 544 607.567 1510 | 284 951.242 1836 | 5 544 607.567 1510 |

## 3. Zaključak

U članku je objašnjen problem numeričkih vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80. Naime, dok su kod Besselova elipsoida kao osnovni parametri bile zadane numeričke vrijednosti njegovih poluosi (ili logaritmi poluosi), kod elipsoida GRS 80 samo je velika poluos $a$ zadana svojom numeričkom vrijednošću. Drugi geometrijski parametar nije zadan numerički, nego nelinearnom jednadžbom. Rješenje te jednadžbe zapisano na 12 znamenaka objavio je Moritz (1992) uz napomenu da se u slučaju potrebe taj i drugi parametri mogu izračunati po odgovarajućim formulama.

U ovome radu daju se numeričke vrijednosti izvedenih konstanti na 24 pouzdane znamenke. Na kraju se razmatra mogući utjecaj upotrebe parametara elipsoida GRS 80 izračunanih uz pretpostavku da je uz veliku poluos, drugi zadani parametar recipročna vrijednost spljoštenosti izračunana približno na 12 znamenaka. Pokazuje se da će uz tu pretpostavku pravokutne koordinate u službenom sustavu u Hrvatskoj (HTRS96/TM) biti moguće izračunati na 7 decimala. Sedma decimala može se razlikovati od prave vrijednosti najviše za jedan.

## Zahvala

Autori zahvaljuju prof. dr. sc. Asimu Bilajbegoviću na trudu uloženom u čitanje rukopisa ovoga rada i na vrlo korisnim primjedbama.

### Literatura

Borčić, B. (1955a): Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb.

Borčić, B. (1955b): Gaus-Krügerova projekcija, Geografski Institut JNA, Beograd.

Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.

Cimbálnik, M. (1987): Geometrické konstanty referenčních elipsoid###, Geodetický a kartografický obzor, 8, 207–211.

Čubranić, N. (1974a): Viša geodezija, I dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.

Čubranić, N. (1974b): Viša geodezija, II dio, Tehnička knjiga, Zagreb.

Čubranić, N. (1979): Geodezija, u: Tehnička enciklopedija, VI svezak, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb, 71–75.

Groten, E. (2000): Report of Special Commission 3 of IAG, u: Towards Models and Constants for Sub-Microarcsecond Astrometry, Proceedings of IAU Colloquium 180, 27–30 March 2000, 337–352.

Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1967): Physical Geodesy. W. H. Freeman, San Francisco.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Jordan/Eggert/Kneissl (1958): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Erste Hälfte, 10. Ausgabe, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Kirschmer, G. (1981): Resolutionen, Zusammensetzung der IAG 1980–1983, Zeitschrift für Vermessungswesen, 106. Jahrgang, Heft 2, 88–99.

Lapaine, Milj., Lapaine, Mir., Frančula, N., Vučetić, N. (1992): Numerical Values of Geodetic Constants of the Bessel's Ellipsoid, Zbornik radova KoREMA 37, 1. svezak, 273–277.

McCarthy, D. D., Petit, G. (ur., 2004): IERS Conventions (2003), IERS Technical Note No. 32, http://www.iers.org/MainDisp.csl?pid=46-25776, tiskana verzija:, ISBN

3-89888-884-3, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 2004. 127 str.

Mittermayer, E. (1964): Die numerischen Werte der Besselschen Erdkonstanten, Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 12, 469–470.

Moritz, H. (1980): Das Geodätische Bezugssystem 1980, Festschrift zur Emeritierung von o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny, Mitt. der geodätischen Institute der Technischen Univeristät Graz, Folge 35, Graz, 153-159.

Moritz, H. (1992): Geodetic Reference System 1980. The Geodesist's Handbook 1992, ur. C. C. Tscherning, Bulletin Géodésique. Vol. 66, No.2. 187–192.

NN (2004a): Odluka o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine br. 110.

NN (2004b): Ispravak Odluke o utvrđivanju službenih geodetskih datuma i ravninskih kartografskih projekcija Republike Hrvatske, Narodne novine br. 117.

Osnovni geodetski radovi u F. N. R. Jugoslaviji (1953), Savezna geodetska uprava, Beograd.

Peters, J., Stein, J. (1965): Matematičeskie tablicy, Vyčislitel'nyj Centr AN SSSR, Moskva.

Poder, K., Engsager, K. (1998): Some Conformal Mappings and Transformations for Geodesy and Topographic Cartography, Kort&Matrikelstyrelsen, Publications 4. series, Vol. 6.

Pravilnik za državni premer (1951), I deo, Triangulacija, knjiga prva, Glavna geodetska uprava pri vladi FNRJ, Beograd.

Svečnikov, N. S. (1953): Viša geodezija, prva knjiga, Savezna geodetska uprava, Beograd.

Zeger, J. (1991): 150 Jahre Bessel-Ellipsoid, 1841–1991, ÖZfVuPh, 79. Jahrgang, Heft 4, 337–340.

Živković, A. (1972): Viša geodezija, Građevinska knjiga, Beograd.

# Numerical Values of GRS 80 Ellipsoid Geometrical Constants

*ABSTRACT. Taking into consideration the consistent development of instrumental and measuring techniques, it is necessary to prepare us for calculations that will not lead to unnecessary and additional errors. Therefore, the article discusses the problem of numerical values of GRS 80 ellipsoid geometrical constants. Numerical values of derived constants with 24 reliable digits are given.*

*Key words: GRS 80 ellipsoid, Bessel ellipsoid, basic parameters in geodesy.*

*Prihvaćeno:* 2006-12-01