

UDK 556.55(497.5):528.063.4:553.6.002.33:691:519.65:311
Izvorni znanstveni članak

Usporedba metoda interpolacije batimetrijskih mjerenja za praćenje promjena volumena jezera

Ivan MEDVED, Boško PRIBIČEVIĆ, Damir MEDAK,
Ivana KUZMANIĆ – Zagreb¹

SAŽETAK. Eksploatacija mineralnih sirovina u Republici Hrvatskoj snažno se intenzivirala u posljednjih petnaestak godina. Tu se ponajprije misli na eksploataciju radi pridobivanja građevinskog materijala. Sukladno Zakonu o rudarstvu (NN 2009), koncesionari za eksploataciju mineralnih sirovina dužni su najmanje jednom godišnje geodetski snimiti eksploatacijsko polje radi određivanja iskopanog materijala. U ovome radu opisane su geodetske metode snimanja iskopa na šljunčari i izračuna volumena iskopanog materijala. Pritom je posebna pozornost posvećena različitim metodama izračuna volumena i njihovoj točnosti. Jezero Novo Čiče umjetno je stvoren vodeni ekosustav koji je nastao i služi za potrebe eksploatacije šljunka i pijeska. Batimetrijska mjerenja dna jezera izvedena su suvremenim geodetskim metodama i tehnologijom GPS/echosounder. U radu su korišteni podaci iz dvije serije mjerenja koja su poslužila za praćenje količine iskopanih mineralnih sirovina na dnu jezera. Na temelju kvalitetnih i visokopreciznih podataka izmjere stvoren je trodimenzionalni model dna jezera. U procesu interpolacije koja je potrebna za izradu trodimenzionalnih modela korišteno je više različitih metoda te su uspoređene dobivene razlike. Na primjeru izračuna volumena prikazani su rezultati različitih algoritamskih rješenja, koji se danas uobičajeno koriste u različitim računalnim programima.

Ključne riječi: interpolacija, geostatistika, kriging, batimetrija, trodimenzionalni modeli, izračun volumena.

1. Uvod

Donošenjem Zakona o rudarstvu (NN 2009), članak 111. stavak 1., nametnuta je koncesionarima za eksploataciju mineralnih sirovina obveza snimanja stanja eksploatacijskog polja najmanje jednom godišnje. Također je u stavku 2. istoga članka definirano da to snimanje moraju izvoditi ovlaštene geodetske tvrtke

¹ Ivan Medved, dipl. ing. geod., prof. dr. sc. Boško Pribičević, prof. dr. sc. Damir Medak, Ivana Kuzmanić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, e-mail: ivan.medved@geof.hr, bprbic@geof.hr, damir.medak@geof.hr, ikuzmanic@geof.hr.

odnosno stručnjaci. Time se geodetskoj struci otvorio prostor za obavljanje tih zahtjevnih zadataka, ali su se otvorila i pitanja metoda mjerenja, njihove obrade te metoda izračuna volumena i njihova točnost.

U Republici Hrvatskoj eksploatiraju se 23 vrste mineralnih sirovina na 647 odobrenih eksploatacijskih polja (Krašić 2006).

Ovaj rad usmjeren je na istraživanje primjene različitih metoda interpolacije u ustanovljivanju prostornog variranja terena na području jezera Novo Čiče. Jezero je nastalo umjetnim djelovanjem čovjeka za potrebe eksploatacije mineralnih ruda, a njegova su posebnost nagli prijelazi u topografiji dna što je zanimljivo za analizu i interpretaciju mjerenih podataka (Đapo i Medved 2003).

Suvremena tehnologija omogućava integraciju različitih mjernih uređaja u jedinstveni sustav kako bi se dobile točnije i pouzdanije informacije te povećala ekonomičnost radova. Za određivanje koordinata objekata pod vodom koristile su se različite klasične metode geodetske hidrografije (Ingham 1992). Razvojem podvodne akustike (Lurton 2002) s jedne strane i satelitskog određivanja položaja (Hofmann-Wellenhof i dr. 2001) s druge strane, u posljednjih desetak godina se kao najtočnija i najekonomičnija metoda određivanja topografije dna mora, jezera i rijeka pokazala kombinacija ultrazvučnog dubinomjera i GPS-prijamnika, detaljno opisana prigodom prve suvremene batimetrijske izmjere Plitvičkih jezera (Medak i Pribičević 2000). Batimetrijska mjerenja koja kombiniraju dvije ultrazvučne sonde omogućuju pridobivanje podataka o debljini naslaga na dnu u relativno kratkom vremenu (Pribičević i dr. 2007).

Osim naprednih metodologija u radu koje omogućavaju dobivanje kvalitetnih podataka, potrebno je istaknuti i važnost valjane obrade i reprezentacije podataka. Integralnim pristupom te primjenom spoznaja i metoda iz srodnih geoznanosti, posebice geostatistike, pri analizi rezultata batimetrijskih mjerenja dolazimo do cjelovitijih i pouzdanijih rješenja (Medak i dr. 2008).

Naime, da bismo mogli prikazati izgled kontinuirane Zemljine plohe sastavljene od beskonačno mnogo diskretnih točaka potrebno je provesti prostornu interpolaciju te na taj način upotpuniti izmjereni skup podataka u svrhu dobivanja vjerodostojnog modela. Odabir postupka interpolacije znatno utječe na konačan rezultat.

Kao krajnji rezultat dobiva se digitalni trodimenzionalni model mjerenog područja koji će na najbolji mogući način vizualno predstaviti podatke i poslužiti kao podloga za istraživanja, analize, gospodarenje područjem i dr. Vjerno prikazivanje topografije dna prema tome nije interesantno samo geodetskoj struci već ima višestruki značaj u mnogim drugim strukama koje ovisno o dobivenim rezultatima izmjere usmjeravaju svoju djelatnost i donose odluke vezano uz taj prostor.

Svrha je ovoga rada izraditi trodimenzionalni model ograničenog dijela jezera Novo Čiče različitim metodama interpolacije te na taj način međusobno usporediti rezultate interpolacije istog skupa podataka. Korištenjem podataka batimetrijske izmjere dijela jezera Novo Čiče dobivenih iz dviju serija mjerenja s vremenskom distancom moguće je pratiti količinu izvađenih mineralnih sirovina i preostalih zaliha (Pribičević 2005).

Osim vizualne usporedbe trodimenzionalnih modela, razlike je potrebno kvantitativno prikazati u obliku podataka volumena, vrijednosti reziduala, vertikalnih

presjeka i razlika prostornih mreža dobivenih interpolacijom. Pritom su postupci i rezultati izračuna volumena zasebno obrađeni. Na taj način vidljivo je u kojoj se mjeri rezultati pojedinih metoda razlikuju te koje se prednosti, odnosno nedostaci mogu pripisati kojoj metodi.

Predmet ovoga rada su prednosti, odnosno nedostaci pojedinih interpolacijskih metoda. Glavna je pretpostavka da će se uporabom odgovarajuće interpolacijske metode dobiti pouzdaniji prikaz promatranog područja.

2. Interpolacija

Pojam interpolacija kovanica je *lat.* riječi *inter*: između i *grč.* riječi *polos*: os, točka, čvor. Drugim riječima, interpolacija je definirana kao postupak određivanja nove nepoznate vrijednosti između dviju ili više poznatih vrijednosti neke funkcije (de Smith i dr. 2009). Funkcija u tom slučaju može biti poznata, ali u presloženoj formi za računanja; ili može biti nepoznata, ali su poznate neke informacije o njoj, kao na primjer vrijednosti funkcije na nekom skupu točaka.

Upravo taj drugi slučaj čest je u rješavanju mnogih inženjerskih i znanstvenih zadataka kada je mjerenjima dobiven samo određeni broj vrijednosti funkcije, tzv. diskretni skup točaka, a potrebno je odrediti i približne vrijednosti te funkcije u drugim točkama.

Procjenu, odnosno interpolaciju moguće je načiniti u jednoj, dvije ili tri dimenzije. Procjena se može načiniti na temelju poznatih vrijednosti promatrane primarne varijable (autokorelacija) ili uz pomoć vrijednosti jedne ili više drugih sekundarnih varijabli na istom prostoru. Uvjet je da su sekundarne varijable u jakoj korelaciji s primarnom varijablom. Postoji također više metoda koje uključuju bilinearnu i bikubičnu interpolaciju u dvije dimenzije te trilinearnu interpolaciju u tri dimenzije.

Za razliku od klasičnoga statističkog pristupa, geostatistika uzima u obzir prostornu zavisnost varijabli. Geostatističke metode interpolacije polaze od pretpostavke da je poznavanjem vrijednosti nekog svojstva u poznatim točkama, moguće ustanoviti njegovu vrijednost i u nepoznatim točkama. Izdvojeno je nekoliko metoda interpolacije kojima su se interpolirali podaci u ovom radu.

2.1. Kriging

Kriging je geostatistička metoda interpolacije koja je zbog pouzdanih procjena prostorno distribuiranih varijabli našla primjenu u različitim granama znanstvenih istraživanja (Cressie 1992, de Smith i dr. 2009).

Procjena krigingom temelji se na uporabi poznatih vrijednosti neke varijable tzv. kontrolnih točaka čiji je utjecaj na procjenu izražen odgovarajućim težinskim koeficijentima. Najzahtjevniji postupak kod kriginga je određivanje težinskih koeficijenata za svaku kontrolnu točku pojedinačno. Prilikom procjene potrebno je zadovoljiti kriterije: da ona bude nepristrana te načinjena tako da je varijanca razlike između stvarnih i procijenjenih vrijednosti u odabranim točkama najmanja moguća (Malvić 2008).

Princip rada te metode najjednostavnije se može prikazati nizom jednadžbi kojima je definiran. Neka je neko svojstvo Z , primjerice dubina dna jezera, kontinuirano prostorno distribuirano i izmjereno na mjestima x_1, x_2, \dots, x_n s vrijednostima $Z_{(x_1)}, Z_{(x_2)}, \dots, Z_{(x_n)}$. Svojstvo Z naziva se regionaliziranim varijablom jer je njezina vrijednost distribuirana u prostoru. Vrijednosti x_1, x_2, \dots, x_n predstavljaju točke u kojima su očitane vrijednosti svojstva pa možemo zapisati $x_i = [x, y]$ za $i = 1, \dots, n$.

Vrijednost varijable procijenjena krigingom na temelju n kontrolnih točaka računa se prema formuli (1):

$$Z_h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \times Z_i, \quad (1)$$

gdje su:

λ_i – težinski koeficijenti za svaku lokaciju

$Z_i = Z_{(x_i)}$ – poznate vrijednosti varijable u okolnom području tzv. kontrolne točke

Z_h – vrijednosti varijable dobivene procjenom.

Nakon završetka procjene u točkama odabrane pravilne mreže moguće je također izračunati predviđenu i stvarnu pogrešku procjene. Te vrijednosti mogu se usporediti s mjerenom vrijednošću na kontrolnoj točki koja je upotrijebljena kao ulazni podatak. Na taj se način određuje pouzdanost procjene te kvaliteta odabranoga prostornog modela.

Najznačajnije je svojstvo te metode interpolacije da mjerene veličine zadržava kao fiksne, što znači da izravno uključuje originalan skup podataka koji se u procesu interpolacije neće mijenjati. Također zadržava trend mjerenih podataka prateći njihove sličnosti u određenim smjerovima.

Odnosi između postojećih i procijenjenih vrijednosti izražavaju se vrijednostima kovarijance ili variograma. Promjena varijance mjerene vrijednosti može se predočiti grafički kao prikaz standardnih pogrešaka procjene. Time je određen utjecaj poznate vrijednosti na procijenjenu vrijednost s obzirom na njihovu udaljenost.

Razvijeno je i nekoliko tehnika ili varijanti te metode kako bi se početni algoritam prilagodio zahtjevima različitih podataka. Neke od njih su jednostavni kriging (Simple Kriging), obični kriging (Ordinary Kriging), univerzalni kriging (Universal Kriging) (Ver Hoef 1993).

2.2. Metoda inverzne udaljenosti

Metoda inverzne udaljenosti je metoda interpolacije koja poput kriginga dodjeljuje odgovarajuće težinske koeficijente kontrolnim točkama ovisno o njihovoj udaljenosti od točaka pravilne prostorne mreže. Međutim, proračun koeficijenata i način njihova dodjeljivanja razlikuju se.

Eksponent udaljenosti (*engl. Power*) težinski je parametar koji kontrolira ovisnost težine o udaljenosti. On određuje koliko će brzo težina opadati ovisno o udaljenosti od čvorova prostorne mreže. Kako naziv metode kaže, one vrijednosti koje su

bliže točkama u kojima se procjenjuje vrijednost imat će veći utjecaj na proces interpolacije. Što je parametar bliži nuli, dobiveni prikaz sličniji je horizontalnoj plohi koja prolazi sredinom iz svih zadanih podataka. Što je parametar veći, topografija je dobivene plohe izraženija i značajnija je vrijednost najbliže točke čvoru mreže. Vrijednost parametra obično varira između 1 i 3. Najčešće se postavlja na vrijednost 2 jer tada stvara najpouzdaniji prikaz interpoliranih vrijednosti i blago zaglađuje plohu.

Osnovna jednadžba procjene metodom inverzne udaljenosti glasi (2):

$$Z_{iu} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{h_{ij}^\beta}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_{ij}^\beta}} \quad (2)$$

gdje su:

Z_i – poznate vrijednosti varijable u okolnom području tzv. kontrolne točke

Z_{iu} – vrijednosti varijable dobivene procjenom

$h_{ij} = \sqrt{d_{ij}^2 + \delta^2}$ – efektivni težinski koeficijent; njegova je vrijednost jednaka d_{ij}

ako je parametar zaglađivanja δ jednak nuli

d_{ij} – udaljenost između kontrolne točke i te vrijednosti koja se procjenjuje j

β – eksponent udaljenosti

δ – parametar zaglađivanja.

Metoda inverzne udaljenosti izvorno je egzaktni interpolator, što znači da kao i kriging zadržava vrijednosti ulaznih podataka fiksnima i tijekom interpolacije ih ne mijenja. Međutim, ako definiramo vrijednost parametra zaglađivanja $\delta \neq 0$, metoda postaje zaglađujući interpolator što utječe na dodjeljivanje težinskih koeficijenata podacima mjerenja.

Radi relativno jednostavnog algoritma značajna je brzina u proračunu pa se za manje skupove podataka mogu koristiti svi podaci prilikom interpolacije. Poželjno je da podaci budu pravilno razmješteni u kontrolnim točkama jer tada daje bolje rezultate. Ne omogućava procjenu vrijednosti izvan područja poznatih podataka, odnosno ekstrapolaciju vrijednosti.

2.3. Metoda minimalne zakrivljenosti

Metoda minimalne zakrivljenosti nastoji ostvariti što je moguće gladu plohu kao rezultat interpolacije, a da pritom zadrži interpolirane vrijednosti što bliže ulaznima. Budući da se ulazne vrijednosti mijenjaju u procesu interpolacije, ta metoda nije egzaktni interpolator.

Ploha koja nastaje slična je tankoj linearnoj elastičnoj ploči koja prolazi kroz poznate vrijednosti točaka s minimalnim iznosom savijanja. Radijus savijanja plohe je što veći da bi zakrivljenost bila minimalna.

Matematičke formule primjenjuju se u više iteracija kako bi ploha koja nastaje najbolje zadovoljila sve ulazne vrijednosti. Svaka iteracija obuhvaća čitavo područje interpolacije. Vrijednosti se računaju sve dok sljedeća uzastopna promjena u vrijednosti ne bude manja od vrijednosti maksimalnog reziduala ili dok nije dosegnut maksimalan broj iteracija.

Vrijednost maksimalnog reziduala i maksimalnog broja iteracija najvažniji su parametri te metode koje je potrebno definirati prije postupka interpolacije.

Za razliku od prethodne dvije opisane metode ova metoda minimalne zakrivljenosti omogućava procjenu vrijednosti izvan područja poznatih podataka, odnosno ekstrapolaciju vrijednosti. Iako stvara uglađene plohe za gotovo bilo koji skup podataka, postoji tendencija nastajanja karakterističnih oblika na područjima koja su bez ulaznih vrijednosti. Prema tome posebnu pozornost treba obratiti prilikom ekstrapolacije podataka.

Proces interpolacije metodom minimalne zakrivljenosti provodi se u nekoliko koraka. Skup ulaznih vrijednosti modelira se jednostavnim regresijskim modelom metodom najmanjih kvadrata prema formuli (3):

$$AX + BY + C = Z(X, Y). \quad (3)$$

Razlike između dobivenih vrijednosti modela i ulaznih vrijednosti interpoliraju se, a zatim se rješava modificirana biharmonička diferencijalna jednačba (4) kojom se nastoje minimalizirati integrirani reziduali (Smith i Wessel 1990)

$$(1 - T_i)\nabla^2(\nabla^2 Z) - (T_i)\nabla^2 Z = 0. \quad (4)$$

Postavljaju se tri rubna uvjeta:

$$(1 - T_b)\frac{\partial^2 Z}{\partial n^2} + (T_b)\frac{\partial Z}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\nabla^2 Z)}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0, \quad (7)$$

gdje su:

∇^2 – Laplaceov operator

n – rubna normala

T_i – unutarinja napetost

T_b – vanjska napetost.

3. Izrada 3D modela različitim metodama interpolacije

Zahvaljujući različitim metodama interpolacije podataka opisanih u prethodnom poglavlju i njihovoga prikaza na kartama moguće je dobiti vjerodostojan model koji najbolje može predstaviti određeni skup prostornih podataka.

Danas se za računanje 3D modela uobičajeno koriste različiti grafički računalni programi, pa je za potrebe ovoga rada korišten računalni program Golden Surfer, koji služi za kartiranje podataka na način da nepravilno raspoređene prostorne podatke interpolira u pravilnu prostornu mrežu, tzv. grid (Golden Software, Inc. 2002). Pravilna prostorna mreža služi za generiranje različitih vrsta karata koje mogu prikazivati slojnice, vektore, osjenčani reljef, trodimenzionalni model površine, trodimenzionalni žičani model i drugo. Važno je još napomenuti da program osim naredbi za kreiranje i izmjenu sadrži i niz naredbi kojima možemo dobiti različite izračune i statistiku podataka te je npr. moguć izračun volumena i vertikalnih presjeka, što će biti potrebno i u ovom radu.

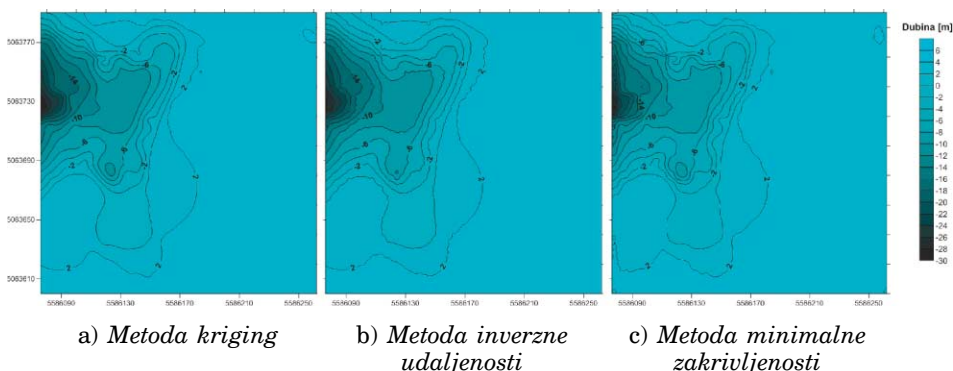
3.1. Grafički prikaz podataka

Na temelju terenskih mjerenja izrađeni su trodimenzionalni prikazi područja. Mjerne podatke čine položajne koordinate i pripadna dubina za svaku snimljenu točku dna jezera (xyz). Podaci su pohranjeni u tekstualne datoteke za pojedinu epohu koje su poslužile kao ulazni podaci za računanje pravilne prostorne mreže, odnosno grida.

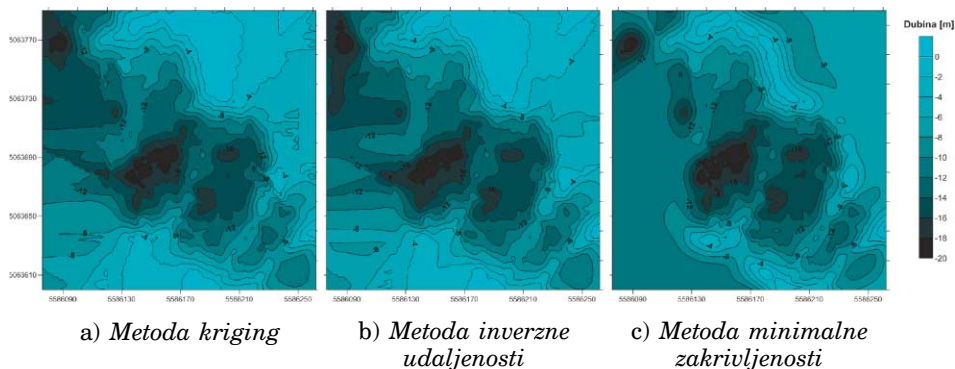
Kao što je prethodno rečeno, Surfer kreira različite prikaze prostornih podataka na osnovi pravilne prostorne mreže te je prvo potrebno interpolacijom dobiti takvu mrežu.

Na istom skupu podataka primijenjene su i uspoređene tri prethodno opisane metode interpolacije: kriging, metoda inverzne udaljenosti (*engl. Inverse Distance to a Power*) i metoda minimalne udaljenosti (*engl. Minimum Curvature*).

Dobivena prostorna mreža poslužit će za kreiranje željenoga grafičkog prikaza podataka. U nastavku su dani grafički prikazi za sve tri primijenjene metode interpolacije u dvije i tri dimenzije. Na slikama 1 i 2 nalaze se dobiveni prikazi sa slojnicama koji prikazuju prostorni skup podataka u dvije dimenzije. Slojnice su linije istih vrijednosti dubina jezera koje prikazuju oblik površine.



Slika 1. Prikaz slojnica dijela jezera za I. epohu.

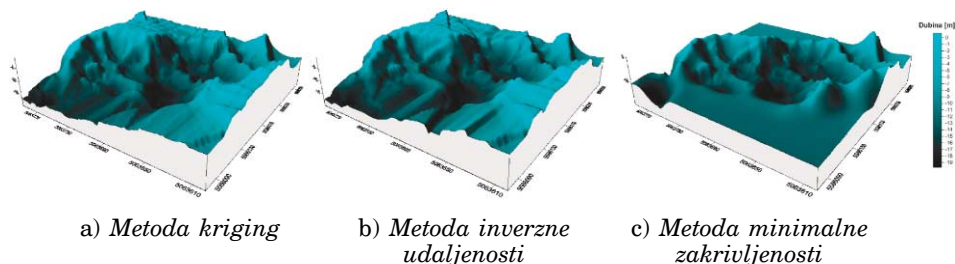


Slika 2. Prikaz slojnica dijela jezera za II. epohu.

Na slikama 3 i 4 nalaze se trodimenzionalni prikazi promatranog dijela dna jezera, za svaku primijenjenu metodu interpolacije.



Slika 3. Trodimenzionalni prikaz dijela dna jezera za I. epohu.



Slika 4. Trodimenzionalni prikaz dijela dna jezera za II. epohu.

4. Usporedba primijenjenih metoda interpolacije

Da bi se moglo prikazati ponašanje neke veličine u stvarnosti koja je kontinuirana, potrebno je mjerene točkaste podatke interpolacijom pretočiti u kontinuirane podatke. Svaka metoda interpolacije stvara različiti prikaz istih podataka. Zbog toga je potrebno testirati i usporediti metode interpolacije kako bismo došli do najpovoljnije metode za interpretaciju naših podataka.

Metode interpolacije mogu se uspoređivati na više načina. U ovom radu one su uspoređene pomoću reziduala i razlikom dobivenih volumena.

4.1. Izračun i usporedba reziduala

Kao što je prethodno rečeno, interpolacijom nastaje pravilna mreža točaka u kojima se procjenjuje vrijednost čvornih točaka na osnovi mjerenih podataka i algoritma pojedine metode interpolacije.

Budući da je korišten isti skup ulaznih podataka za kreiranje prostorne mreže različitim metodama interpolacije, one se mogu uspoređivati pomoću njihovih reziduala.

Naime, reziduali su razlike između zadanih Z vrijednosti i pripadajućih interpoliranih vrijednosti. Zadane Z vrijednosti ovdje su dubine jezera dobivene izmjerom.

Računaju se prema osnovnoj formuli (8):

$$Z_{res} = Z_{dat} - Z_{grd}, \quad (8)$$

gdje su:

Z_{res} – vrijednosti reziduala

Z_{dat} – zadane vrijednosti iz ulazne datoteke

Z_{grd} – interpolirane vrijednosti pripadajuće točke.

Izračunati reziduali i njihova usporedba te statistički podaci prikazani su u tablicama 1 i 2.

Tablica 1. Statistika reziduala za mjerenja iz I. epohe.

Statistički pokazatelji reziduala	Metode interpolacije		
	Kriging	Inverzna udaljenost	Minimalna zakrivljenost
Ukupan broj podataka	3481	3481	3481
Zbroj vrijednosti [m]	2,62	30,98	20,57
Min. vrijednost [m]	-0,64	-1,27	-1,95
Max. vrijednost [m]	0,72	1,23	2,06
Doseg [m]	1,36	2,49	4,01
Srednja vrijednost [m]	0,001	0,009	0,006
Standardno odstupanje [m]	0,001	0,003	0,002
Varijanca [m ²]	0,003	0,035	0,028
Standardna devijacija [m]	0,050	0,18	0,17

Tablica 2. Statistika reziduala za mjerenja iz II. epohe.

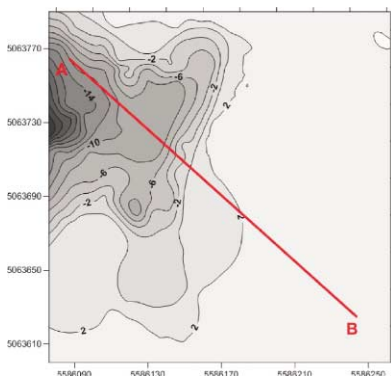
Statistički pokazatelji reziduala	Metode interpolacije		
	Kriging	Inverzna udaljenost	Minimalna zakrivljenost
Ukupan broj podataka	9649	9649	9649
Zbroj vrijednosti [m]	30,19	48,30	-9,57
Min. vrijednost [m]	-2,21	-2,52	-2,72
Max. vrijednost [m]	2,45	2,44	2,01
Doseg [m]	4,66	4,97	4,73
Srednja vrijednost [m]	0,003	0,005	-0,001
Standardno odstupanje [m]	0,003	0,004	0,003
Varijanca [m ²]	0,089	0,121	0,095
Standardna devijacija [m]	0,299	0,347	0,309

Iz statistike reziduala svake metode vidljivo je da je standardna devijacija metode kriging manja od vrijednosti dobivenih drugim metodama. Odnosno, izračunati matematički prikaz topografije jezerskog dna kriging metodom bliži je ulaznim podacima mjerenja u odnosu na druge dvije metode. Drugi statistički pokazatelji također upućuju na isti zaključak.

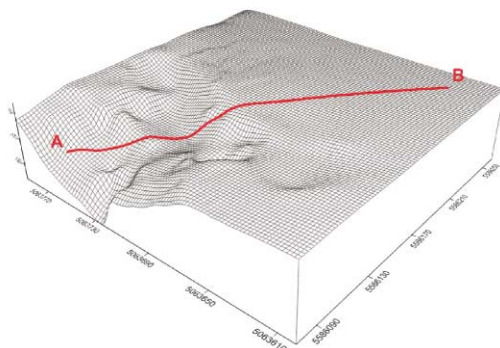
4.2. Izračun i usporedba vertikalnih profila

Presjekom vertikalne ravnine i dobivenih trodimenzionalnih prikaza jezera mogu se pokazati razlike u izgledu površine modela dobivenih različitim metodama interpolacije, a može se prikazati i razlika u količini materijala na dnu jezera između dvije mjerene epohe.

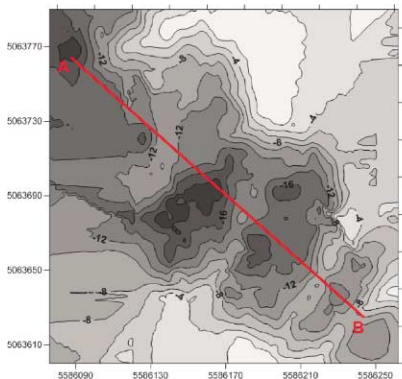
Linija proizvoljno odabranog profila položajno je prikazana dvodimenzionalno (slike 5 i 6) i trodimenzionalno (slike 7 i 8) na primjeru prikaza slojnica i 3D žičanog modela za obje epohe dobivenih kriging metodom interpolacije.



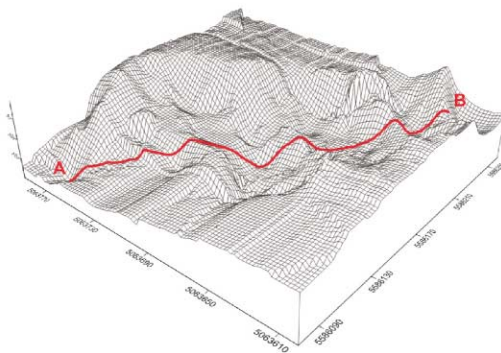
Slika 5. Prikaz profila na karti sa slojnicama za I. epohu.



Slika 6. Prikaz profila na žičanom trodimenzionalnom modelu za I. epohu.



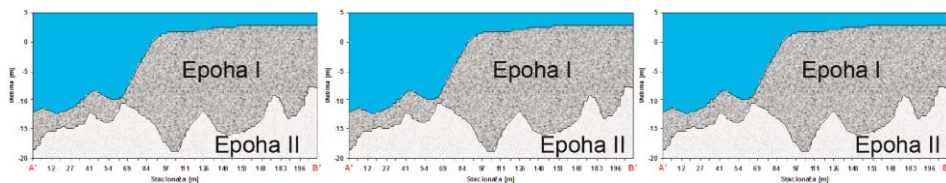
Slika 7. Prikaz profila na karti sa slojnicama za II. epohu.



Slika 8. Prikaz profila na žičanom trodimenzionalnom modelu za II. epohu.

Program izračunava presjek definiranog profila i linija pravilne prostorne mreže dobivene interpolacijom. Kao rezultat nastaje izlazna tekstualna datoteka koja sadržava: (xyz) koordinate svih točaka presjeka, stacionažu odnosno udaljenost točaka profila od početne točke i redni broj profila.

Slika 9 prikazuje usporedbu trodimenzionalnih modela jezera u različitim epohama dobivenih istom metodom interpolacije. Ti prikazi poslužili su za pregled razlika u količini materijala na dnu jezera. Vidljiv je manjak materijala na dnu jezera u II. epohi u odnosu na I. epohu.



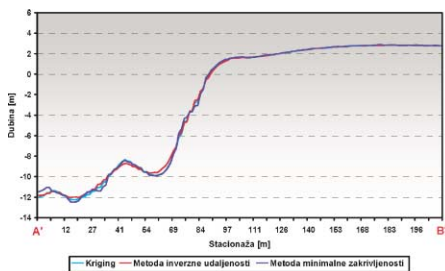
a) Metoda kriging

b) Metoda inverzne udaljenosti

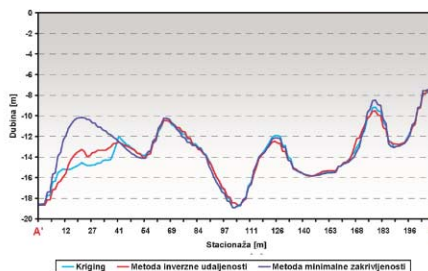
c) Metoda minimalne zakrivljenosti

Slika 9. Prikaz razlika profila.

Slike 10 i 11 prikazuju razlike u izgledu površine trodimenzionalnih modela dobivenih različitim metodama interpolacije.



Slika 10. Prikaz razlika profila za I. epohu.



Slika 11. Prikaz razlika profila za II. epohu.

Može se zaključiti da sve tri metode interpolacije daju poprilično slične rezultate. Najveće razlike u odnosu na druge dvije metode prisutne su kod metode minimalne zakrivljenosti, jer ona za razliku od preostale dvije metode nije egzaktan interpolator. Također su primjetne veće razlike u izgledu profila pri mjerenju iz II. epohe.

5. Računanje volumena

Na kraju smo pristupili izračunu volumena, kao krajnjem cilju zbog kojeg su izvedena predmetna mjerenja u dvije epohe.

Volumen je matematički definiran pomoću integralnog računa. Naime, volumen ispod neke funkcije $f(x,y)$ definiran je kao dvostruki integral te funkcije po njenim varijablama.

Kako se integrali računaju na taj način da se prvo odredi podintegralna funkcija, u ovom slučaju potrebno je prvo razmotriti načine rješavanja jednostrukih integrala.

Pritom funkcija koja se želi integrirati može biti poznata, ali može biti i niz diskretnih podataka o nekom procesu, kao što je u ovome radu. Općenito, poznate funkcije lako se mogu integrirati, dok je za niz diskretnih podataka potrebno primijeniti numeričko integriranje.

Kako bi se maksimalno skratio postupak računanja, danas se isključivo primjenjuje automatizirani način izračuna odgovarajućim računalnim programima. Metode izračuna ovise o algoritmu kojim se program koristi. Prednost je automatiziranih računalnih programa velika ušteda vremena pri numeričkim izračunima, olakšano intenzivno i složeno računanje, pregledan prikaz svih rezultata i njihova laka usporedba (Karač 2008).

5.1. Primijenjene formule za računanje volumena

Ako zamislimo prostornu mrežu dobivenu interpolacijom kao niz pravokutnih polja s razmakom stupaca Δx i razmakom redaka Δy , tada ukupni volumen prostorne mreže možemo aproksimirati zbrojem volumena pojedinačnih polja (pravokutnih prizmi).

U korištenom programu za izračun volumena tri su Newton-Cotesove formule: produljeno trapezoidno pravilo, produljeno Simpsonovo 1/3 pravilo te produljeno Simpsonovo 3/8 pravilo (Press i dr. 1988). Program računa vrijednost volumena na osnovi svih triju metoda, a kao konačna vrijednost uzima se njihova aritmetička sredina (Drmač i dr. 2003).

Volumen je opisan dvostrukim integralom

$$\text{Volumen} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Prvo se integrira po x vrijednostima (po stupcima) kako bi se dobile površine pojedinog retka, a zatim se integrira po y vrijednostima (po recima) da bi se dobila vrijednost ukupnog volumena.

U nastavku slijede formule za pojedinu metodu.

Produljeno trapezoidno pravilo:

$$\text{Volumen} \approx \frac{\Delta y}{2} [A_1 + A_2 + 2A_3 + \dots + 2A_{n-1} + A_n] \quad (10)$$

Produljeno Simpsonovo 1/3 pravilo:

$$\text{Volumen} \approx \frac{\Delta y}{3} [A_1 + 4A_2 + 2A_3 + 4A_4 + \dots + 2A_{n-1} + A_n] \quad (11)$$

Produljeno Simpsonovo 3/8 pravilo:

$$\text{Volumen} \approx \frac{3\Delta y}{8} [A_1 + 3A_2 + 3A_3 + 2A_4 + \dots + 2A_{n-1} + A_n], \quad (12)$$

gdje su Δx razmak stupaca, Δy razmak redaka prostorne mreže dobivene interpolacijom, a A_i su površine polja prostorne mreže dobivene numeričkom integracijom integrala $A_i = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x, y) dx$ za $i=1, \dots, n$ ovisno o metodi (Stewart 1996).

5.2. Izračun i usporedba volumena

Kako bi se točno odredila količina materijala koja je izvađena iz jezera Novo Čiče između I. i II. epohe, potrebno je izračunati volumen između prostornih mreža dobivenih interpolacijom za pojedine epohe.

Točnost računanja volumena ovisi o gustoći i uglađenosti prostorne mreže dobivene interpolacijom. Što je prostorna mreža gušća i pravilnija, to će se postići i veća točnost u izračunu volumena.

Izračunata je vrijednost volumena kao aritmetička sredina vrijednosti dobivenih pomoću tri različite metode numeričke integracije. Tablica 3 prikazuje usporedbu konačnih vrijednosti volumena ovisno o metodama interpolacije.

Tablica 3. Podaci za vrijednost volumena.

Podaci za vrijednost volumena	Metode interpolacije		
	Kriging	Inverzna udaljenost	Minimalna zakrivljenost
Trapezoidno pravilo [m ³]	316242	315579	342451
Simpsonovo pravilo [m ³]	316290	315655	342445
Simpsonovo 3/8 pravilo [m ³]	316234	315614	342445
Aritmetička sredina [m ³]	316255	315616	342447
Pozitivni volumen [m ³]	318216	317256	348682
Negativni volumen [m ³]	1972	1675	6233
Volumen mreže [m ³]	316244	315582	342449

Iako su postupak izračuna volumena i primijenjene formule isti, podaci volumena poprimaju različite vrijednosti ovisno o metodi interpolacije. Ako usporedimo vrijednosti aritmetičkih sredina, najveće razlike, a ujedno i najveće vrijednosti volumena pokazuje metoda minimalne zakrivljenosti. Metoda kriging razlikuje se od metode inverzne udaljenosti za 639 m^3 , a od metode minimalne zakrivljenosti manja je za $26\,192 \text{ m}^3$. Metode inverzne udaljenosti i minimalne zakrivljenosti međusobno se razlikuju za $26\,831 \text{ m}^3$.

6. Zaključak

Na jezeru Novo Čiče izvedena su geodetska mjerenja u dvije epohe s vremenskom distancom radi određivanja količine eksploatiranog materijala i praćenja izvedenih rudarskih radova za potrebe koncesionara sukladno Zakonu o rudarstvu i ostalim pozitivnim zakonskim aktima koji reguliraju to područje gospodarske djelatnosti. Korištenjem suvremene tehnologije i kombiniranim postupcima izmjere geodetski stručnjaci dobivaju pouzdane podatke koji služe kao osnova za daljnja istraživanja i analize. Krajnji je cilj izraditi trodimenzionalni model područja koji na svima razumljiv način prikazuje rezultate geodetskih mjerenja te omogućava stručnjacima i znanstvenicima iz drugih područja lakše donošenje odluka i usmjerenje svojega djelovanja.

Procjenjivanje vrijednosti nekog svojstva na neuzorkovanim mjestima, unutar prostora prekrivenog točkama opažanja, poznata kao interpolacija, problem je koji dugi niz godina zaokuplja pozornost brojnih stručnjaka iz područja geoznanosti i srodnih znanosti.

Ovisno o primjeni pojedine interpolacijske metode, dobivaju se različiti prikazi rezultata izmjere koji u manjoj ili većoj mjeri odstupaju od realnog izgleda područja. Prema tome o njima ovisi vizualni izgled modela, a sukladno tomu i podaci izračuna volumena, vertikalni presjeci i statistički podaci za promatrano područje.

Usporedbom triju različitih metoda interpolacije: metode kriging, metode inverzne udaljenosti i metode minimalne zakrivljenosti, na istom skupu prostornih podataka dijela jezera Novo Čiče izvedeni su sljedeći zaključci.

U interpretaciji prostorne neprekinutosti podataka, odnosno topografije dna jezera, najbolje rezultate dala je metoda kriging. Slični prikazi dobivaju se i metodom inverzne udaljenosti, ali statistički pokazatelji metode kriging ipak daju povoljnije vrijednosti. Statistika reziduala za metodu kriging pokazuje najmanje vrijednosti standardnog odstupanja i devijacije u odnosu na druge metode, iz čega se može zaključiti da su interpolirane vrijednosti najbliže ulaznim mjerenim vrijednostima i dobiva se pouzdaniji prostorni model. Isto se može zaključiti i iz statistike razlika prostornih mreža.

Grafički prikazi vertikalnih presjeka pokazali su da su razlike između metoda kriginga i inverzne udaljenosti neznatne u područjima s dovoljnom gustoćom izmjerenih podataka. Metoda minimalne zakrivljenosti ima najveća odstupanja budući da ona jedina ne zadržava ulazne podatke nepromijenjenima tijekom procesa interpolacije. Kod nje je prisutna tendencija zaglađivanja plohe, a na područjima gdje nema mjerenih podataka dolazi do svođenja plohe na srednju vrijednost što je vidljivo kod trodimenzionalnog modela jezera za II. epohu. Ovisno o metodi

interpolacije mijenjaju se i podaci izračuna volumena. Najveće razlike, a ujedno i najveće vrijednosti volumena pokazuje metoda minimalne zakrivljenosti.

Na kraju je važno naglasiti značaj geostatističkih metoda interpolacije koje uzimaju u obzir prostornu zavisnost varijabli te odabir odgovarajućeg algoritma odnosno programskog paketa koji će zadovoljiti potrebe trodimenzionalnog modeliranja.

Literatura

- Cressie, N. (1992): *Statistics for Spatial Data*, John Wiley & Sons, New York.
- Davis, J. C. (1986): *Statistics and Data Analysis in Geology*, John Wiley and Sons, New York.
- de Smith, M. J., Goodchild, M. F., Longley, P. A. (2009): *Geospatial Analysis: a Comprehensive Guide to Principles, Techniques and Software Tools*, Leicester, UK.
- Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer S. (2003): *Numerička analiza*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb.
- Đapo, A., Medved, I. (2003): Trodimenzionalni geodetski model jezera šljunčare Novo Čiče, *Ekscentar*, 5, 13–18.
- Golden Software, Inc. (2002): *User's Guide Surfer 8*, Golden, Colorado, U.S.A.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J. (2001): *Global Positioning System: Theory and Practice*, 5th revised edition, Springer, Wien – New York.
- Ingham, A. E. (1992): *Hydrography for the Surveyor and Engineer*, Third edition revised by V. J. Abbot, Oxford, Blackwell Scientific Publications, London.
- Karač, A. (2008): *Numeričke metode u inženjerstvu*, Sveučilište u Zenici, Strojarski fakultet, Zenica.
- Krašić, D. (2006): *Atlas rudarstva Republike Hrvatske*, Springer Business Media Croatia d.o.o., Zagreb.
- Lurton, X. (2002): *An Introduction to Underwater Acoustics – Principles and Applications*. Springer, Wien – New York.
- Malvić, T. (2008): *Kriging geostatistička interpolacijska metoda*, Hrvatsko geološko društvo, Zagreb.
- Medak, D., Pribičević, B. (2000): *A Dynamic Three-dimensional Model of the National Park Plitvice Lakes, Barriers and Tributary Streams*, UNESCO World Heritage Project Final Report Contract No. 700.759.9, Zagreb – Pariz.
- Medak, D., Pribičević, B., Krivoruchko, K. (2008): Geostatistička analiza batimetrijskih mjerenja na primjeru jezera Kozjak, *Geodetski list*, 3, 131–142.
- Narodne novine (2009): *Zakon o rudarstvu*, 75.
- Pribičević, B. (2005): *Pomorska geodezija*, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Pribičević, B., Medak, D., Kordić, B. (2007): Primjena dvofrekventne batimetrije u određivanju sedrenih naslaga. *Geodetski list*, 1, 1–18.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. (1988): *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Smith, W. H. F., Wessel, P. (1990): Gridding with Continuous Curvature Splines in Tension, *Geophysics*, Vol. 55, No. 3, 293–305.
- Stewart, G. W. (1996): *Afternotes on numerical analysis*, University of Maryland College Park, Maryland.
- Ver Hoef, J. M. (1993): Universal kriging for ecological data, Pages 447–453 in Ver Hoef, J. and Barry, R. P. (1998), *Constructing and fitting models for cokriging and multivariable spatial prediction*, *J. Statist. Planning and Inference* 69, 257–294.

Comparison of Interpolation Methods of Bathymetry Data Used for Monitoring of Lake Volume Change

ABSTRACT. Exploitation of minerals in Republic of Croatia has been intensified during last 15 years, especially in mineral ores related to construction works. According to the Law on Mining (NN 2009), concession holders are obliged to prepare a survey of the mine site at least once a year, with the goal of determination of excavated material. This paper describes surveying methods related to determination of volumes of sand and gravel taken from a lake. Different methods of data processing are compared with respect to the accuracy. The Lake Novo Čiče is an artificial ecosystem used for exploitation of sand and gravel. Bathymetric measurements of the lake bottom has been performed using the integration of modern surveying methods: GPS positioning and echosounder for depth measurements. Two series of measurements have been used for comparison. A three-dimensional model of the lake has been created. Several methods of interpolation are used and differences were compared. The volume of the lake has been determined by various algorithms, implemented in modern software packages.

Keywords: interpolation, geostatistics, kriging, bathymetry, three-dimensional models, volume calculation.

Prihvaćeno: 2010-05-10