

NAPREZANJA U KORIJENU ZUBA ZUPČANIKA S RAVNIM ZUBIMA ODREĐENA RAZLIČITIM METODAMA PRORAČUNA SPUR GEAR TOOTH ROOT STRESSES ACCORDING TO DIFFERENT CALCULATION METHODS

Goran GREGOV – Gordana MARUNIĆ – Vladimir GLAŽAR

Sažetak: U radu je naprezanje u korijenu zuba zupčanika izračunato pomoću numeričke metode 2D MKE (dvodimenzijaska metoda konačnih elemenata) i u skladu s dvjema analitičkim metodama koje su obuhvatile proračun naprezanja prema metodi B, opisanoj u normi ISO 6336-3 i njezin modificirani oblik, metodu MAX. Da bi se vrijednovao faktor debljine vijenca kojim se prema metodi B norme ISO uzima u obzir utjecaj debljine vijenca na nazivno naprezanje u korijenu zuba, naprezanje u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s vanjskim ozubljenjem ravnim zubima određeno je krećući od punog zupčanika prema zupčaniku s tankim vijencem, uzimajući pri tome u obzir zupčanik s različitim brojem zubi.

Cljučne riječi: – naprezanje
– korijen zuba
– tanki vijenac
– ISO

Summary: In this work the gear tooth root stress was calculated by means of numerical method 2D FEM (two-dimensional Finite Element Method) and according to two analytical methods, that included the stress calculation method B of standard ISO 6336-3 and its modified form - method MAX. In order to evaluate the rim thickness factor introduced by the method B of standard ISO that takes into account the influence of rim thickness on nominal tooth root stress, the stress at a spur tooth root of cylindrical external gearing was determined going from solid towards thin rimmed gear, and considering the gear with various number of teeth.

Keywords: – stress
– tooth root
– thin rim
– ISO

1. UVOD

Zahtjevi za manjim dimenzijama i masama, te većim opterećenjima zupčanika, znače i niže vrijednosti faktora sigurnosti prilikom određivanja naprezanja u korijenu zuba, što je važan problem pri konstruiranju zupčanika s tankim vijencem [1, 2]. Kritično mjesto u području korijena zuba za zupčanike s tankim vijencem bitno se razlikuje od zupčanika s punim vijencem zbog veće deformacije vijenca tj. oslonaca zuba, te se kod određene debljine vijenca zupčanika savojni lom može pojaviti u vijencu zupčanika, a ne u korijenu zuba, kao što prikazuje slika 1 [1].

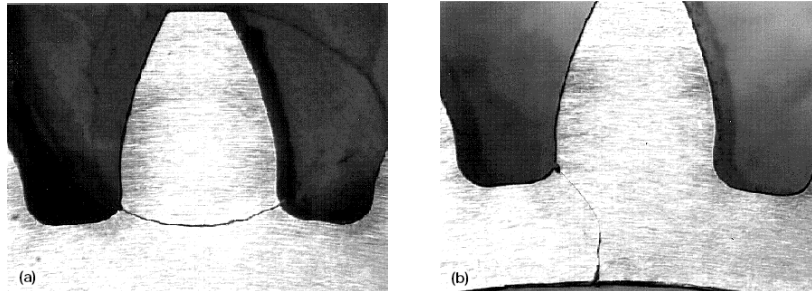
Od 2006. godine norma ISO [3] uključuje u proračun nazivnoga normalnog naprezanja prema metodi B i faktor debljine vijenca koji uzima u obzir omjer debljine vijenca i visine zuba (*backup ratio*). Kritični presjek određen je tangentom na prijelaznu krivulju korijena zuba pod kutem od $\varphi = 30^\circ$ prema simetrali zuba, za opterećenje u vanjskoj točki jednostrukog zahvata.

1. INTRODUCTION

The demands for smaller dimensions and masses along with the greater gear loadings mean lower values of safety factor when a tooth root stress is determined, which is an important issue for thin-rimmed gears design [1, 2]. A critical locus in the area of tooth root for thin-rimmed gears considerably differs from a solid gear, due to the greater deformation of the rim, i.e. the teeth support. At a certain gear rim thickness, the break can occur at the gear rim instead at the tooth root, as shown in Figure 1 [1].

Since 2006 in the standard ISO [3], the factor of rim thickness that takes into account the ratio of rim thickness and the tooth height (backup ratio), has been incorporated in the calculation of nominal normal tooth root stress according to method B. A critical tooth root section is determined by the angle $\varphi = 30^\circ$ between the tangent to the tooth fillet and the tooth centre line, considering the loading at the outer point of single pair tooth contact.

Drugi pristup određivanja nazivnoga normalnog naprezanja u korijenu zuba predložen je u metodi MAX [4, 5], koja polazeći od izraza norme ISO, kritični presjek korijena zuba i odgovarajuće naprezanje definira mjestom najvećeg umnoška određenih korekcijskih faktora za proračun nazivnog naprezanja.



Slika 1. Lom zupčanika kroz korijen zuba (a) i kroz vijenac zupčanika (b)
Figure 1. Tooth break through the tooth root (a) and through the gear rim (b)

Za izračunavanje nazivnog naprezanja u korijenu zuba prema metodama ISO-B i MAX razvijen je računalni program u programskom jeziku *Visual Basic 2008 Express Edition* [6]. Program omogućuje unos ulaznih podataka potrebnih za proračun naprezanja, te ispis dobivenih rezultata unutar radnog sučelja programa.

Metoda konačnih elemenata - MKE, među ostalim numeričkim metodama, najčešće se koristi za određivanje stanja naprezanja i deformacije zupčanika. U radu je proračun naprezanja u korijenu zuba temeljen na uporabi programskog paketa *ANSYS 10.0* [7]. Profil zuba dobiven je pomoću programa *Geargraph 3.0* [8], a zupčanik je kreiran u obliku ANSYS datoteke.

Cilj je ovoga rada proračun, analiza i usporedba najvećih naprezanja u korijenu zuba cilindričnoga zupčanika s vanjskim ozubljenjem ravnim zubima, određenih pomoću jedne numeričke i dviju analitičkih metoda, uzimajući u obzir utjecaj debljine vijenca i broja zubi zupčanika.

2. NAPREZANJE U KORIJENU RAVNOG ZUBA PREMA METODI ISO-B

U metodi ISO-B [3] polazi se od pretpostavke da će se najveće naprezanje u korijenu zuba pojaviti kad opterećenje djeluje u vanjskoj točki jednostrukog zahvata zubi. Normalno naprezanje u korijenu zuba σ_F izračunava se kao umnožak nazivnog normalnog naprezanja u korijenu zuba σ_{F0} i korektivnih faktora naprezanja

Another approach for the determination of nominal normal tooth root stress is proposed by the method MAX [4, 5], which in going from the expressions of standard ISO, critical tooth root section and the corresponding stress, defines by locus where the maximum product of certain correction factors for nominal stress calculation occurs.

For the nominal tooth root stress calculation according to the methods ISO-B and MAX, the computer program is developed in the program language *Visual Basic 2008 Express Edition* [6]. The program enables the import of input data needed for the stress calculation and the list of the obtained results within the program working interface.

The Finite Element Method - FEM, is mostly utilised for the determination of a gear stress and strain state among the other numerical methods. In this work, the tooth root calculation is based on the use of the software package *ANSYS 10.0* [7]. The tooth profile is obtained by use of the program *Geargraph 3.0* [8], and the gear is created in the form of an ANSYS file.

The aim of this paper is the calculation, analysis and comparison of maximum root stresses of a spur tooth of cylindrical external gearing, determined by the use of one numerical and two analytical methods, by taking into consideration the influence of rim thickness and the number of gear teeth.

2. SPUR TOOTH ROOT STRESS ACCORDING TO METHOD ISO-B

The method ISO-B starts from the assumption that maximum tooth root stress occurs when the load is acting at the outer point of single pair tooth contact. Normal tooth root stress σ_F is calculated as the product of nominal normal tooth root stress σ_{F0} and stress correction factors

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha} \quad (1)$$

K_A je faktor primjene i uzima u obzir povećanja opterećenja zbog izvana utjecanih varijacija ulaznog ili izlaznog momenta. K_V je dinamički faktor koji uzima u obzir povećanja opterećenja zbog unutarnjih dinamičkih efekata. $K_{F\beta}$ je korijenski faktor raspodjele opterećenja po širini zuba, koji uzima u obzir nejednoliku raspodjelu opterećenja po širini boka zuba uslijed nejednolikog nalijeganja bokova zubi u zahvatu. $K_{F\alpha}$ je korijenski faktor raspodjele opterećenja na bokove zubi u zahvatu u čelnom presjeku. U proračunima je za navedene faktore usvojena vrijednost 1.

Položaj najvećega nazivnog normalnog naprezanja σ_{F0} u korijenu zuba tj. kritični presjek definiran je tangentom na prijelaznu krivulju korijena zuba pod kutom $\varphi = 30^\circ$ prema simetrali zuba (slika 2). Nazivno normalno naprezanje u korijenu zuba određeno je jednadžbom (2)

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b m_n} Y_F Y_S Y_\beta Y_B Y_{DT}, \quad (2)$$

pri čemu je tangencijalna sila na diobenoj kružnici [9, 10].

K_A is the application factor that takes into account load increments due to externally influenced variations of input or output torque. K_V is the dynamic factor which takes into account load increments due to internal dynamic effects. $K_{F\beta}$ is the face load factor for tooth root stress, which takes into account uneven distribution of load over facewidth due to mesh-misalignment. $K_{F\alpha}$ is the transverse load factor for tooth root stress that takes into account uneven load distribution in the transverse direction. Through calculations, the adopted value for these factors is 1.

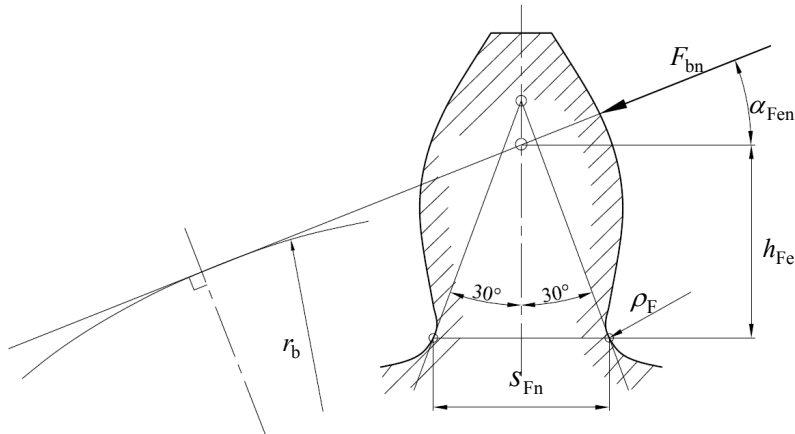
The position of maximum nominal normal tooth root stress σ_{F0} is defined by the tangent at the tooth fillet, at the angle $\varphi = 30^\circ$ to the tooth centre line (Figure 2). Nominal normal tooth root stress is defined by the equation (2)

where tangential force at reference cylinder is [9, 10].

$$F_t = F_{bn} \cos \alpha_n, \quad (3)$$

uz F_{bn} - sila okomita na bok zuba, α_n - kut zahvata u normalnom presjeku, b - širina zuba, m_n - modul u normalnom presjeku.

where F_{bn} - load normal to the line of contact, α_n - normal pressure angle, b - tooth face width, m_n - normal module.



Slika 2. Kritični presjek korijena zuba pri djelovanju opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata prema metodi ISO-B

Figure 2. Critical tooth root section for the load acting at the outer point of single pair tooth contact according to method ISO-B

Nadalje ćemo prikazati kako se određuju korektivni faktori (2) za proračun nazivnog naprezanja u korijenu zuba.

Y_F - faktor oblika zuba uzima u obzir utjecaj oblika zuba na nazivno naprezanje u korijenu zuba opterećenog u vanjskoj točki jednostrukog zahvata zubi, te se određuje prema

The correction factors (2) for nominal tooth root calculation, can be determined as follows.

Y_F - tooth form factor that takes into account the influence of tooth form on nominal tooth root stress with the load applied at the outer point of single pair tooth contact

$$Y_F = \frac{6 h_{Fe}}{m_n} \cos \alpha_{Fen} \left/ \left(\frac{s_{Fn}}{m_n} \right)^2 \right. \cos \alpha_n, \quad (4)$$

gdje je h_{Fe} krak sile momenta savijanja, α_{Fen} - kut u smjeru opterećenja za djelovanje opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata, s_{Fn} debljina korijena zuba u kritičnom presjeku.

Y_S - faktor korekcije naprežanja koristi se za pretvorbu nazivnoga naprežanja u korijenu zuba u lokalno naprežanje u korijenu zuba, a određen je za djelovanje opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Izračunava se primjenom izraza

$$Y_S = (1,2 + 0,13 L) q_s^{\left[\frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L}} \right]}, \quad L = \frac{s_{Fn}}{h_{Fe}}, \quad q_s = \frac{s_{Fn}}{2 \rho_F}, \quad (5)$$

gdje je ρ_F polumjer zakrivljenosti korijena zuba u kritičnom presjeku. Za izračunavanje vrijednosti h_{Fe} , α_{Fen} , s_{Fn} i ρ_F norma navodi odgovarajuće jednadžbe.

Y_β - faktor kuta nagiba boka zuba koji kompenzira činjenicu da je intenzitet momenta savijanja u korijenu zuba zupčanika s kosim zubima manji od odgovarajućih vrijednosti za virtualni zupčanik s ravnim zubima koji se koristi za proračun. Y_β se izračunava prema

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120^\circ}, \quad (6)$$

uz ε_β stupanj prekrivanja bočne crte i β - kut nagiba boka zuba. Kako je u ovom radu zupčanik s ravnim zubima predmet istraživanja, faktor kuta nagiba boka zuba Y_β jednak je 1.

Y_B - faktor debljine vijenca pojednostavljeni je faktor koji se koristi za procjenu utjecaja debljine vijenca kada detaljni proračuni naprežanja uslijed opterećenja na vlak i tlak ili iskustvene vrijednosti nisu dostupni.

Za određivanje faktora debljine vijenca Y_B koristi se omjer s_R/h_t koji predstavlja omjer debljine vijenca s_R i visine zuba h_t , tzv. *backup ratio*. Slučaj kada je $s_R/h_t \leq 0,5$ treba izbjegavati, a kada je $s_R/h_t > 0,5$ faktor Y_B određuje se prema:

$$Y_B = \begin{cases} 1,0 & \text{za } s_R/h_t \geq 1,2 \\ 1,6 \ln \left(2,242 \frac{h_t}{s_R} \right) & \text{za } s_R/h_t > 0,5 \text{ i } s_R/h_t < 1,2 \end{cases} \quad (7)$$

Norma ISO 6336 - 3 predlaže mogućnost grafičkog određivanja faktora debljine vijenca Y_B u ovisnosti o odnosu s_R/h_t (slika 3).

Y_{DT} je faktor visine zuba za zupčanike visoke preciznosti (kvaliteta tolerancije zupčanika ≤ 4) sa stupnjem prekrivanja u rasponu od $2 \leq \varepsilon_{cn} < 2,5$ (što u ovom radu

where h_{Fe} is bending moment arm, α_{Fen} - load direction angle relevant to direction of application of load at the outer point of single pair tooth contact, s_{Fn} - tooth root chord at the critical section.

Y_S - stress correction factor used for the conversion of nominal tooth root stress to the local tooth root stress, determined for the application of load at the outer point of single pair tooth contact.

It can be calculated by the equation

where ρ_F is tooth root radius at the critical section. For the calculation of h_{Fe} , α_{Fen} , s_{Fn} and ρ_F , the standard provides the corresponding equations.

Y_β - helix angle factor (tooth root), which compensates the fact that the bending moment intensity at the tooth root of helical gears is less than the corresponding values for the virtual spur gears used for calculation. Y_β is calculated in accordance with

where ε_β is overlap ratio and β - helix angle. As spur teeth are the subject of investigation, the value of factor Y_β in this work is equal to 1.

Y_B - rim thickness factor is a simplified factor used for the evaluation of the rim thickness influence when detailed calculations of stresses in both tension and compression or experience are not available. The ratio s_R/h_t of rim thickness s_R and the tooth height h_t , so called backup ratio, is used for the determination of the rim thickness factor Y_B . The case when $s_R/h_t \leq 0,5$ is to be avoided, and for $s_R/h_t > 0,5$, factor Y_B is in accordance with:

The standard ISO 6336 - 3 proposes the possibility of rim thickness factor Y_B graphical determination in relation to ratio s_R/h_t (Figure 3).

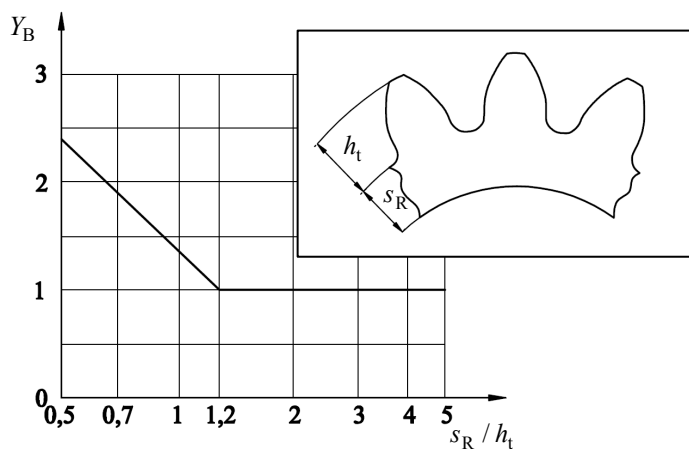
Y_{DT} - deep tooth factor is proposed for the gears of high precision (accuracy grade ≤ 4) with the contact ratios in the range of $2 \leq \varepsilon_{cn} < 2,5$, and with applied actual profile

nije slučaj) i usvojenom aktualnom modifikacijom profila.

U radu je stoga usvojena vrijednost tog faktora $Y_{DT} = 1$.

modification.

Therefore, in this work the value of factor $Y_{DT} = 1$ is adopted.



Slika 3. Faktor debljine vijenca Y_B [3]

Figure 3. Rim thickness factor Y_B [3]

2.1. Računalni program za proračun nazivnoga normalnog napreznja u korijenu ravnog zuba

Za izračunavanje nazivnoga normalnog napreznja u korijenu zuba prema metodi ISO-B razvijen je računalni program u programskom jeziku *Visual Basic 2008 Express Edition* [6]. Program se temelji na prethodno navedenim jednadžbama i uvjetima za metodu ISO-B, te zahtijeva od korisnika unos početnih vrijednosti: α_n , β , m_n , h_{FP} , ρ_{FP} , z_1 , z_2 , x_1 , x_2 , s_R i F_{bn}/b . Nakon unosa početnih vrijednosti izračunavaju se korekcijski faktori i nazivno normalno napreznje u korijenu zuba.

Nazivno normalno napreznje u korijenu ravnog zuba σ_{F0} određeno je za različiti broj zubi pogonskog zupčanika z_1 i debljine njegovog vijenca. Zupčanici su izrađeni reznom letvom sljedećih parametara: $\alpha_n = 20^\circ$, $m_n = 10$ mm, $h_{FP} = 1,25 m_n$ i $\rho_{FP} = 0,25 m_n$.

Istraživanja su provedena za zupčanike s faktorom pomaka profila $x_{1,2} = 0$, iako program ima mogućnost izračunavanja i s drugim vrijednostima faktora pomaka profila. Broj zubi pogonskog zupčanika mijenjan je u rasponu $z_1 = 25; 30; 35; 50; 100$. Svi pogonski zupčanici spareni su s gonjenim zupčanikom broja zubi $z_2 = 35$, a odgovarajući stupanj prekrivanja izračunat je prema jednadžbi koju navodi [9, 10].

Omjer debljine vijenca i visine zuba s_R/h_t za pogonski zupčanik poprima sljedeće vrijednosti: $s_R/h_t = 0,6; 0,8; 1,3; 1,7$ i $2,2$.

Za izračunavanje nazivnog napreznja u korijenu zuba σ_{F0} (2) zupčanika s tankim vijencem, u svim slučajevima je usvojena vrijednost opterećenja po širini zuba $F_{bn}/b = 1000$ N/mm.

Izračunato nazivno normalno napreznje u korijenu zuba prikazano je na sl. 4 u ovisnosti o broju zubi pogonskog zupčanika i debljini vijenca prema metodi ISO-B.

2.1. Computer program for nominal normal spur tooth root stress calculation

The program language *Visual Basic 2008 Express Edition* [6], a computer program for the calculation of nominal normal tooth root stress according to the method ISO-B, was developed. The program is based upon the previously presented equations and the conditions for the method ISO-B and demands that the user imports the starting values, which are: α_n , β , m_n , h_{FP} , ρ_{FP} , z_1 , z_2 , x_1 , x_2 , s_R , and F_{bn}/b . After the starting values have been imported, correction factors and nominal normal tooth root stress are calculated and the results are presented through the working interface of the program.

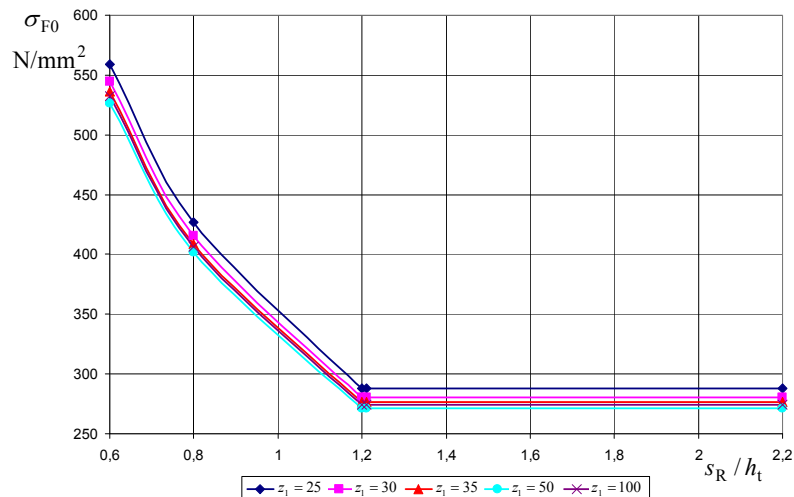
Nominal normal spur tooth root stress σ_{F0} is determined for different values of teeth of pinion z_1 and rim thickness. The gears are made by the basic rack profile with the following parameters: $\alpha_n = 20^\circ$, $m_n = 10$ mm, $h_{FP} = 1,25 m_n$ and $\rho_{FP} = 0,25 m_n$.

The investigations are performed for the gears with the profile shift coefficient $x_{1,2}=0$, nevertheless the program is capable of calculating any other values of profile shift coefficient. The pinion teeth number is changed in the range of $z_1 = 25; 30; 35; 50; 100$. All pinions mate with the wheel of $z_2 = 35$, and the corresponding contact ratio is calculated by the equation provided by [9, 10].

The ratio of rim thickness and the tooth height s_R/h_t takes for the pinion the following values: $s_R/h_t = 0,6; 0,8; 1,3; 1,7$ and $2,2$.

For the calculation of nominal tooth root stress σ_{F0} (2) for thin-rimmed gear, the value of the load per face width of $F_{bn}/b = 1000$ N/mm is adopted for all cases.

The calculated nominal normal tooth root stress is presented in Fig. 4 in relation to the number of pinion teeth and the rim thickness, according to the method ISO-B.



Slika 4. Utjecaj broja zubi i debljine vijenca na nazivno normalno naprezanje u korijenu ravnog zuba prema metodi ISO-B

Figure 4. The influence of number of teeth and the rim thickness on nominal normal tooth root stress according to the method ISO-B

Dobiveni rezultati pokazuju da promjena debljine vijenca znatno više utječe na naprezanje u korijenu zuba zupčanika nego promjena broja zubi zupčanika. Kod zupčanika s omjerom $s_R/h_t < 1,2$ (tanki vijenac) uočljiv je nagli porast naprezanja kako se smanjuje debljina vijenca, dok je promjena naprezanja vezano uz broj zubi zupčanika sadržana u istom rasponu kao i za zupčanike s omjerom $s_R/h_t \geq 1,2$ (puni zupčanik).

3. NAPREZANJE U KORIJENU RAVNOG ZUBA PREMA METODI MAX

Metoda MAX [4] polazi od osnovnih postavki metode ISO za određivanje nazivnoga normalnog naprezanja σ_{F0} u korijenu zuba, faktora oblika zuba Y_F i faktora korekcije naprezanja Y_S , ali uključuje stvaran profil kosog zuba vanjskoga cilindričnog ozubljenja u normalnom presjeku, za što su izvedene potrebne jednadžbe. Ta metoda računa naprezanje za djelovanje opterećenja na glavi zuba, a naprezanje za djelovanje opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata određuje se primjenom odgovarajućeg faktora korekcije.

Za razliku od metode ISO-B, položaj kritičnog presjeka korijena zuba kod metode MAX definiran je mjestom najveće vrijednosti umnoška faktora oblika zuba i faktora korekcije naprezanja.

U slučaju zupčanika s tankim vijencem dobivene vrijednosti naprezanja tada se, kao i kod metode ISO-B, množe s faktorom debljine vijenca Y_B .

3.1. Računalni program za proračun nazivnoga normalnog naprezanja u korijenu ravnog zuba

Računalni program koji je razvijen za izračunavanje nazivnoga normalnog naprezanja u korijenu zuba prema

The obtained results show that the variation of the rim thickness exerts considerably more effect on the tooth root stress, than the variation of the number of teeth. For the gears with the ratio $s_R/h_t < 1,2$ (thin rim), severe stress increase is obvious as the rim thickness decreases, while the stress variation corresponding to the number of gear teeth is embraced through the same range as it is for the gears with $s_R/h_t \geq 1,2$ (solid gear).

3. A SPUR TOOTH ROOT STRESS ACCORDING TO THE METHOD MAX

The method MAX [4] comes from the basic considerations of method ISO and for the calculation of nominal normal tooth root stress, σ_{F0} adopts the tooth form factor Y_F and the correction factor Y_S , but includes the real profile of the external cylindrical helix tooth in the normal section, for which the needed expressions were derived. This method calculates the stress for loading at the tooth tip, and the stress for the loading at the outer point of single pair tooth contact is determined by means of the corresponding factor.

Unlike the method ISO-B, the method MAX defines the location of the critical tooth root section by the locus where the maximum product of the tooth form factor and the correction factor occurs.

In the case of thin-rimmed gear, the obtained stress values are then multiplied by the rim factor, just like for the method ISO-B.

3.1. Computer program for spur tooth root nominal normal stress calculation

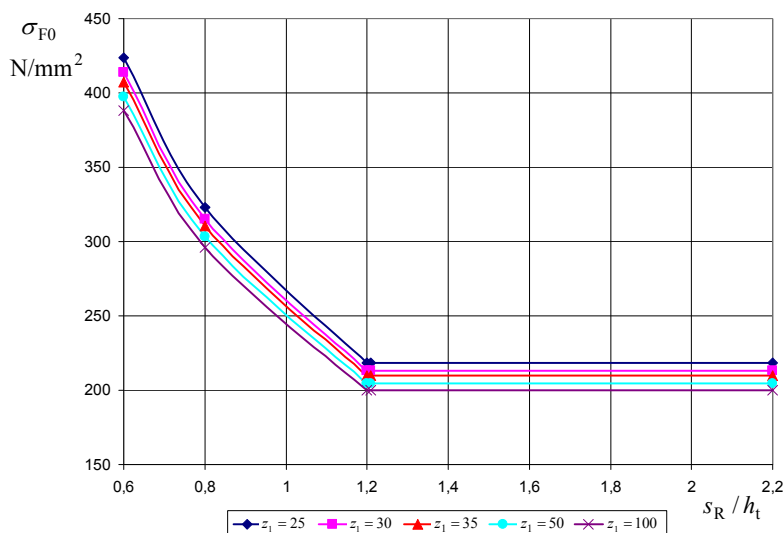
The computer program that is developed for the calculation of nominal normal tooth root stress according

metodi ISO-B, također može odrediti naprezanje i prema metodi MAX. Program se temelji na jednadžbama i uvjetima za metodu MAX, čija je sintaksa odvojena od sintakse metode ISO-B. Potrebne ulazne vrijednosti iste su za obje metode, te se rezultati prikazuju unutar radnoga sučelja programa.

Nazivno normalno naprezanje u korijenu zuba σ_{F0} izračunato je u ovisnosti o promjeni broja zubi pogonskog zupčanika i debljine vijenca, kao i kod metode ISO-B.

Istraživanja su provedena za jednake geometrijske parametre pogonskog i gonjenog zupčanika, te rezne letve, uz isto opterećenje kao i kod metode ISO-B.

Rezultati promjene nazivnoga normalnog naprezanja u korijenu zuba u ovisnosti o broju zubi i debljini vijenca prikazane su na slici 5.



Slika 5. Utjecaj broja zubi i debljine vijenca na nazivno normalno naprezanje u korijenu ravnog zuba prema metodi MAX

Figure 5. The influence of number of teeth and the rim thickness on the tooth root nominal normal stress according to the method MAX

Očito je da naprezanje u korijenu zuba pokazuje istu tendenciju kada se mijenja broj zubi i debljina vijenca, kao što je uočeno kod metode ISO-B.

4. NAPREZANJE U KORIJENU RAVNOG ZUBA POMOĆU 2D FEM PRORAČUNA

Za određivanje naprezanja u korijenu zuba numeričkom metodom korištena je 2D metoda konačnih elemenata (MKE) i programski paket ANSYS 10.0, prema hipotezi ravninskog stanja deformacija.

Profil zuba zupčanika modeliran je pomoću računalnih programa Gearagraph i ANSYS. Gearagraph je program za proračunavanje geometrije zuba, koji omogućuje ispis profila zuba u obliku datoteke .dxf ili datoteke .nod. Gearagraph zahtijeva unos vrijednosti parametara zuba i alata (α_n , β , m_n , h_{FP} , ρ_{FP} , z_1 , z_2 , x_1 , x_2) potrebnih za

to the method ISO-B is also capable of calculating stress according to the MAX method. The program is based on the equations and the conditions for the MAX method, whose syntax is separated from the syntax of the method ISO-B. The needed input values are the same for both methods, so the results are presented within the working program interface.

Nominal normal tooth root stress σ_{F0} is calculated in relation to the variation of the number of pinion teeth, as it was for the method ISO-B.

The investigations are performed for the same geometrical parameters of the pinion and wheel, the basic rack profile, and the same loading value for the method ISO-B.

The results of nominal normal tooth root variation in relation to the number of teeth and the rim thickness are presented in Figure 5.

It is obvious that the tooth root stress shows the same tendency when the number of teeth and the rim thickness vary, as observed in the case of method ISO-B.

4. SPUR TOOTH ROOT STRESS BY THE 2D FEM CALCULATION

For the determination of tooth root stress by the numerical method, the 2D Finite Element Method (FEM) of the program package ANSYS 10.0 is utilized, according to the plane strain hypothesis.

The gear tooth profile is modelled by means of computer programs Gearagraph and ANSYS. Gearagraph is the program for tooth geometry calculation that enables the output of tooth profile in the form of file .dxf or file .nod. Gearagraph demands the input of values for the tooth and tool parameters (α_n , β , m_n , h_{FP} , ρ_{FP} , z_1 , z_2 , x_1 , x_2) that

proračun geometrije zuba i nudi mogućnost ispisa profila zuba. Unijete vrijednosti parametara za svaki zupčanik identične su usvojenim vrijednostima kod metoda ISO-B i MAX. Nakon proračuna odabrana je opcija zapisa profila zuba zupčanika u obliku datoteke .nod, koja prikazuje profil zuba čvorovima. Datoteka .nod unesena je u program ANSYS, te je dobiven profil zuba zupčanika definiran čvorovima.

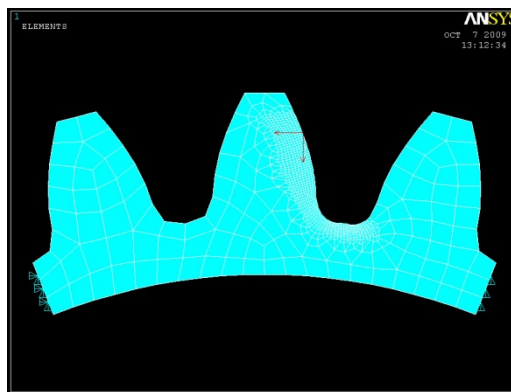
Daljnje modeliranje zupčanika provedeno je u programu ANSYS, a prvi je korak zamjena čvorova zuba s točkama koje se spajaju krivuljom-poveznicom da bi se dobio profil zuba zupčanika. Čvorovi se moraju zamijeniti točkama jer nemaju mogućnost povezivanja krivuljom.

Za proračun napreznja u korijenu zuba razvijen je djelomični model s tri zuba koji odgovara zupčaniku s lepezastim otvorom. Zubi su dobiveni zrcaljenjem prethodno kreiranog profila zuba, a potpuni 2D model oblikovan je definiranjem debljine vijenca i radialnim zatvaranjem površine omeđene krivuljama profila zuba, kao što je prikazano na slici 6.

are needed for the tooth geometry calculation, and offers the possibility of tooth profile output. The imported values of parameters for each gear are identical to the adopted values for the methods ISO-B and MAX. After the calculation, the option is selected for the recording of tooth profile in the form of a .nod file, which presents the tooth profile in terms of nodes. The file .nod is imported into the program ANSYS and the gear tooth profile is determined by the nodes.

Further gear modelling was performed in the program ANSYS, and the first step was to change the tooth nodes by the keypoints, which were joined by the curve-spline to form the gear tooth profile. The nodes have to be replaced by the points because they cannot be joined by the curve.

To calculate the tooth root stress, the partial model of gear with three teeth of the gear with a fan-shaped hole, was developed. The teeth were produced by mirroring the previously created tooth, and the complete 2D model was formed by defining the rim thickness and by radial closing of the surface bounded by the teeth profile curves (Figure 6).



Slika 6. 2D MKE model zupčanika
Figure 6. 2D FEM gear model

Za umreženje 2D modela zupčanika odabrani su četverokutni elementi s osam čvorova. Usvojene karakteristike materijala zupčanika su: modul elastičnosti $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ i Poissonov koeficijent $\nu = 0,3$.

Rubne uvjete definiraju ograničenja i opterećenja modela. Model je u potpunosti ograničen s lijeve i desne strane, a opterećenje djeluje u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Sila F_{bn} djeluje preko svojih x i y komponenta, vodeći računa o mogućnosti modeliranja u ANSYS-u, (slika 6).

Za usporedbu s prethodno dobivenim vrijednostima napreznja u korijenu zuba prema metodi ISO-B i MAX, izdvojeno je najveće normalno napreznje u korijenu zuba σ_{FEMmax} bez obzira na položaj na prijelaznoj krivulji korijena, te napreznje σ_{FEM30° koje odgovara diralištu tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba pod 30° .

Rezultati dobiveni pomoću 2D MKE ponovno potvrđuju da promjena debljine vijenca znatnije utječe na napreznje u korijenu zuba zupčanika od broja zubi zupčanika.

For the meshing of the 2D gear model, solid quadrilateral elements with eight nodes were chosen. The adopted gear material characteristics are: module of elasticity $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ and Poisson's ratio $\nu = 0,3$.

The constraints and the model loading define the boundary conditions. The model is completely constrained at the right and left side, while the loading is acting at the middle tooth, in the position of the outer point of single pair tooth contact. The force F_{bn} was modelled acting through its x and y components, in view of the modelling possibilities of ANSYS (Figure 6).

In order to compare the previously obtained tooth root stress values according to the methods ISO-B and MAX, maximum tooth root normal stress σ_{FEMmax} (regardless of its position on the tooth fillet) and the tooth root stress σ_{FEM30° that corresponds to the point of the 30° tangent on the tooth fillet, are separated.

The results obtained by 2D FEM, confirm again that the variation of rim thickness more considerably affects the

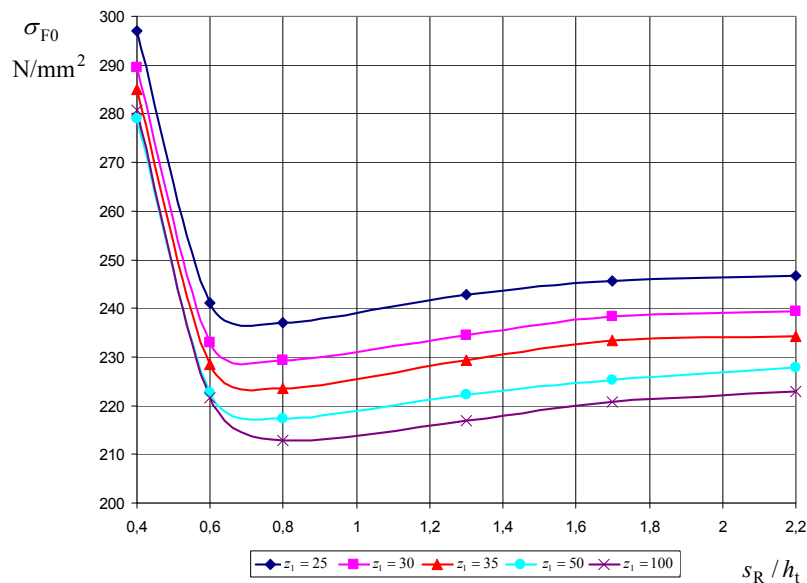
Općenito su nazivna naprezanja određena u kritičnom presjeku korijena zuba prema metodi ISO-B uvijek manja nego najveća postignuta naprezanja u korijenu zuba, bez obzira na debljinu vijenca i broj zubi.

Usporedba najvećega normalnog naprezanja u korijenu zuba (slika 7) i naprezanja u korijenu zuba u kritičnom presjeku definiranom u metodi ISO-B pokazuje razlike vrijednosti naprezanja koje su posebno izražene za tanje vijence i veći broj zubi zupčanika.

tooth root stress than does the number of gear teeth.

Generally, nominal stresses determined at the critical tooth root section according to the method ISO-B are always smaller than the approached maximum tooth root stresses, regardless of the number of teeth and rim thickness.

The comparison of maximum normal tooth root stress (Figure 7) and the stress at the critical tooth root section defined by the method ISO-B, shows great differences between the stress values, that are specially expressed for thinner rims and a larger number of gear teeth.



Slika 7. Utjecaj broja zubi i debljine vijenca na najveće normalno naprezanje u korijenu zuba prema 2D MKE

Figure 7. The influence of number of teeth and the rim thickness on maximum normal tooth root stress according to 2D FEM calculation

6. USPOREDBA DOBIVENIH NAPREZANJA U KORIJENU ZUBA ZUPČANIKA S RAVNIM ZUBIMA

Za usvojeni broj zubi zupčanika $z_1 = 25; 30; 35; 50; 100$, provedena je usporedba rezultata proračuna naprezanja u korijenu ravnog zuba numeričkom metodom 2D MKE, te dvjema analitičkim metodama, ISO-B i MAX. Za svaki zupčanik promatrana je promjena debljine vijenca izražena omjerom $s_R/h_t = 0,4; 0,6; 0,8; 1,3; 1,7; 2,2$. Kod metoda ISO-B i MAX minimalna usvojena vrijednost omjera s_R/h_t iznosi 0,6 zbog uvjeta (7), dok kod 2D MKE, minimalna vrijednost iznosi $s_R/h_t = 0,4$. Rezultati su prikazani na sl. 8 i 9 za usvojeni najmanji i najveći broj zubi.

Usporedba rezultata naprezanja dobivenih metodama ISO-B, MAX i 2D MKE pokazuje određena odstupanja među naprezanjima. U slučaju tankog vijenca ($s_R/h_t < 1,2$) najveće naprezanje u korijenu zuba dobiveno je kod metode ISO-B, nešto niže kod metode MAX, a najmanje primjenom 2D MKE, bez obzira na broj zubi. Kod punog zupčanika ($s_R/h_t > 1,2$) najveće naprezanje u korijenu

6. COMPARISON OF OBTAINED SPUR GEAR TOOTH ROOT STRESSES

For the adopted number of gear teeth $z_1 = 25; 30; 35; 50; 100$, the comparison of the calculation results for spur tooth root stress by the numerical 2D FEM method and two analytical methods ISO-B and MAX, is derived. The variation of rim thickness expressed by the ratio $s_R/h_t = 0,4; 0,6; 0,8; 1,3; 1,7$ and $2,2$ is followed for each gear. The lowest adopted value of the ratio s_R/h_t for the methods ISO-B and MAX is 0,6 due to the condition (7), being at the same time 0,4 for the 2D FEM calculation. The results of the comparison are presented in Fig. 8 and 9 for the adopted lowest and greatest number of teeth.

The comparison of stress results obtained by the methods ISO-B, MAX and 2D FEM, points to certain stress deviations. In the cases of a thin rim ($s_R/h_t < 1,2$), maximum tooth root stress values are determined for the method ISO-B, lower for the method MAX, and the lowest for the method 2D FEM, regardless of the number of teeth. As regards a solid gear $s_R/h_t > 1,2$, maximum

zuba postignuto je također za metodu ISO-B, ali se najniže javlja kod metode MAX. Očito je da se vrijednosti naprezanja u korijenu zuba određene različitim metodama razlikuju najmanje kod punog zučanika.

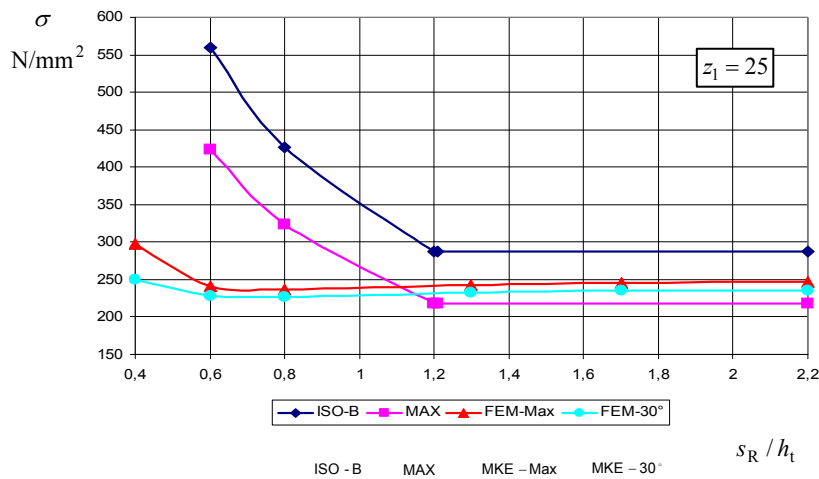
Zbog uključanja faktora debljine vijenca u proračun nazivnoga normalnog naprezanja u korijenu zuba za zupčanik s tankim vijencem, razlike najvećih naprezanja u odnosu na numeričku metodu proračuna 2D MKE još su više izražene.

U odnosu na položaj najvećeg naprezanja u korijenu zuba, najveće vrijednosti naprezanja određene pomoću 2D MKE uvijek su više od vrijednosti naprezanja određenih istom metodom u kritičnom presjeku korijena zuba prema metodi ISO-B i ne javljaju se u istom presjeku korijena zuba (slike 8, 9).

tooth root stress is reached for the method ISO-B, too, but the lowest stress appears for the method MAX. It is obvious that the obtained tooth root stress values obtained by various methods differ the least for a solid gear.

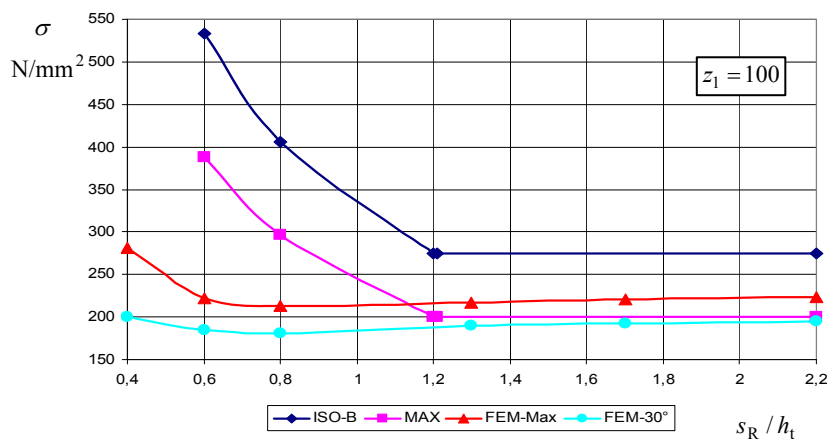
Due to the inclusion of the rim factor in nominal normal tooth root stress calculation of thin-rimmed gears for the methods ISO-B and MAX, the differences of maximum stresses related to the numerical calculation method 2D FEM become more pronounced.

In relation to the position of maximum tooth root stress, maximum stress values determined by the 2D FEM are always greater than the stress values determined by the same method in the critical tooth root section proposed by the method ISO-B, and don't appear at the same tooth root section (Figures 8, 9).



Slika 8. Usporedba utjecaja promjene debljine vijenca na nazivno normalno naprezanje u korijenu zuba za broj zuba zupčanika $z_1=25$, prema metodama ISO-B, MAX i 2D MKE

Figure 8. The comparison of influence of rim thickness on nominal normal tooth root stress for the number of teeth $z_1=25$, according to the methods ISO-B, MAX and 2D FEM



Slika 9. Usporedba utjecaja promjene debljine vijenca na nazivno normalno naprezanje u korijenu zuba za broj zuba zupčanika $z_1=100$, prema metodama ISO-B, MAX i 2D MKE

Figure 9. The comparison of influence of rim thickness on the tooth root nominal normal stress for the number of teeth $z_1=100$, according to the methods ISO-B, MAX and 2D FEM

Razlog navedenih razlika najvećih vrijednosti naprezanja u korijenu zuba proizlazi iz činjenice da se metoda ISO-B zasniva na nizu pojednostavljenja i približnih izraza, što dovodi do predimenzioniranosti zupčanika, osobito kod onih s tankim vijencem. Stoga se metoda MAX polazeći od izraza metode ISO, ali definirajući promjenjivi položaj kritičnog presjeka korijena zuba, bolje približava vrijednostima naprezanja kod 2D FMKE.

7. ZAKLJUČAK

Istraživanja naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s vanjskim evolventnim ozubljenjem ravnim zubima provedena su u cilju usporedbe rezultata naprezanja numeričke metode proračuna 2D MKE s rezultatima analitičkih metoda koje se temelje na postavkama norme ISO, prvenstveno za zupčanik s tankim vijencem. Primijenjene analitičke metode razlikuju se po definiciji kritičnog presjeka korijena zuba. Dobiveni rezultati naprezanja u korijenu zuba za zupčanike s lepezastim otvorom bez diska upućuju na određene razlike naprezanja i za puni zupčanik, koje naglo rastu kako se smanjuje debljina vijenca, bez obzira na broj zubi zupčanika.

Naprezanja određena pomoću metode 2D MKE za puni zupčanik malo se razlikuju od naprezanja prema metodi MAX i oba su naprezanja znatno manja od naprezanja prema metodi ISO-B.

Smanjenjem debljine vijenca naprezanja prema metodi ISO-B i MAX naprezanja se naglo povećavaju u odnosu na odgovarajuća naprezanja prema metodi 2D MKE. Iako su za puni zupčanik vrijednosti naprezanja u korijenu zuba određene metodom MAX bliske vrijednostima naprezanja određenih metodom 2D MKE, te su vrijednosti ipak znatno više od vrijednosti koje se dobiju tom metodom kada je kod zupčanika s tankim vijencem primijenjen faktor debljine vijenca.

U odnosu na položaj najvećeg naprezanja u korijenu zuba kritičan presjek prema metodi ISO-B ne podudara se s položajem najvećega naprezanja u korijenu zuba dobivenoga numeričkom metodom.

Današnje numeričke metode, npr. MKE i MRE (metoda rubnih elemenata), omogućuju točan proračun lokalnoga stanja naprezanja i deformacije u korijenu zuba, uzimajući u obzir stvarnu geometriju zuba i zupčanika. Očigledno je da primjena proračuna predloženog u normi ISO-B dovodi do vrijednosti naprezanja koje su znatno veće od vrijednosti naprezanja određenih korištenjem metode 2D MKE. Stoga se pri ocjeni naprezanja u korijenu ravnog zuba, osobito kod zupčanika s tankim vijencem bez obzira na moguću izvedbu oslonca, pojednostavljenja usvojena u normi ISO u odnosu na stvarno stanje naprezanja u korijenu zuba moraju uzeti u obzir, a rezultatima naprezanja treba pristupiti s oprezom.

The reason for the mentioned differences of maximum tooth root stress and its position arises from the fact that the method ISO-B is based on the certain simplifications and approximate expressions, which leads to the overdimensioning of gears, especially for the thin-rimmed ones. Therefore, the method MAX, starting from the expressions of method ISO but defining the variable position of critical tooth root section, best approaches (in the case of solid gear) the stress values of the method 2D FEM.

7. CONCLUSION

The tooth root stress investigations of spur involute external gearing have been performed in order to compare the stress results of the numerical calculation method 2D FEM with the results of analytical methods based upon the statements of standard ISO primarily for the thin-rimmed gear. The applied analytical methods differ related to the definition of the critical tooth root section.

The obtained tooth root stress results for the gears with a fan shape hole without disc point to the certain stress differences for a solid gear too, and these differences increase markedly as the rim thickness becomes thinner - regardless of the number of teeth.

Tooth root stresses determined by the method 2D FEM for a solid gear differ slightly from the stresses according to the method MAX, and these stresses are considerably lower than the stresses according to the method ISO-B.

As the rim thickness decreases, the stresses according to the method ISO-B and MAX, sharply increase in relation to the corresponding stresses of the method 2D FEM. Nevertheless the tooth root stress values of a solid gear for the method MAX are close to the stress values of method 2D FEM, these stresses are considerably more related to the corresponding ones of the same method, when the stress rim thickness factor is applied for thin rimmed gear.

In relation to the position of maximum tooth root stress, the fixed critical section adopted by the method ISO-B doesn't coincide with maximum tooth root stress position obtained by the numerical method.

Current numerical methods, for instance FEM and BEM, enable accurate calculation of the local state of stress and strain at the tooth root, taking into account the actual geometry of the tooth and gear. It is obvious that the use of calculation proposed by the standard ISO-B results in stress values that are much greater than the stress values determined by the method 2D FEM. Therefore, when a spur tooth root stress is evaluated, especially for thin-rimmed gears, regardless of possible support configuration, the simplification adopted in norm ISO in relation to the real state of stress at the tooth root must be taken into consideration and the stress results have to be approached with precaution.

8. POPIS OZNAKA

normalno naprezanje u korijenu zuba	σ_{F_r}	N/mm ²	normal tooth root stress
nazivno normalno naprezanje u korijenu zuba	σ_{F0}	N/mm ²	nominal normal tooth root stress
faktor primjene	K_A		application factor
faktor unutrašnjih dinamičkih opterećenja	K_V		dynamic factor
korijenski faktor raspodjele opterećenja na bokove zubi u zahvatu, u čelnom presjeku	$K_{F\alpha}$		transverse load factor for tooth root stress
korijenski faktor raspodjele opterećenja po širini zuba	$K_{F\beta}$		face load factor for tooth root stress
tangencijalna sila na diobenju kružnici	F_t	N	load at reference cylinder
širina zuba	b	mm	tooth face width
modul u normalnom presjeku	m_n	mm	normal module
faktor oblika	Y_F		tooth form factor
faktor korekcije naprezanja	Y_S		stress correction factor
faktor nagiba boka zuba	Y_β		helix angle factor
faktor debljine vijenca	Y_B		rim thickness factor
faktor visine zuba	Y_{DT}		deep tooth factor
sila okomita na bok zuba	F_{bn}	N	load normal to the line of contact
kut zahvata u normalnom presjeku	α_n	°	normal pressure angle
krak sile momenta savijanja	h_{Fe}	mm	bending moment arm
visina zuba	h_t	mm	tooth height
širina korijena zuba u kritičnom presjeku	s_{Fn}	mm	tooth root chord at th critical section
kut djelovanja opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata	α_{Fen}	°	load direction angle at the outer point of single pair tooth contact
polumjer zakrivljenosti prijelazne krivulje u kritičnom presjeku	ρ_F	mm	tooth root radius at critical section
čelni stupanj prekrivanja	ε_α	mm	transverse contact ratio
stupanj prekrivanja bočne crte	ε_β		overlap ratio
kut nagiba boka zuba	β	°	helix angle
debljina vijenca zupčanika	s_R	mm	rim thickness
broj zubi pogonskog (ili pogonjenog) zupčanika	$z_{1,2}$		number of teeth of pinion (or wheel)
faktor pomaka profila pogonskog (ili pogonjenog) zupčanika	$x_{1,2}$		profile shift coefficient of pinion (or wheel)
visina podnožja zuba rezne letve	h_{fP}	mm	dedendum of basic rack of cylindrical gears
polumjer zaobljenja korijena zuba zubne letve	ρ_{fP}	mm	root fillet radius of the basic rack for cylindrical gears

8. LIST OF SYMBOLS

**LITERATURA
REFERENCES**

- [1] Lewicki, D. G., Ballarini, R.: *Effect of Rim Thickness on Gear Crack Propagation Path*, Seventh International Power Transmission and Gearing Conference, San Diego, California, 1996.
- [2] Marunić, G., Gregov, G.: *Comparison of Thin-Rimmed Gear Tooth-Root and Rim Stress*, RIM 2007, Bihac, Bosnia and Herzegovina, 2007.
- [3] ISO 6336-3, *Calculation of load capacity of spur and helical gear*, Part3: Calculation of tooth bending strength, 2006.
- [4] Obsieger, B.: *Calculation of Geometry Factors for External Helical Gears Generated with Rack Type Cutters*, Znanstveno-stručni skup nauka o konstruiranju i konstruiranje pomoću računala, Zagreb, 1981.
- [5] Obsieger, B.: *Analitički prikaz profila zuba zupčanika dobivenih odvaljivanjem proizvoljnog matematički definiranog osnovnog profila*, Tehnički Fakultet Rijeka, Rijeka, 1977.
- [6] Halvorson, M.: *Visual Basic 2008: Step by Step*, Microsoft Press, Washington, 2008.
- [7] Stolarski, T., Nakasone, Y., Yoshimoto, S.: *Engineering Analysis with Ansys Software*, Elsevier Butterworth-Heinemann, England, 2006.
- [8] Basan. R., Franulović, M. Križan, B.: *Development of Custom Gear Design and Modelling Software Solution*. Proceedings of 11th International Conference Mechanical Engineering SI 2007, Bratislava, Slovakia, November 29-30, 2007[9] Oberšmit, E.: *Ozubljenja i zupčanic*, Sveučilišna naklada Liber Zagreb, Zagreb, 1982.
- [10] Obsieger, B.: *Prijenosnici sa zupčanicima*, II. Izdanje, Tehnički Fakultet Rijeka, Rijeka, 2003.

Primljeno / Received: 25.02.2010.

Prihvaćeno / Accepted: 21.04.2010.

Prethodno priopćenje

Preliminary note

Adresa autora / Authors' address:

Goran Gregov, mag. ing. mech.

Red. prof. dr. sc. Gordana Marunić, mag. ing. mech.

Vladimir Glažar, mag. ing. mech.

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

Vukovarska 58, HR-51000 Rijeka, Hrvatska

goran.gregov@riteh.hr

gordana.marunic@riteh.hr

vladimir.glazar@riteh.hr