Über das Maass der Zuverlässigkeit klimatologischer Mittelwerte.

Von Dr. J o s. G o l d b e r g.

Wenn auch die immer schärfere kritische Bewertung des Mittelwertes als Repräsentanten einer Zahlenreihe seine Alleinherrschaft in der Klimatologie einzuschränken beginnt, so bleibt es doch ausser Zweifel, dass ihm bei der Vergleichung von Beobachtungsresultaten immer eine bedeutende Rolle zukommen wird.

Die Vorzüge, welche der Mittelwert als Resultat einer Reihe von Beobachtungen (Messungsergebnissen) etwa in der Geodäsie hat, hat er teilweise auch für die Klimatologie: Einfache Berechnung durch eindeutige Rechenoperationen, Unveränderlichkeit gegenüber Aenderungen des Nullpunktes und der Maasseinheit der Messkala. Ein weiterer aber sonst hervorgehobener Vorzug — dass der Mittelwert, da er zwischen dem grössten und kleinsten Messergebnis liegen muss, innerhalb des Messbereiches liegt, — ist wohl für Genauigkeitsuntersuchungen auf Grund der Fehlertheorie von Wert, für die Klimatologie jedoch ist diese Eigenschaft unwesentlich. Man kann ein Klima ebenso gut durch Extremwerte charakterisieren wie durch einen »mittleren« Wert meteorologischer Elemente. — Wenn der Mittelwert auch den Angriff eifriger Verfechter anderer Charakterisierungmethoden überdauern wird, so wird man doch genötigt sein, seine Existenzberechtigung aus anderen Gründen herzuleiten als bisher, der Mittelwert wird gewissermassen regieren eingeschränkt durch eine »Verfassung«.

Die neue dem Mittelwert in der Klimatologie zukommende Stellung wird bestimmt durch die nicht abzuweisende Forderung, dass auch auf die Beurteilung und Bearbeitung meteorologischer Beobachtungsreihen die Methoden der mathematischen Statistik anzuwenden sind, dass sie als Kollektive anzusehen sind.

Die Eigenschaften und Gesetzmässigkeiten von Kollektiven sind in ihrer Verteilungstafel und in der sich aus ihr ergebenden H ä u f i g k e i t s - f u n k t i o n enthalten. Die Häufigkeitsfunktion ist in einzelnen Fällen durch einen analytischen Ausdruck in geschlossener Form darstellbar, in der Regel bei empirischen Kollektiven aber durch eine Reihe von Funktionen. In beiden Fällen wird das Kollektiv durch die K o n s t a n t e n charakterisiert, welche im analytischen Ausdruck der Häufigkeitsfunktion auftreten. Eine dieser Konstanten, die erste Charakteristik eines Kollektivs und seiner Häufigkeitsfunktion, ist der Mittelwert.

Hier ergibt sich ein fundamentaler Unterschied in der Auffassung des Mittelwertes, welcher für die Klimatologie und für den Begriff des Klimas überhaupt von Bedeutung ist. Während der Mittelwert für die Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung der w a h r s c h e i n l i c h s t e W e r t einer gemessenen Grösse ist, ist er für die mathematische Statistik e i n e K o n s t a n t e der Häufigkeitsfunktion eines Kollektivs. Bei der Messung etwa einer Länge wird jedoch ein wahrer Wert dieser Länge, wenn er auch nicht festgestellt werden kann, als existierend gedacht. Für ein Kollektiv braucht aber ein solcher Wert durchaus nicht zu existieren und exsistiert auch in der Regel nicht. Es gibt beispielweise keine T e m p e r a t u r von Zagreb, es gibt nur (ständig wechselnde) Temperaturen von Zagreb. Bei dem Studium von meteorologischen Beobachtungsreihen zum Zwecke der Bestimmung eines Klimas kann es sich also nur darum handeln, aus dem Kollektiv der Maasszahlen jene Grössen herauszuschälen, welche als zeitlich konstant angesehen werden können, das »Beständige in der Erscheinungen Flucht« zu erforschen.

Der Mittelwert kann also eine klimatische Charakteristik sein, wenn und weil er zeitlich konstant ist, nicht aber weil er ein mittlerer Wert ist oder der wahrscheinlichste Wert irgend einer Grösse. Erst wenn ein Klima durch als konstant anzusehende Mittelwerte charakterisiert ist, kann man eigentlich feststellen, ob es sich um eine Aenderung des Klimas handelt, falls in einer späteren Epoche abweichende Mittelwerte gefunden werden.

Entsprechend der Auffassung des Mittelwertes wurde in der Klimatologie auch seine Zuverlässigkeit im Sinne der Fehlertheorie geprüft und beurteilt: es wurde für die klimatologischen Mittelwerte als Maass der Zuverlässigkeit gewöhnlich der wahrscheinliche Fehler, etwa nach der Fechner'schen Formel,[1]) berechnet. — Nun kann nach den obigen Darlegungen die Zuverlässigkeit eines Mittelwertes nur von dem Maasse abhängen, in welchem seine zeitliche Konstanz gewährleistet ist. Den Beweis dieser Konstanz leisten aber die Fehlermaasse der Fehlertheorie nicht. Ausserdem sind gegen ihre Anwendung auf Mittelwerte von der Natur der klimatologischen Mittelwerte auch andere schwerwiegende Gründe[2]) ins Treffen zu führen. Die Berechnung dieser Fehlermaasse erfolgt allerdings auch in der Praxis der Ausgleichungsrechnung aus den scheinbaren Fehlern, definiert werden sie jedoch durch die wahren Fehler. Da aber bei den klimatologischen Mittelwerten von einem »wahren« Werte nicht gesprochen werden kann, gibt es auch keine wahren Fehler, so dass die Fehlermaasse gar nicht rationell definiert sind.

Im Folgenden wird nun ein Maass für die Zuverlässigkeit klimatologischer[3]) Mittelwerte vorgeschlagen und begründet, welches ihre zeitliche Konstanz ins Auge fasst und sich auf die Betrachtung der Häufigkeitskurve stützt.

Sei $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine Reihe von Einzelwerten, welche je mit den Häufigkeiten $p_1, p_2, \ldots p_n$ vorkommen, und M ihr Mittelwert, so ist

$$M = x_1 \cdot \frac{p_1}{N} + x_2 \cdot \frac{p_2}{N} + \ldots + x^n \cdot \frac{p_n}{N}$$

wobei

$$N = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

die Gesamtzahl der Einzelwerte ist.

Die Koeffizienten sind die aus der gegebenen Reihe beurteilten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Werte $x_1 \cdots x_n$. Die $\frac{p}{N}$ sind eigentlich die relativen Häufigkeiten der x im gegebenen Zahlenkollektiv; sie würden sich bei unbegrenzt zunehmendem N einem Grenzwert nähern und erst dieser Grenzwert der relativen Häufigkeit ergibt bekanntlich die

[1]) Hann, Handbuch d. Klimatologie, Bd. I. S. 25, 3. Aufl. 1908.

[2]) S. Škreb, Met. Ztschr. Bd. XLIV. S. 466 (1927); Bd. XLV. S. 342 (1928).

[3]) Die Betrachtungen können natürlich sinngemäss auch auf andere Kollektive angewandt werden.

Wahrscheinlichkeit exact. Empirisch wird aber die Wahrscheinlichkeit auch schon aus beschränkten Kollektiven beurteilt. Wir wollen die $\frac{p}{N}$ von den exacten Wahrscheinlichkeiten, ihren Grenzwerten, unterscheiden und sie Quasi-Wahrscheinlichkeiten nennen. Die einzelnen Glieder im Ausdruck für M stellen dann die Hoffnungs- oder E r w a r t u n g s w e r t e der $x_1 \ldots x_n$ vor.

Eine Verkleinerung von N wird im Allgemeinen eine Vergrösserung der Quasi-Wahrscheinlichkeiten $\frac{p}{N}$ bewirken. Natürlich kann die Abnahme von N eine der p besonders stark verkleinern, so dass die betreffende Quasi-Wahrscheinlichkeit nicht vergrössert wird. Umso mehr müssen aber dann die übrigen $\frac{p}{N}$ zunehmen.

Ein Gleichnis bildet der Fall, dass ein Körper in mehreren Punkten gestützt ist. Je weniger Stützen, umso grösser die durchschnittliche Belastung der einzelnen, wobei es aber natürlich geschehen kann, dass einzelne der Stützen durch eine Verrückung der Last entlastet werden. Analog kann man hier sagen, dass sich der Mittelwert auf die Einzelwerte »stützt«. Aus je weniger Einzelwerten er abgeleitet wird, umso stärker werden die Einzelwerte zur Stützleistung herangezogen; ein Maass für die Belastung eines Einzelwertes ist seine Wahrscheinlichkeit, denn sie bestimmt die mathematische »Erwartung«, welche sich an diesen Einzelwert knüpft. Wenn also ein aus einer kleineren Zahl von Beobachtungen (oder Beobachtungsmittelwerten) abgeleiteteter Mittelwert als weniger sicher angesehen wird, so können wir den Grund dafür darin erblicken, dass die Einzelwerte dabei durch unsere Erwartung stärker beansprucht werden, mehr »mit Wahrscheinlichkeit belastet« sind, als erfahrungsgemäss zulässig erscheinen mag.[4])

Es ergibt sich nun die Frage nach dem zulässigen Maass der Erwartung, welche an einen Einzelwert zu knüpfen ist. Dass ein solches Maass überhaupt bestimmbar ist, folgt aus der Existenz eines Grenzwertes, welchem sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei fortgesetzter Vermehrung der Einzelfälle nähert. Wird die Zahl N der Einzelwerte x durch Fortsetzung der Beobachtung immer grösser, so nähern sich die $\frac{p}{N}$ festen Grenzwerten, die Häufigkeitskurve nimmt eine Gestalt an, welche sich durch weitere Vermehrung nicht mehr ändert. Die dieser Grenzform der Häufigkeitskurve entsprechenden Charakteristiken der Verteilung sind dann als unveränderlich anzusehen.

Damit also die zeitliche Unveränderlichkeit eines Mittelwertes gewährleistet sei, müsste er aus einer solchen Zahl von Einzelwerten hergeleitet sein, dass ihre relativen Häufigkeiten sich durch weitere Vermehrung nicht mehr ändern und folglich die exacte Wahrscheinlichkeit der bezüglichen Einzelwerte vorstellen. Diese Grenzwerte bestimmen auch das zulässige Maass der Erwartung für jeden Einzelwert.

Es ist kaum anzunehmen, dass dieser idealen Forderung in der Praxis oft genügt werden könnte. Bei klimatologischen Mittelwerten wären hiefür in der Regel allzugrosse Beobachtungsperioden nötig. Ja es könnte eine

[4]) Vom Standpunkt der Ausgleichungsrechnung würde man nur die als »Gewichte« bezeichneten p ins Auge fassen und von einem zu grossen Gewicht der Einzelwerte sprechen.

Klimaänderung eintreten, bevor die Häufigkeitskurve ihre stationäre Form annimmt.

Dass die relativen Häufigkeiten bei fortgesetzter Beobachtung noch grosse Aenderungen erfahren dürften, ist erfahrungsgemäss dann zu gewärtigen, wenn die Häufigkeitskurve einen sehr unruhigen, zackigen Verlauf mit stark einspringenden und hervortretenden Stücken aufweist. Bei zunehmender Zahl der Beobachtungen werden die einspringenden Teile (relativ zu seltene Einzelwerte) aufgefüllt, die Vorsprünge abgeflacht, die Häufigkeitskurve wird »glatter«.

Nun werden die Häufigkeitskurven empirischer Kollektive immer mit einer bestimmten »Klasseneinteilung« gebildet: das Argument lässt man nicht stetig, sondern in bestimmten Stufen sich ändern, jede Stufe bestimmt ein Intervall, eine »K l a s s e«; die Abzählung stellt fest, wie oft der Argumentwert in jede der so gebildeten Klassen fällt. Die Grösse des Intervalls von Stufe zu Stufe nennt man die K l a s s e n b r e i t e.

Vergrössert man für ein gegebenes Kollektiv die Klassenbreite, so wächst die Zahl der in eine Klasse fallenden Einzelwerte. Der Effekt gleicht also dem einer Vermehrung der Gesamtzahl der Beobachtungen, der Verlauf der Häufigkeitskurve wird glatter. Die Häufigkeitskurven solcher Phänomene wie die klimatischen, welche durch so konstante Ursachen wie die Revolution und die Rotation der Erde, die orographischen Verhältnisse u. s. w. bewirkt und beeinflusst werden, haben bei genügend grosser Zahl der Beobachtungen und entsprechender Klassenbreite eine Form, bei der von einem Häufigkeitsmaximum ein mehr oder weniger symmetrischer stetiger Abfall zu den vom häufigsten abweichenden Argumentwerten stattfindet.

Zeigt also die Häufigkeitskurve der für ein klimatisches Element gefundenen Einzelwerte bei einer bestimmten Klassenbreite einen glatten Verlauf, wobei auch das obige Merkmal des Abfalls vom Maximum erscheint, so ist der Schluss statthaft, dass die relativen Häufigkeiten der einzelnen Klassen bei weiterer Fortsetzung der Wertereihe keine grossen Aenderungen erfahren dürften. Es wird also für die Zwecke der Praxis ausreichend sein, die bei glatter Häufigkeitskurve gefundenen relativen Häufigkeiten als Grenzwerte anzusehen. Der auf diesen Grenzwerten der relativen Häufigkeiten $\frac{p}{N}$ aufgebaute Mittelwert kann nun auch als zeitlich unveränderlich angesehen werden mit der Einschränkung, dass diese Unveränderlichkeit nur für solche Beträge der Änderungen Geltung hat, welche die Klassenbreite überschreiten.

Wir können demnach das Maass der Zuverlässigkeit des Mittelwertes definieren als d i e k l e i n s t e K l a s s e n b r e i t e, b e i w e l c h e r d i e H ä u f i g k e i t s k u r v e e i n e n g l a t t e n V e r l a u f b e i d e u t l i c h e m M a x i m u m a u f w e i s t.

Ich möchte für diese Zuverlässigkeitsmessung als Beispiel das Jahresmittel der Bewölkung in Zagreb, abgeleitet aus der 65-jährigen Beobachtungsperiode 1862—1926, behandeln.

Um die Zuverlässigkeit dieses Gesamtmittels zu prüfen, bestimmen wir die Abweichungen der Jahresmittel aller 65 Beobachtungsjahre von diesem Gesamtmittel und bilden die Häufigkeitskurve dieser Abweichungen vorerst mit der Maasseinheit 1% als Klassenbreite. Die Häufigkeitszahlen sind folgende:

Klassenbreite 1%

Klasse	—9	—8	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11
Häufigkeit	1	2	0	4	6	2	7	6	2	6	5	4	3	6	3	3	1	1	1	1	1

Die hieraus sich ergebende Häufigkeitskurve ist überaus unausgeglichen, selbst ein ganz in der Nähe des Gesamtmittels liegender Wert wie — 1 zeigt eine viel zu kleine Häufigkeit. Wir vergrössern nun die Klassenbreite auf 2% (in die Klasse 0 fallen alle Abweichungen, deren Absolutwert kleiner ist als 1%, in die Klasse + 2 solche, die $\geqq$ 1% sind und < 3% u. s. w.)

Klassenbreite 2%

Klasse	—12	—10	—8	—6	—4	—2	0	+2	+4	+6	+8	+10	+12
Häufigkeit	0	1	2	8	8	10	9	9	11	3	3	1	0

Die Häufigkeitskurve erscheint nun wesentlich glatter, zeigt aber gerade in der Nähe des Gesamtmittels einen gestörten Verlauf, der kaum ganz auf einen negativen Excess zurückzuführen wäre. Wir schreiten daher zu weiterer Vergrösserung der Klassenbreite auf 3%. (In die Klasse 0 fallen nun alle Abweichungen, deren Absolutbetrag kleiner ist als 15‰, in die Klasse + 3 solche, die $\geqq$ 15‰ und < 45‰ u. s. w.)

Klassenbreite 3%

Klasse	—12	—9	—6	—3	0	+3	+6	+9	+12
Häufigkeit	0	3	10	14	14	14	7	3	0

Die Häufigkeitskurve kann nun als ausreichende glatt angesehen werden. Die Zuverlässigkeit des Jahresmittels der Bewölkung in Zagreb (57%) ist demnach bestenfalls mit 3% zu bewerten.

(Ein negativer Excess der Häufigkeitskurve ist zu vermuten.)

Ein Vergleich dieses Zuverlässigkteismaasses mit dem Betrag des wahrscheinlichen (nach der Fechner'schen Formel berechneten) Fehlers mag nicht unerwünscht sein. Da die mittlere Anomalie des Jahresmittels in unserer Zahlenreihe 3,8% beträgt, ist der wahrscheinliche Fehler des 65-jährigen Jahresmittels 0,4%. Es resultiert also für unseren Fall eine 7—8 fache Überschätzung der Zuverlässigkeit des Gesamtmittels, wenn man sie nach dem wahrscheinlichen Fehler schätzt.

Man mag zugeben, dass eine V e r g l e i c h u n g von Wertereihen zum Zwecke klimatologischer Bearbeitung auch auf Grund des wahrscheinlichen Fehlers brauchbare Resultate ergeben kann. Der A b s o l u t w e r t des wahrscheinlichen Fehlers dürfte jedoch als Maass der Zuverlässigkeit betrachtet gewiss zu klein sein. Ich bezweifle, dass irgend ein Anhänger des wahrscheinlichen Fehlers wirklich glaubt, dass beispielsweise in unserem Falle ein nach weiteren 65 Jahren aus 130 Jahren gebildetes Jahresmittel der Bewölkung sich gegenüber dem 65-jährigen als innerhalb 0,4% unverändert erweisen würde.

Der Wert der mittleren Anomalie 3,8% liegt dem Wert unserer maassgebenden Klassenbreite recht nahe. Doch kann diese Übereinstimmung nicht von Wert sein, da ja die mittlere Anomalie ihrem Wesen zufolge von der Zahl der Reihenglieder unabhängig ist. Als ein Maass der Streuung hat die mittlere Anomalie insofern eine Beziehung zu unserem Zuverlässigkeitsmaass, als bei kleinerer Streuung die Besetzung der dem Mittelwert nächstliegenden Klassen reicher ist, also schon bei kürzerer Reihe oder auch kleinerer Klassenbreite eine Glättung der Häufigkeitskurve in der Nähe des Mittelwertes ermöglicht.

Zagreb, Geophysikalisches Institut, November 1929.

Rasa, pleme, narod, nacija . . .

Napisao Stj. Ratković.

Prošli svjetski rat vodio se nominalno i za pravo samoodređenja narodâ pa je stoga razumljivo, da se o nacionalnome pitanju i o problemima, koji su s time u vezi, valjda nije nikada toliko govorilo i pisalo kao za vrijeme rata i u naše poratno doba. Dalji razlog za ovo treba tražiti i u tome, što nijesu točno determinirani pojmovi, koji dolaze u obzir, niti su utvrđeni izrazi za oznaku pojedinih pojmova. Tako se jedamput jedan izraz homonimno upotrebljava za oznaku različnih pojmova, a drugi put opet različni izrazi kao sinonima za oznaku istoga pojma.

Pojedini pojmovi opet nijesu nedvoumno i opće vrijedno utvrđeni, jer nije uspjelo fiksirati ono, što im je bitno, što sačinjava njihov sadržaj, a prema tome i kako im je omeđen opseg. Ovo se osobito tiče i glavnoga pojma, koji nas ovdje i najviše zanima, pojma narod (i njemu najsrodnijih pojmova kao nacija, nacionalitet, nacionalnost . . .)

Ovakove neodređenosti, a prema tome i zamjenjivanje pojmova i njihovih naziva, čega ima u svima jezicima, nijesu samo neugodna smetnja u teoretičnome raščinjavanju ovih pitanja, već mogu da uzrokuju i neželjene posljedice u javnome životu. Baš s ovakog jednog razloga osjetio je već 1901., dotično 1914. god., potrebu razjašnjenja pojma »narod« Alfred Kirchhoff, kada je napisao ove riječi: »Aber es dünkt doch sehr an der Zeit zu sein, dass wir den Begriff »Nation« in befriedigender Klarheit erfassen, weil er eine so mächtige Rolle im täglichen Leben spielt und bei seiner ursprünglichen Mehrdeutigkeit leicht als bestrickende Parteiparole von den verschiedensten Seiten missbraucht werden kann.«[1])

Ne će biti pretjerano, ako se ustvrdi, da i u našem životu ovo posljednjih 10 godina ne bi možda bilo ponekog teškog momenta, da su i kod nas bili raščišćeni ovi pojmovi i bila jasna suština ovih pitanja. Jer i kod nas su se brkali i pojmovi i izrazi, pa smo mi bili čas »rasa«, čas »narod«; sad su Hrvati, Srbi i Slovenci bili jedan, troimeni narod, a svaki za sebe »dio« naroda, »grana« naroda ili »pleme«; drugi put je svaki ovaj »dio« označivan kao poseban narod; kod trećih smo svi zajedno bili »nacija« i to opet kod nekih gotova (integralni nacionalisti), a kod drugih tek nacija in statu nascendi (progresivni nacionalisti); bilo je kod nas ispravnih »nacionalista«, a kao njihova protivnost »anacionalnih« elemenata ili opet »separatista«. Operira se izrazima i pojmovima, a da se uvijek ne poznavaju njihova objektivna

[1]) Kirchhoff: Mensch und Erde, 4. Auflage, Teubner, Leipzig 1914. Str. 55.