Prethodno priopćenje
UDK: 330.138.11:330.4

Doc. dr. sc. Ilko Vrankić
Mario Udženija, dipl. oec.

HOMOTETIJA IZOKVANTI I SEPARABILNOST TROŠKOVA

HOMOTHETICITY OF ISOQUANTS AND SEPARABILITY OF COSTS

SAŽETAK: U ovom se radu povezuje proporcionalna promjena faktora proizvodnje i ekonomska efikasnost. Konstantni prinosi i strogo rastuće transformacije koje ne mijenjaju izgled mape izokvanti omogućavaju jednostavno izvođenje multiplikativno separabilne funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Dualne veze okreću slijed misli i multiplikativna separabilnost opisuje homotetiju u proizvodnji.

KLJUČNE RIJEČI: homotetična funkcija proizvodnje, multiplikativno separabilna funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova, prinosi s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka, ekonomska efikasnost, dualnost proizvodnje i troškova.

ABSTRACT: This article delivers the relationship between the proportional variation of factors of production and economic efficiency. Constant returns to scale and positive monotonic transforms that preserve the appearance of isoquant map enable simple derivation of multiplicatively separable cost function. The duality between cost and production functions reverses the stream of thoughts and multiplicative separability describes homotheticity in production.

KEY WORDS: homothetic production function, multiplicatively separable cost function, returns to scale, economic efficiency, duality between cost and production function.

1. UVOD

Homotetične funkcije proizvodnje krasi nepromjenjivost nagiba nivo linija s obzirom na radijalne ekspanzije ili kontrakcije /7/. Za njih su funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova multiplikativno separabilne /4/. Separabilnost zauzima važno mjesto u ekonomskoj analizi i vrijedi obrat prethodno navedenog rezultata /1/. Ti se rezultati u ovom radu sagledavaju polazeći od ekonomskih fenomena. Osnovu analize čine dualne veze između funkcije proizvodnje i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova /2, 3, 5, 6, 8/.

Važno mjesto među alatima analize zauzimaju planske krivulje dugoročnih troškova. Oblici tih krivulja se opravdavaju prinosima s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka. Pritom izostaju eksplicitne pretpostavke o svojstvima tehnologije na koje se oslanjamo. U ovom se radu ta svojstva izvode polazeći od konstantnih prinosa. Elegantna poopćenja opisuju svojstva proizvodne funkcije i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Doprinosi se očituju u povezivanju dualnih svojstava alternativnih načina opisa tehnologije. Pritom se ističe obostrana veza ekonomskih fenomena i poznatih matematičkih rezultata koji se prikazuju u novom svjetlu.

Promjena proizvodnje i ekonomska efikasnost nameću putovanje po krivulji ekspanzije proizvodnje koja povezuje ekonomski efikasne kombinacije čimbenika proizvodnje za različite razine proizvodnje. U ovom radu povezivanje dugoročnih prosječnih troškova i prinosa s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka pretpostavlja homotetičan oblik funkcije proizvodnje. Pretpostavka o homotetičnosti ima značajne posljedice u empirijskoj analizi troškova. U razotkrivanju oblika funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova polazimo od konstantnih prinosa s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka i dokazujemo da granična stopa tehničke supstitucije ne ovisi o količini proizvodnje. Strogo rastuće transformacije linearno homogene proizvodne funkcije ne mijenjaju izgled sličnih izokvanti na osnovi kojih izvodimo multiplikativno separabilnu funkciju minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Dualnost između proizvodnje i troškova okreće slijed misli i omogućava obrat izvedenih zaključaka.

2. HOMOTETIČNA FUNKCIJA PROIZVODNJE

Pođimo od stajališta da tehnologiju opisuje strogo rastuća i striktno kvazikonkavna funkcija proizvodnje. Iz ovih svojstava proizlaze striktno konveksne i negativno nagnute izokvante. Negativna nagnutost izokvante znači da smanjenje utroška rada kompenziramo povećanjem utroška kapitala. Svaka izokvanta obrubljuje odgovarajući skup zahtjeva za faktorima proizvodnje. Možemo reći da za zadanu proizvodnju izokvanta sadrži sve tehnološki efikasne kombinacije faktora proizvodnje. Koju od njih izabire ekonomski efikasno poduzeće dobijemo rješavanjem problema minimizacije ukupnih ekonomskih troškova za danu razinu proizvodnje,

$$\begin{aligned} c(w,r,y) = \min_{L,K\geq 0} & \; wL + rK \\ & f(L,K) = y. \end{aligned}$$

Varijable odlučivanja su rad i kapital, *L*, *K*, a među parametrima se uz zadanu proizvodnju, *y*, pojavljuju cijene faktora proizvodnje, *w*, *r*, na koje u savršenoj konkurenciji poduzeće nema utjecaja. Dijeljenjem najmanjih ukupnih ekonomskih troškova i količine proizvodnje dobijemo plansku krivulju dugoročnih prosječnih troškova koje se oblik slova *u* opravdava prinosima s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka. Pritom se u literaturi neopravdano zanemaruje zakrivljenost krivulje ekspanzije proizvodnje. Da bismo egzaktno utvrdili vezu između svojstava tehnologije i oblika krivulja troškova promotrimo najprije konstantne prinose s obzirom na proporcionalne promjene utrošaka ili razmjer. Proporcionalna promjena utrošaka uzrokuje upravo proporcionalnu promjenu proizvodnje i kažemo da tehnologiju opisuje linearno homogena funkcija proizvodnje,

$$f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L, K), \lambda > 0.$$

Takva tehnologija ima vrlo zanimljiva geometrijska svojstva koja nameću važna ograničenja u empirijskoj analizi troškova. Istodobno geometriju prate neizostavne ekonomske interpretacije. Važno je pitanje utroška kapitala koji nadoknađuje jednu malu jedinicu utroška rada i održava proizvodnju. Prepoznajemo graničnu stopu tehničke supstitucije koju zorno predočava nagib izokvante. Kako je granična stopa tehničke supstitucije jednaka odnosu graničnih proizvodnosti ispitujemo utjecaj proporcionalne promjene rada i kapitala na granične proizvode. Poveća li se polazni utrošak rada za jedan, proporcionalni se utrošak rada poveća za faktor proporcionalnosti kojim množimo granični proizvod rada da bismo dobili promjenu proizvodnje,

$$\lambda f_L(\lambda L, \lambda K) = \lambda f_L(L, K), \lambda > 0.$$

Heuristička se argumentacija oslanja na poistovjećivanje diferencijala i stvarne promjene vrijednosti funkcije. Prema tome proporcionalna promjena faktora proizvodnje ne utječe na granični proizvod rada,

$$f_L(\lambda L, \lambda K) = f_L(L, K), \lambda > 0.$$

Zamijenimo li u analizi rad kapitalom vidimo da je i granični proizvod kapitala imun na proporcionalne promjene faktora proizvodnje,

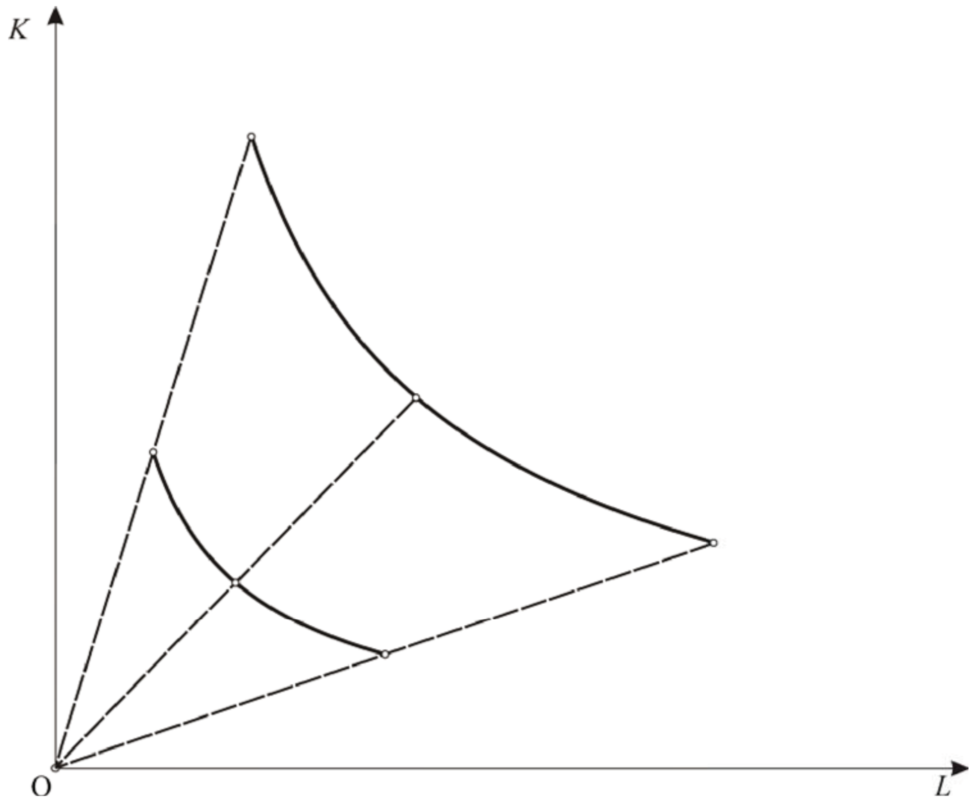
$$f_K(\lambda L, \lambda K) = f_K(L, K), \lambda > 0.$$

Primijetimo da su granični proizvodi očuvali homogenost koje se stupanj smanjio za jedan. Slično smo mogli potvrditi općenitiji rezultat o stupnju homogenosti parcijalnih derivacija homogene funkcije /4/. Iz prethodne dvije jednakosti proizlazi da uz istu kapitalnu opremljenost rada granična stopa tehničke supstitucije ne ovisi o količini proizvodnje,

$$\frac{f_L(\lambda L, \lambda K)}{f_K(\lambda L, \lambda K)} = \frac{f_L(L, K)}{f_K(L, K)},$$

$$MRTS(\lambda L, \lambda K) = MRTS(L, K).$$

Prema tome izokvante povezuje centralna projekcija, pa govorimo o međusobno sličnim ili radijalno paralelnim izokvantama.

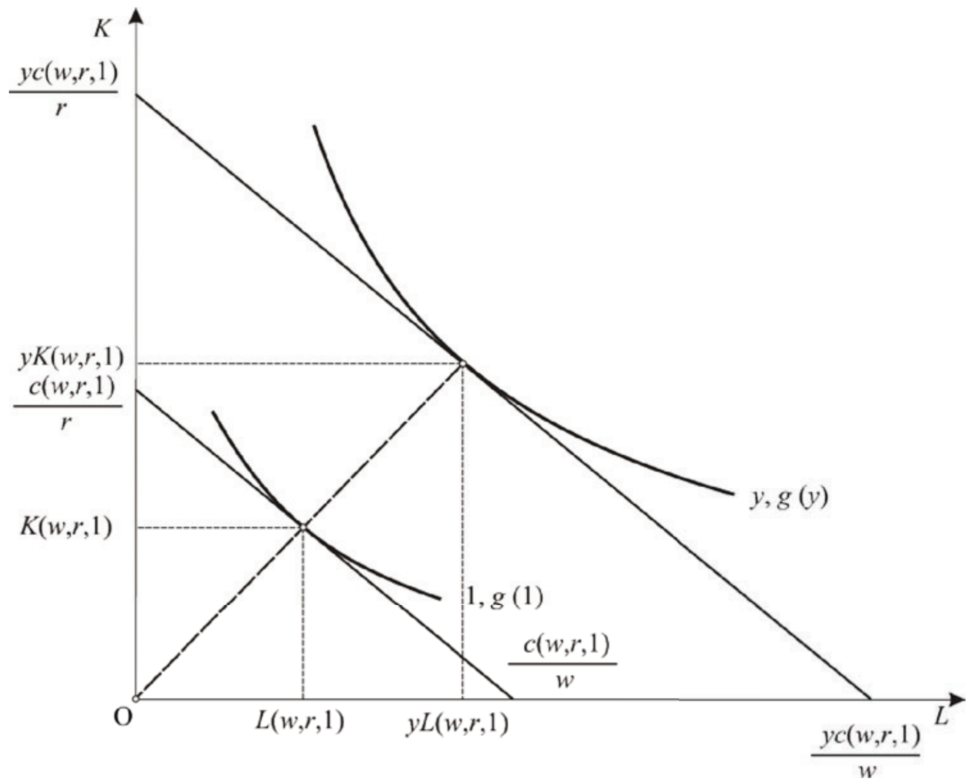


Slika 1. Homotetija i slične izokvante

Ovdje smo radi jednostavnosti pošli od linearno homogene funkcije proizvodnje. Poopćenje vodi prema homotetičnim proizvodnim funkcijama. Dobivamo ih strogo rastućim transformacijama linearno homogene funkcije i dopuštamo, pored konstantnih, rastuće i opadajuće prinose. Pritom ne mijenjamo opis tehnologije mapom izokvanti kojima pridružujemo transformirane razine proizvodnje. Kako možemo razmišljati i u obrnutom smjeru sličnost je izokvanti ili nepromjenjiva granična stopa tehničke supstitucije za istu kapitalnu opremljenost rada alternativni način opisa homotetične funkcije proizvodnje. Svoj naziv duguje preslikavanju sličnosti koje se još naziva i homotetija.

3. MULTIPLIKATIVNO SEPARABILNA FUNKCIJA TROŠKOVA

U opisu ravnoteže ekonomski efikasnog poduzeća ističe se jednakost granične stope tehničke supstitucije i odnosa cijena faktora proizvodnje. Ta jednakost s izokvante koja predočava jediničnu proizvodnju izdvaja ekonomski efikasnu kombinaciju faktora proizvodnje na osnovi koje računamo minimalne ukupne ekonomske troškove.



Slika 2. Proporcionalna promjena faktora proizvodnje i ekonomska efikasnost

Napomenimo da su *L(w, r, y)* i *K(w, r, y)* rješenja problema minimizacije ukupnih ekonomskih troškova za danu razinu proizvodnje, y. Pritom se $g(y)$ odnosi na transformirane količine proizvodnje koje će kasnije doći do izražaja. Ekonomski efikasna kombinacija faktora proizvodnje i minimalni ukupni ekonomski troškovi ovise o cijenama faktora proizvodnje koje određuju savršeno konkurentna tržišta rada i kapitala,

$$c(w,r,1) = wL(w,r,1) + rK(w,r,1).$$

Za konstantne je prinose s obzirom na razmjer faktor proporcionalne promjene optimalnih utrošaka rada i kapitala jednak proizvoljno izabranoj razini proizvodnje. Pritom granična stopa tehničke supstitucije ostaje ista i čuva se uvjet ekonomske efikasnosti.

$$c(w,r,y) = wL(w,r,y) + rK(w,r,y).$$

Konstantni prinosi s obzirom na razmjer omogućavaju da povećanje proizvodnje prati upravo proporcionalna promjena rada i kapitala,

$$c(w,r,y) = wyL(w,r,1) + ryK(w,r,1).$$

Minimalne ukupne ekonomske troškove prikazujemo u obliku produkta dane proizvodnje i minimalnih ukupnih ekonomskih troškova pri jediničnoj proizvodnji,

$$c(w,r,y) = y(wL(w,r,1) + rK(w,r,1)),$$

$$c(w,r,y) = yc(w,r,1).$$

Kažemo da je funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova multiplikativno separabilna jer se proizvodnja i cijene pojavljuju u zasebnim faktorima.

Prethodni rezultati o linearno homogenim proizvodnim funkcijama elegantno se poopćavaju na homotetične funkcije proizvodnje. Kako je homotetična funkcija proizvodnje strogo rastuća transformacija linearno homogene funkcije zapišimo je u obliku kompozicije $g \circ f$ gdje je g strogo rastuća, a f linearno homogena funkcija. Problem kojeg sada rješavamo je

$$c(w,r,u) = \min_{L,K \geq 0} wL + rK$$
$$g(f(L,K)) = u.$$

Kako bismo iskoristili prethodne nalaze o linearno homogenim proizvodnim funkcijama promotrimo odgovarajuće probleme u kojima se nalaze transformirane količine proizvodnje:

$$c(w,r,g(y)) = \min_{L,K \geq 0} wL + rK$$
$$g(f(L,K)) = g(y)$$

i

$$c(w,r,g(1)) = \min_{L,K \geq 0} wL + rK$$
$$g(f(L,K)) = g(1).$$

Prethodna smo dva problema već riješili i povezuje ih jednakost

$$c(w,r,g(y)) = yc(w,r,g(1)).$$

Supstitucijom $g(y) = u$ iz koje slijedi $y = g^{-1}(u)$ dobivamo

$$c(w,r,u) = g^{-1}(u)c(w,r,g(1)).$$

Preimenujmo varijable i zaključimo da homotetičnu funkciju proizvodnje krasi multiplikativno separabilna funkcija minimalnih ukupnih ekonomskih troškova,

$$c(w,r,y) = g^{-1}(y)c(w,r,g(1)).$$

Primjetimo da smo na mjestu drugog faktora mogli zadržati minimalne ukupne ekonomske troškove za jediničnu proizvodnju i prvotnu proizvodnu funkciju. Dobiveni poznati rezultat opravdali smo na drugačiji način svođenjem općeg problema na jednostavniji.

4. DUALNOST PROIZVODNJE I TROŠKOVA

Uvjeti regularnosti od kojih polazimo u opisu funkcije proizvodnje omogućavaju izvođenje funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova koje su svojstva prikladno polazište u empirijskoj analizi. Polazimo od stajališta da je $c(w,r,y)$ neprekidna, strogo rastuća i neograničena odozgo u y, rastuća, linearno homogena, konkavna i diferencijabilna u (w,r). Za homotetičnu proizvodnju ta su ograničenja stroža i nalažu prikazivanje minimalnih ukupnih ekonomskih troškova u obliku produkta funkcije koja ovisi o razini proizvodnje, $h(y)$ i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova za fiksnu količinu proizvodnje, $e(w,r)$

$$c(w,r,y) = h(y)e(w,r).$$

Iz svojstava funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova slijede ograničenja na faktore od kojih je prvi strogo rastuća funkcija. Dualnost između proizvodnje i troškova okreće slijed misli kojeg je rezultat još jedan opis homotetičnosti u proizvodnji. Svojstva funkcije mimimalnih ukupnih ekonomskih troškova o kojima smo govorili pretpostavke su iz kojih izvodimo homotetičnu proizvodnu funkciju. Proizvoljna kombinacija rada i kapitala ne može biti jeftinija od ekonomski efikasne kombinacije na odgovarajućoj izokvanti. Istodobno sama minimizira ukupne ekonomske troškove pri odgovarajućim cijenama faktora proizvodnje. Zbog monotonosti funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova funkciju proizvodnje dobijemo iz sljedećeg problema semiinfinitne optimizacije:

$$F(L,K) = \max_{y \geq 0} y$$
$$wL + rK \geq c(w,r,y), \forall w,r > 0.$$

Količina proizvodnje u problemu minimizacije ukupnih ekonomskih troškova za danu razinu proizvodnje postaje varijabla odlučivanja u dualnom problemu koji ističe alternativne načine opisa tehnologije. Time ističemo jedan od mogućih pristupa dualnosti u analizi ekonomskih fenomena. Multiplikativna separabilnost od koje polazimo u opisu funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova znatno olakšava rješavanje tog problema koji sadrži beskonačno mnogo ograničenja,

$$wL + rK \geq h(y)e(w,r), \forall w,r > 0,$$

$$h(y) \leq \frac{wL + rK}{e(w,r)}, \forall w,r > 0,$$

$$y \leq h^{-1}(\frac{wL + rK}{e(w,r)}), \forall w,r > 0.$$

Kako je y ograničen odozgo nizom brojeva onda mora biti ograničen odozgo i s najmanjim od njih,

$$y = F(L,K) = \min_{w,r>0} h^{-1}(\frac{wL + rK}{e(w,r)}).$$

Kako strogo rastuće transformacije ne utječu na optimalno rješenje problem možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y = F(L,K) = h^{-1}(\min_{w,r>0} \frac{wL + rK}{e(w,r)}).$$

Znamo da je inverz strogo rastuće funkcije također strogo rastuća funkcija. Istodobno je izraz u zagradi linearno homogena funkcija rada i kapitala i prethodna jednakost opisuje homotetičnu funkciju proizvodnje. Time smo dokazali da je uz dane pretpostavke o funkciji minimalnih ukupnih ekonomskih troškova, koje uključuju multiplikativnu separabilnost, izvedena funkcija proizvodnje homotetična. Doprinos ovog dokaza se očituje u primjeni dualnosti funkcije proizvodnje i funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova koja ističe njihove funkcionalne oblike.

Do istog zaključka dolazimo slijedeći krivulju ekspanzije proizvodnje na koju nas smještaju funkcije uvjetne potražnje za faktorima proizvodnje. Njih otkriva Shepardova lema:

$$L(w,r,y) = \frac{\partial c(w,r,y)}{\partial w} = h(y)\frac{\partial e(w,r)}{\partial w},$$

$$K(w,r,y) = \frac{\partial c(w,r,y)}{\partial r} = h(y)\frac{\partial e(w,r)}{\partial r}.$$

Dijeljenjem dobijemo da odnos optimalnih utrošaka faktora ne ovisi o količini proizvodnje,

$$\frac{K(w,r,y)}{L(w,r,y)} = \frac{\frac{\partial e(w,r)}{\partial r}}{\frac{\partial e(w,r)}{\partial w}}.$$

Prema tome promjena proizvodnje ne utječe na kapitalnu opremljenost rada i krivulja ekspanzije proizvodnje je linearna. Linearne krivulje ekspanzije proizvodnje opisuju homotetičnu proizvodnu funkciju i promjenu proizvodnje prate proporcionalne promjene rada i kapitala. Primjetimo da smo povezali multiplikativno separabilnu funkciju troškova i oblik izokvanti na način koji ističe ekonomska svojstva tehnologije. U tom je slučaju opravdano povezivati oblike krivulja troškova u dugom roku i prinose s obzirom na razmjer.

5. ZAKLJUČAK

Sličnost izokvanti alternativno opisuje homotetičnost proizvodnje i omogućava jednostavno izvođenje multiplikativno separabilne funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova. Srž tih razmatranja očituje se u činjenici da su ekonomski efikasne kombinacije faktora proizvodnje međusobno proporcionalne. Dualne veze između proizvodnje i troškova omogućavaju dva smjera slijeda misli i sam pogled na oblik funkcije minimalnih ukupnih ekonomskih troškova govori o svojstvima tehnologije. Vezu između multiplikativne separabilnosti troškova i homotetije u proizvodnji učvrstili smo s dva dokaza. Prvi nas je doveo do strogo rastuće transformacije linearno homogene funkcije, a drugi do linearne krivulje ekspanzije proizvodnje.

LITERATURA:

1. Blackorby, C., Primont, D., i R. R. Russell, (1978): *Duality, separability and functional structure: Theory and economic applications*, New York: American Elsevier.
2. Chambers, R. G. (1988). *Applied production analiysis*: *A Dual Approach*, Cambridge: Cambridge University Press.
3. Cornes, R. C., (1992): *Duality and modern economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
4. Jehle, Geoffrey A. i Reny, Philip J. (2001). *Advanced Microeconomic Theory*, Second Edition, Addison Wesley Longman.
5. McFadden, D., (1978): "Cost, Revenue, and Profit Functions". U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland 2-109.
6. Shepard, R. W., (1970): *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press.
7. Silberberg, E. (1990). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Second Edition. New York: McGraw-Hill Book Company.
8. Uzawa, H., (1962): *"Duality principles in the theory of cost and production"*, *International Economic Review*, 5: 216-220.