

Sveuč. prof. Dr. STJEPAN ŠKREB, Zagreb

Genauigkeit, Sicherheit und Veränderlichkeit des meteorologischen Mittelwertes

Der Mittelwert in der Meteorologie und Statistik ist ein Vertreter grosser Beobachtungsreihen, ausgewählt nur zum Zweck leichter Vergleichbarkeit in groben Zügen¹⁾. Der Mittelwert aus Reihen geodätischer, physikalischer und astronomischer Messungen ist aber der Vertreter einer in der Natur bestehenden, konstanten Grösse die wir nur mehrmals messen um die Messgenauigkeit zu erhöhen.

Nur dieser zweite Mittelwert — der Vertreter einer in der Natur bestehenden unveränderlichen Grösse — kann die Grundlage der sogenannten »Theorie der kleinsten Quadrate« bilden, weil hier alle Abweichungen von diesem Mittelwert als »Fehler« gedeutet werden. Für unsere Betrachtungen ist von Wichtigkeit die Annahme, dass durch mehrmaliges Messen einer festen Grösse die Genauigkeit der Messung erhöht werden kann. Diese Annahme, die selbst bei der Messung einer festen unveränderlichen Grösse nicht gerade sehr einwandfrei logisch erscheint, wird aber unsinnig, wenn man sie auf die Mittelwerte der ersten Art (wo jedesmal eine andere physikalische Grösse gemessen wird) übertragen wollte. Und doch ist in der Praxis der Klimatologie die Unsitte verbreitet, dass die Mittelwerte auf eine Dezimale *mehr* gerechnet werden, wodurch der Mittelwert physikalisch genauer erscheint als die Einzelmessungen. Das ist aber logisch unmöglich, da hier der Mittelwert eben nur als Einzelwert bewertet werden kann, denn die ihm entsprechende natürliche Grösse ist keine Konstante, sondern genau so veränderlich wie die jeder Einzelmessung entsprechende.

Die Abweichungen vom Mittel sind in der Natur bedingt und nicht Fehler unserer Messungsweise, unserer Augen usw.

Hieraus ist zu ersehen, dass die zwei Begriffe »Abweichung vom Mittelwert« und »Genauigkeit« bei den meteorologischen Mittelwerten gänzlich verschieden sind und miteinander in keiner funktionalen Verbindung stehen, wogegen bei Mittelwerten zweiter Art diese zwei Begriffe streng funktional verbunden sind. Die physikalische Genauigkeit eines meteorologischen Mittelwertes kann durch die Anzahl der Beobachtungen überhaupt nicht geändert werden, da sie von der Genauigkeit abhängt, mit welcher der Beobachter, jedesmal eine andere Grösse ablesend, diese Ablesung bewerkstelligt. Wenn ein Beobachter die Temperatur bei jedem Termin mit einer Genauigkeit von $\pm 0,2^\circ \text{C}$ vom Thermometer abliest, so wird auch ein tausendjähriger Mittelwert dieser Reihe denselben Genauigkeitsgrad $\pm 0,2^\circ \text{C}$ besitzen. Was uns hier der Mittelwert geben soll, ist eben nicht die vergrösserte physikalische Genauigkeit, sondern die grössere »Sicherheit« oder »Zuverlässigkeit«, dass er sich nicht ändert.

¹⁾ L. Fraunhofer: Das arithmetische Mittel. Ann. d. Naturphilosophie. Bd. IX. S. 140.

S. Skreb: Der Mittelwert. Kroat. Geograph. Ztschrift, 1951, No 3, S. 235.

Die physikalische *Genauigkeit* des Mittelwertes ist durch die Messungsart selbst gegeben und kann später rechnerisch nicht geändert werden. Sie ist allgemein eine Funktion der Güte des Instrumentes, der Aufstellung und ganz besonders »der Mühe des Beobachters«. Diese Genauigkeit wird ziemlich überschätzt, wo nicht graphische Instrumente in guter Kondition zur Kontrolle vorhanden sind. Es ist nämlich zur Vergleichbarkeit — was der Hauptzweck des Mittelwertes ist — auch noch die Einhaltung der Termine notwendig, was zur »Mühe des Beobachters« zugerechnet werden kann.

Das alles ist schon allgemein in der Kollektivmasslehre seit langem festgestellt, es wird aber in der Klimatologie immer wieder vergessen.

Die *Sicherheit* oder *Zuverlässigkeit* des Mittelwertes ist eine in der Klimatologie bisher nicht genau definierte Grösse. Sie wird meistens als Genauigkeit der Mittelwerte zweiter Art (Vertreter einer realen physikalischen Grösse) betrachtet, so dass von einem »wahrscheinlichen Fehler« eines mehrjährigen meteorologischen Mittelwertes gesprochen wird.

Das ist natürlich eine Konfusion der Begriffe, denn die Genauigkeit eines Mittelwertes, also auch sein wahrscheinlicher Fehler im allgemeinen Sinne (nicht nach der Theorie der kleinsten Quadrate) ist, wie eben besprochen, durch die Art der Beobachtung gegeben und ist keine Funktion der Zahl der Beobachtungen. Dass vor Jahren ebenso in der Meteorologie wie in der Statistik die Methoden der kleinsten Quadrate als Ideal betrachtet wurden und ihre Formeln sinnlos übernommen wurden, ist wohl heute ein überwundener Standpunkt, da man allmählich eingesehen hat, dass hier die überflüssige und komplizierte Rechnerei zu keiner physikalischen Einsicht und Klarheit führt.

Wenn wir von einer Sicherheit oder Zuverlässigkeit eines n -jährigen Mittelwertes reden als Gegensatz zur Veränderlichkeit, so stellen wir schon hiemit eine Forderung der Natur gegenüber, dass diese Mittelwerte nicht unendlich veränderlich sein sollen. Es ist uns aus der bisherigen Erfahrung — der einzigen Quelle unserer Wissenschaft — bekannt, dass die meteorologischen Elemente eine untere und eine obere Grenze — die nicht im Unendlichen liegt — haben. Zwischen diesen Grenzwerten ist die Häufigkeit der einzelnen Grössen nicht gleich, doch lässt sich nach der bisherigen Erfahrung diese Häufigkeit der einzelnen Grössen als Kurve darstellen. Diese Häufigkeitskurve (HK) ist auch das Hauptinstrument der klimatischen Charakteristik. Da aber zu einer HK eine sehr grosse Beobachtungszahl gehört, ausserdem viel kritische und rechnerische Arbeit erforderlich ist, so ist bisher wenig vergleichbares Material darin vorhanden. Es ist aber diese HK der einzige Stützpunkt des Mittelwertes. Der Mittelwert ist die Abszisse des Schwerpunktes der Häufigkeitsfläche. Man ersieht daraus, dass eine kleinere oder grössere Konstanz des Mittelwertes von der Konstanz der HK abhängt. Die Sicherheit oder Zuverlässigkeit des Mittelwertes ist demnach auch abhängig von der Änderung der HK, also von der Änderung des Klimas. Diese Änderung soll hier vorläufig ausser Acht gelassen werden. Wir setzen eine konstante HK voraus und wollen daraus die Sicherheit eines n -jährigen Mittelwertes ableiten. Doch schon zur Darstellung der HK müssen wir eine Auszählung vornehmen. Wenn uns genügend Beobachtungen zur Verfügung stehen, so werden wir die Auszählung nach »Klassen« vornehmen, die sich voneinander nur in der letzten Dezimale unterscheiden. Wir zählen z. B. bei der Temperatur die Häufigkeit von $0,1^{\circ}$ C zu $0,1^{\circ}$ C. Das wird aber bei den

meisten Beobachtungsreihen zu keiner glatten Häufigkeitskurve führen, weil die einzelnen Klassen auch leer ausfallen können. Wenn wir dann die Klassenbreite vergrössern und z. B. mit $0,5^{\circ}$ C annehmen, so werden 5 frühere Klassen in eine zusammengezogen. Wir erhalten hier natürlich weniger Klassen, der Kurvenzug wird nun zwar einheitlicher, doch ist jetzt auch die Sicherheit oder die Zuverlässigkeit der Häufigkeitskurve und hiedurch auch des Mittelwertes nur $0,5^{\circ}$ C. Dieses Mass der Zuverlässigkeit klimatologischer Mittelwerte gab J. Goldberg an²⁾ und es ist wohl einwandfrei, nur liegt einige Willkürlichkeit in dem Begriffe eines glatten Kurvenverlaufes. Nach Goldberg kann man die Sicherheit des Mittelwertes definieren: »als die kleinste Klassenbreite, bei welcher die HK einen glatten Verlauf bei deutlichem Maximum aufweist«.

Diese wenn auch mehr nach geometrischen Merkmalen bestimmte Sicherheit oder Zuverlässigkeit des Mittelwertes ist aber *unabhängig* von der Form der HK, wogegen die aus der Fehlerrechnung übernommenen Formeln nur für eine einzige Kurve, die Gauss'sche Glockenkurve (Kurve der Fehlerhäufigkeit) gelten.

Aber selbst dann, wenn die meisten meteorologischen HK der Gauss'schen Glockenkurve gleichen würden, sind die Formeln, wie sie z. B. in *Köppen-Geiger*, Handbuch der Klimatologie (Bd. I. Teil B. S. 95.) vorkommen, sachlich und mathematisch unrichtig.

Mathematisch ist ihre Anwendung unrichtig, weil diese Formeln nur dann gelten, wenn der Mittelwert der Vertreter einer physikalisch bestehenden Grösse ist, so dass die Abweichungen auf zufällige Fehler zurückgeführt werden können, deren Häufigkeitsgesetz durch die Gauss'sche Glockenkurve *in voraus gegeben* ist, und die Messgenauigkeit von der Beobachtungsanzahl abhängt. Hier ist der Mittelwert in den bei allen Messungen gleichen Dezimalen vollständig *sicher*. Die Sicherheit hängt nicht von der Beobachtungsanzahl ab und nur die *Genauigkeit* wird durch die Messungshäufung vergrössert: es können mehr Dezimalstellen mitgenommen werden. Bei den klimatologischen Mittelwerten ist die *Genauigkeit* unabhängig von der Anzahl der Messungen durch andere Umstände gegeben, wogegen die *Sicherheit* durch die Häufung der Beobachtungen vergrössert werden soll. Die Anzahl der Dezimalstellen kann nicht vergrössert werden. Sachlich ist es natürlich unmöglich nur auf Grund äusserer Ähnlichkeit der Häufigkeitskurven auf innere Gleichheit zu schliessen. Der Begriff des mittleren Fehlers aus der Methode der kleinsten Quadrate ist in die Kollektivmasslehre als Streuung eingegangen, was noch sinnvoll sein kann, obwohl für gewöhnliche Mittelwerte genügen würde, wenn die »mittlere Abweichung« der Reihe angegeben würde. Der wahrscheinliche Fehler eines Mittelwertes hat aber in der Kollektivmasslehre absolut keinen Sinn, weil der Fehler des Mittelwertes nicht kleiner sein kann als der jeder einzelnen Beobachtung. Nur seine Sicherheit d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass er sich durch weitere Beobachtungen nicht ändern wird, kann durch die Anzahl geändert werden. Die Wahrscheinlichkeit der Änderung hängt aber in erster Linie von der *Form* der HK ab und eben darum kann sie nicht unter Voraussetzung einer bestimmten Kurve (der Gauss'schen Fehlerkurve) gerechnet werden.

²⁾ Dr. Jos. Goldberg: Ueber das Maass der Zuverlässigkeit klimatologischer Mittelwerte. Kroat. Geograph. Ztschrift 1950. No 2. S. 169.

Es ist demnach sinnlos auf Grund dieses wahrscheinlichen Fehlers die Anzahl der Jahre herausrechnen zu wollen, die eine bestimmte Sicherheit des Mittelwertes garantieren würden. Dies gilt nicht einmal dann, wenn die betreffende HK streng der Gauss'schen Fehlerkurve entspräche.

Es ist auffallend, dass in der mathematischen Fehlerrechnung Niemandem eingefallen ist aus dem wahrscheinlichen Fehler des Mittelwertes die Anzahl der Beobachtungen anzugeben die eine bestimmte Genauigkeit des Mittelwertes garantieren würden! Doch bei der unkorrekten und wenig sinnvollen Übertragung in das Gebiet der Kollektivmasslehre ist diese Umkehrung der Formel vorgekommen und führt jahrzehntelang ein verborgenes Dasein in verschiedenen klimatologischen Werken. Wenn man die HK kennt, so wäre es allgemein möglich anzugeben, welche Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Mittelwert von n Beobachtungen dieses Elementes hat. Es ist zwar mathematisch bisher nur für die Gerade als Häufigkeitskurve dieses Problem gelöst (Lagrange), für die Gauss'sche Kurve liegt meines Wissens noch keine Lösung vor. Wir können danach noch nicht die Wahrscheinlichkeit eines Mittelwertes von n Beobachtungen bei gegebener beliebiger HK angeben, können also die Zuverlässigkeit oder Sicherheit des Mittelwertes, die ja mit der Wahrscheinlichkeit identisch ist, nicht in dieser Form angeben.

Ein anderer, noch nicht versuchter Weg wäre die Untersuchung der mittleren Abweichung der Einzelwerte, dann der 5-, 10-, 15- usw. -jährigen Mittelwerte derselben Reihe um zu zeigen, wie rasch die mittleren Abweichungen von demselben Mittelwert abnehmen. Zu diesem Zwecke sind aber kaum genügend lange homogene Reihen vorhanden. Wir haben demnach vorläufig ausser dem Goldbergschen Kriterium kein anderes einwandfreies zur Verfügung um die Sicherheit eines langjährigen Mittelwertes irgendwie zu charakterisieren.

Die zwei Begriffe Abweichung (Anomalie) und Veränderlichkeit werden leider in der Klimatologie voneinander nicht unterschieden, obwohl für beide sehr gute Verwendung zu finden ist²⁾.

Unter Abweichung sollte stets die Differenz vom Mittelwert verstanden werden, wogegen die Veränderlichkeit durch Differenzen der aufeinanderfolgenden Beobachtungen charakterisiert sein könnte.

Jede Reihe hat demnach eine mittlere Abweichung und eine mittlere Veränderlichkeit als zwei ganz verschiedene Zahlen, die aber zu der Zufälligkeit oder Periodizität der Reihe in ursächlichem Verhältnis stehen.

Die Veränderlichkeit eines Mittelwertes kann dann nur so verstanden werden, dass genügend aufeinanderfolgende (nicht übergreifende) Mittelwerte von derselben Beobachtungsanzahl n vorhanden sind, ihre aufeinander folgenden Differenzen ergeben die mittlere Veränderlichkeit.

Wenn wir die Sicherheit eines vieljährigen Mittelwertes, also seine Wahrscheinlichkeit bei gegebener Häufigkeitskurve in Teilen von 1 (also voller Sicherheit) angeben, so könnte die Differenz gegen 1 auch als Veränderlichkeit angesprochen werden, da sie die Wahrscheinlichkeit aller anderen Mittelwerte angibt. Das Verhältnis dieser Veränderlichkeit zu der oben definierten anzugeben ist vorläufig nicht möglich.

Die Sicherheit eines Mittelwertes kann natürlich niemals grösser sein als seine Genauigkeit.

²⁾ Meteor. Zeitschrift 45. 186 (1928).