Prethodno priopćenje
UDK: 330.16

Doc. dr. sc. Ilko Vrankić
Mr. sc. Mira Oraić

UČINAK SUPSTITUCIJE I UČINAK UDALJENOSTI

SUBSTITUTION AND DISTANCE EFFECT

SAŽETAK: Suvremeni zakon potražnje sažeto opisuje jednadžba Slutskog koja razlučuje učinak supstitucije i učinak dohotka. Pritom promjenu realnog bogatstva izraženu promjenom izdataka opisuje Shepardova lema. Promjenu izdataka u dualnom prostoru zamjenjujemo promjenom udaljenosti, koju opisuje Shepard-Hanochova lema. U ovom se članku iznosi izvorna heuristička argumentacija Shepardove leme i Shepard-Hanochove leme i nadopunjava dualnost izdataka i udaljenosti. Iz te dualnosti proizlazi nova mjera promjene blagostanja važna u numeričkoj analizi inverznih funkcija potražnje. Potvrdu izloženih intuitivnih razmatranja sažima dualna jednadžba Slutskog koja opisuje dualni zakon potražnje.

KLJUČNE RIJEČI: Shepardova lema, Shepard-Hanochova lema, krivulja ekspanzije cijena, promjena blagostanja, dualni zakon potražnje.

ABSTRACT: The Slutsky Equation summarizes the modern Law of Demand in by decomposing the total effect of price change into the substitution and income effect. At the same time Shepard's lemma describes the real income change through the expenditures change. In dual space the Shepard-Hanoch lemma describes the distance change. The original argumentation of Shepard's lemma and Shepard-Hanoch lemma supplements the duality between expenditure and distance function. This duality delivers a new measure of welfare change in numeric analysis of inverse demand functions. Intuitive analyses are summarized by the dual Slutsky equation which describes the dual law of demand.

KEY WORDS: Shepard's lemma, Shepard-Hanoch lemma, price expansion curve, welfare change, dual law of demand.

---

1. UVOD

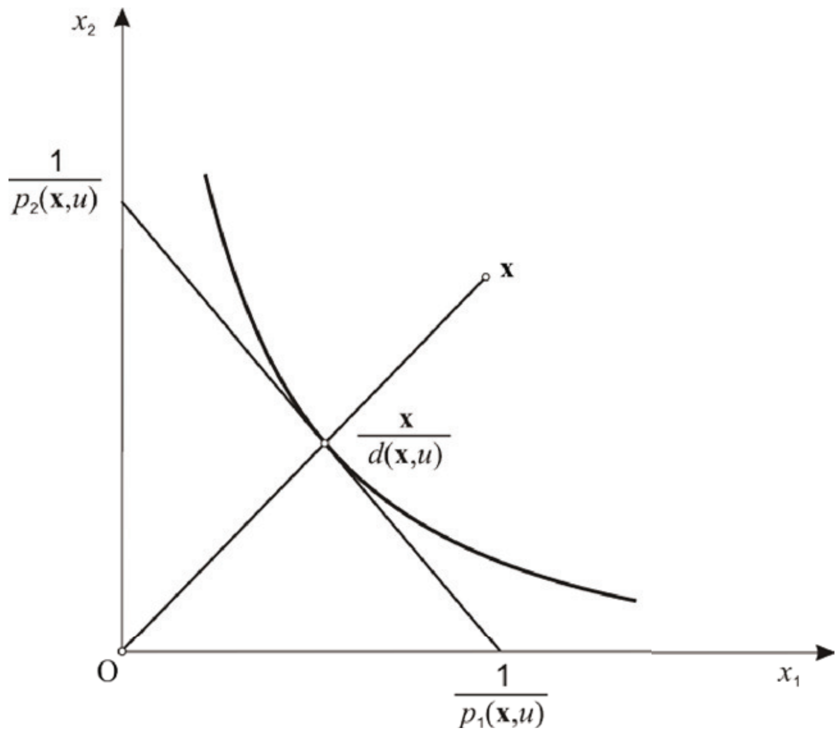
Prema klasičnom zakonu potražnje povećanje cijene smanjuje količinu koju potrošač kupuje. Iznimke o kojima govori Marshall nazivamo Giffenovim dobrima /6/. Takva su dobra poticaj za preispitivanje analize koja uzima u obzir učinak supstitucije, ali zanemaruje učinak dohotka. Oba učinka objedinjava jednadžba Slutskog koja sažeto opisuje suvremeni zakon potražnje /2, 5/. Pri određivanju učinka dohotka središnje mjesto zauzima Shepardova lema /4, 7, 8, 9/. U dualnom prostoru prikladno je umjesto učinka dohotka promatrati učinak udaljenosti /3/. Promjenu udaljenosti opisuje Shepard-Hanochova lema /1, 10/.

Linearna homogenost funkcije izdataka motivacija je za uvođenje funkcije udaljenosti i inverznih kompenziranih funkcija potražnje. U primarnom prostoru smjer indiferencije određuje normalizirane cijene pri kojima su za zadanu razinu korisnosti normalizirane količine najjeftinije. Na takav način u dualnom prostoru dobivamo kompenzirane funkcije potražnje. Poistovjetimo li aktivnog i pasivnog potrošača, smjer indiferencije i zraka iz ishodišta koju određuju nove cijene opisuju normalizirane cijene. Interpretacijom funkcije izdataka kao funkcije udaljenosti dobivamo minimalne izdatke pri novim cijenama i ukupnu promjenu izdataka. Povratak u primarni prostor i zamjena dualnih varijabli određuju ukupnu promjenu udaljenosti. U analizi funkcija potražnje promjena izdataka mjeri promjenu blagostanja i središnje mjesto zauzima Shepardova lema. Inverzija varijabli u žarište smješta Shepard-Hanochovu lemu i učinak dohotka zamjenjuje učinkom udaljenosti. Pritom funkciju udaljenosti interpretiramo kao funkciju izdataka za indirektnu funkciju korisnosti i intuitivno potvrđujemo sadržaj Shepard-Hanochove leme. Poveća li se količina nekog dobra za malu jedinicu, povećanje realnog bogatstva potrošača mjeri cijena koju plaća. Kako bismo razlučili učinak supstitucije od učinka udaljenosti najprije putujemo po indirektnoj krivulji indiferencije i povećanje cijene relativno oskudnijeg dobra kompenziramo smanjenjem cijene drugog dobra. O ukupnom učinku odlučujemo na osnovi utjecaja proporcionalne promjene količina na normalizirane cijene pri kojima ih potrošač kupuje i putovanje nastavljamo po krivulji ekspanzije cijena. Nova klasifikacija dobara vodi prema dualnom zakonu potražnje kojeg sažeto opisuje dualna jednadžba Slutskog. Ističemo novu mjeru promjene blagostanja koju opisuje dualna kompenzirana krivulja potražnje.

U odnosu na postojeću znanstvenu literaturu nudimo uvjerljiviju motivaciju za definiciju funkcije udaljenosti. Izvorni pristup omogućava originalnu argumentaciju sadržaja Shepardove i Shepard-Hanochove leme i potvrđuje intuitivnu predodžbu promjene bogatstva potrošača. Ističemo da je u analizi inverznih funkcija potražnje umjesto o učinku dohotka bolje govoriti o učinku udaljenosti. Nudimo novu klasifikaciju dobara i intuitivnim razmatranjima potvrđujemo dualnu jednadžbu Slutskog koja opisuje dualni zakon potražnje. Teorijske znanstvene doprinose nadopunjavamo novom mjerom promjene blagostanja za koju vjerujemo da će zauzeti važno mjesto u empirijskoj analizi inverznih funkcija potražnje.

2. FUNKCIJA UDALJENOSTI I INVERZNE KOMPENZIRANE FUNKCIJE POTRAŽNJE

Indirektna krivulja indiferencije sadrži kombinacije normaliziranih cijena za koje je maksimalna korisnost potrošača jednaka. Istodobno su minimalni izdaci za razinu korisnosti koju opisuje jedinični. Proporcionalnom promjenom cijena koje su izvan indirektne krivulje indiferencije vraćamo se natrag i faktor je proporcionalnosti recipročan minimalnim izdacima zbog linearne homogenosti funkcije izdataka. Možemo reći da funkcija izdataka mjeri udaljenost vektora cijena od indirektne krivulje indiferencije. Zamijenimo li dualni prostor, kojeg opisuju cijene, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, primarnim, kojeg opisuju količine, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, na isti način možemo izmjeriti udaljenost bilo koje košare dobara od zadane krivulje indiferencije, $d(x,u)$. Sada se proporcionalno mijenjaju količine i putujemo po zraci iz ishodišta (slika 1).



Slika 1. Funkcija udaljenosti i inverzne kompenzirane funkcije potražnje

Podsjetimo da funkciju izdataka, $e(\mathbf{p},u)$, izvodimo iz modela minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti, u,

$$e(\mathbf{p},u) = \min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{px}$$
$$u(\mathbf{x}) = u,$$

pri čemu je $u(\mathbf{x})$ funkcija korisnosti koja opisuje subjektivne preferencije potrošača. Kako bismo pronašli problem optimizacije iz kojeg izvodimo funkciju udaljenosti povucimo tangentu na krivulju indiferencije na mjestu kojeg određuju normalizirane količine. Tangenta određuje cijene pri kojima su za zadanu razinu korisnosti normalizirane količine najjeftinije. Iz mnoštva izdvojimo normalizirane cijene. One ovise o zadanim količinama i zadanoj razini korisnosti i nazivamo ih inverzne kompenzirane funkcije potražnje. Rješenje problema optimizacije su jedinične vrijednosti:

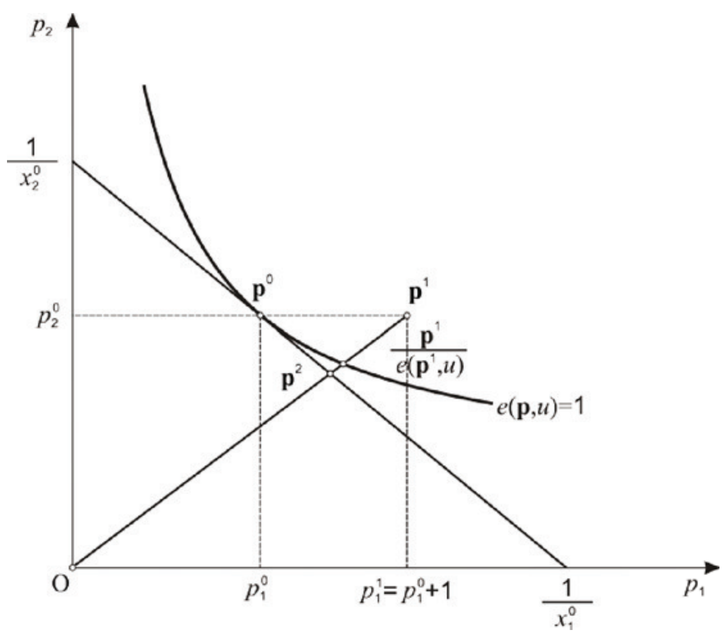
$$1 = \min_{\mathbf{p}} \quad \mathbf{p}\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}$$
$$e(\mathbf{p},u) = 1.$$

Izlučivanjem dobijemo da istodobno rješavaju problem udaljenosti:

$$d(\mathbf{x},u) = \min_{\mathbf{p}} \quad \mathbf{px}$$
$$e(\mathbf{p},u) = 1.$$

3. SHEPARDOVA LEMA

Pođimo od normaliziranih cijena $\mathbf{p}^0$ s obzirom na zadanu korisnost i povećajmo cijenu prvog dobra za jednu malu jedinicu (slika 2).



Slika 2. Shepardova lema

Normaliziramo li nove cijene, izdaci će ponovno poprimiti jediničnu vrijednost. Smjer tangente u kojem se minimalni izdaci ne mijenjaju određuje najjeftinija košara dobara $\mathbf{x}^0$ pri polaznim cijenama i zadanoj korisnosti. Ta je tvrdnja posljedica racionalnosti potrošača kojem je pri jediničnim izdacima dostupna košara dobara $\mathbf{x}^0$. Njegovi minimalni izdaci nisu veći od jedan i indirektna je krivulja indiferencije iznad indirektne budžetske crte. Poistovjetimo li u maloj okolini polaznih cijena te dvije krivulje, normalizirane cijene dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi:

$$p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 = 1$$
$$p_2 = \frac{p_2^0}{p_1^0 + 1} p_1.$$

Normalizirane su cijene

$$\mathbf{p}^2 = (\frac{p_1^0 + 1}{x_1^0 + 1}, \frac{p_2^0}{x_1^0 + 1}).$$

Na osnovi normaliziranih cijena i interpretacije funkcije izdataka kao funkcije udaljenosti dobijemo minimalne izdatke pri novim cijenama,

$$e(\mathbf{p}^1, u) = \frac{\mathrm{O}\mathbf{p}^1}{\mathrm{O}\mathbf{p}^2} = x_1^0 + 1.$$

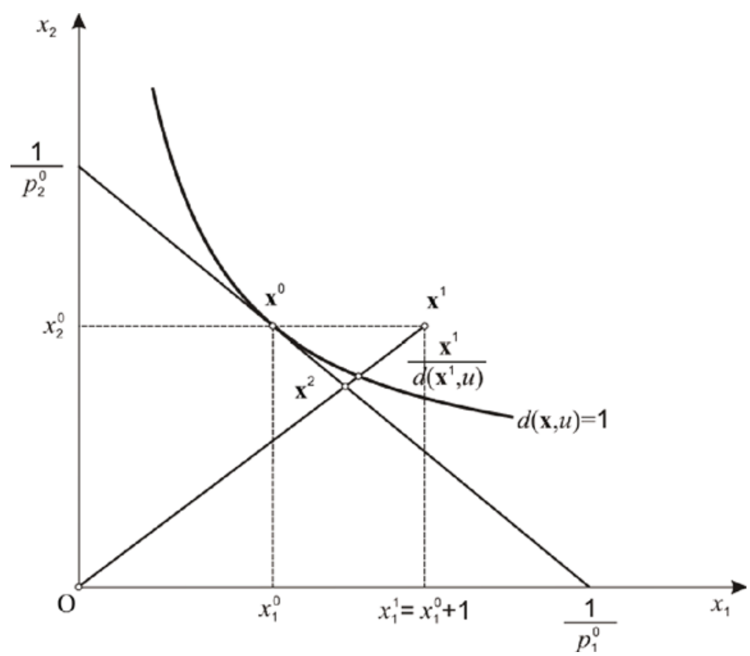
Prema tome promjena izdataka na malu jedinicu povećanja cijene prvog dobra je jednaka količini tog dobra u ravnoteži,

$$e(\mathbf{p}^1, u) - e(\mathbf{p}^0, u) = x_1^0.$$

Primijetimo da smo do sadržaja Shepardove leme došli idući u smjeru u kojem se minimalni izdaci ne mijenjaju.

4. SHEPARD-HANOCHOVA LEMA

Pođimo od normaliziranih količina $\mathbf{x}^0$ s obzirom na zadanu korisnost i povećajmo količinu prvog dobra za jednu malu jedinicu (slika 3).



Slika 3. Shepard-Hanochova lema

Normaliziramo li nove količine, udaljenost će ponovno poprimiti jediničnu vrijednost. Smjer tangente u kojem se udaljenost ne mijenja određuju normalizirane cijene $\mathbf{p}^0$ pri kojima su normalizirane količine $\mathbf{x}^0$ najjeftinije za zadanu korisnost. Na tangenti se nalaze košare dobara koje potrošač pri polaznim cijenama i jediničnim izdacima može kupiti. Interpretacijom funkcije udaljenosti kao funkcije izdataka zaključujemo da udaljenost tih košara od krivulje indiferencije nije veća od jedan. Funkcija udaljenosti je striktno rastuća u količinama i krivulja je indiferencije iznad budžetske crte. Poistovjetimo li u maloj okolini polaznih količina te dvije krivulje, normalizirane količine dobijemo rješavanjem sustava jednadžbi:

$$p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2 = 1$$
$$x_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0 + 1} x_1.$$

Normalizirane su količine

$$\mathbf{x}^2 = \left(\frac{x_1^0 + 1}{p_1^0 + 1}, \frac{x_2^0}{p_1^0 + 1}\right).$$

Na osnovi normaliziranih količina dobijemo udaljenost novih količina od zadane krivulje indiferencije,

$$d(\mathbf{x}^1, u) = \frac{\mathrm{O}\mathbf{x}^1}{\mathrm{O}\mathbf{x}^2} = p_1^0 + 1.$$

Prema tome promjena je udaljenosti na malu jedinicu povećanja količine prvog dobra jednaka cijeni tog dobra u ravnoteži,

$$d(\mathbf{x}^1, u) - d(\mathbf{x}^0, u) = p_1^0.$$

Primijetimo da smo do sadržaja Shepard-Hanochove leme došli idući u smjeru u kojem se udaljenost ne mijenja.

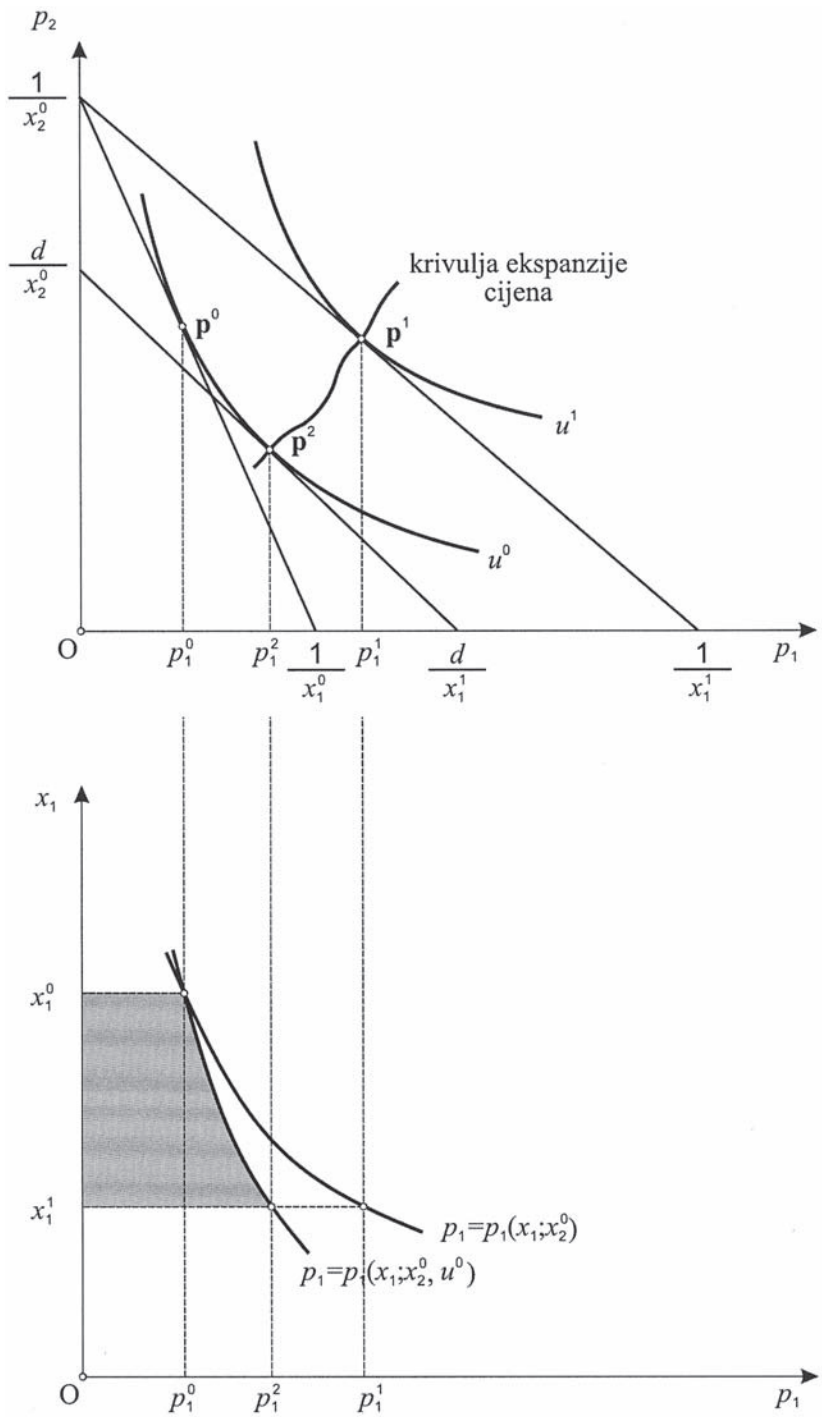
5. DUALNA JEDNADŽBA SLUTSKOG

Recipročne vrijednosti zadanih količina određuju indirektnu budžetsku crtu s koje izdvajamo normalizirane cijene pri kojima ih potrošač kupuje (slika 4),

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{p}(x_1^0, x_2^0).$$

Te cijene opisuju inverzne funkcije potražnje i dobivamo ih na osnovi najmanje maksimalne korisnosti uz indirektno budžetsko ograničenje. Promjena količine prvog dobra rotira indirektnu budžetsku crtu na kojoj nalazimo nove normalizirane cijene pri kojima potrošač kupuje nove količine,

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{p}(x_1^1, x_2^0).$$



Slika 4. Učinak supstitucije i učinak udaljenosti

Preslikavanjem iz prostora cijena u prostor kojeg određuju količina i cijena prvog dobra dobijemo dualnu uobičajenu krivulju potražnje. Ta krivulja opisuje normaliziranu cijenu prvog dobra pri kojoj potrošač kupuje zadanu količinu prvog dobra kada se količine drugih dobara ne mijenjaju. Pomak duž dualne uobičajene krivulje potražnje utječe na blagostanje potrošača kojem promjenu mjerimo promjenom udaljenosti. Pritom ulogu Shepardove leme preuzima Shepard-Hanochova lema i ukupnu promjenu cijena razdjeljujemo na dva dijela. Najprije putujemo po konveksnoj indirektnoj krivulji indiferencije i povećanje cijene relativno oskudnijeg dobra kompenziramo smanjenjem cijene drugog dobra. Supstituciju zaustavlja jednakost između odnosa graničnih izdataka i odnosa novih količina,

$$\frac{\frac{\partial e}{\partial p_1}}{\frac{\partial e}{\partial p_2}} = \frac{x_1^1}{x_2^0}.$$

Taj uvjet tangencijalnosti dovodi do mjesta dodira polazne indirektne krivulje indiferencije i translatirane nove indirektne budžetske crte i opisuje ravnotežu potrošača koji traži normalizirane cijene pri kojima su normalizirane količine $\frac{\mathbf{x}^1}{d(\mathbf{x}^1, u^0)}$ najjeftinije na polaznoj krivulji indiferencije,

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}(\mathbf{x}^1, u^0).$$

Tražene cijene opisuju inverzne kompenzirane funkcije potražnje i rješavaju problem udaljenosti. Kada se uz indeks korisnosti ne mijenja ni količina drugog dobra u prostoru količine i cijene putujemo duž dualne kompenzirane krivulje potražnje. U prostoru cijena putovanje nastavljamo po krivulji ekspanzije cijena. Ključno je pitanje kako proporcionalna promjena količina utječe na normalizirane cijene pri kojima ih potrošač kupuje. Proporcionalnoj promjeni količina odgovara proporcionalna promjena udaljenosti i putovanje po krivulji ekspanzije cijena koje opisuje učinak udaljenosti, stvara jaz između dualne uobičajene krivulje potražnje i dualne kompenzirane krivulje potražnje,

$$p_1^1 - p_1^0 = (p_1^2 - p_1^0) + (p_1^1 - p_1^2).$$

Na taj smo način ukupni učinak razdijelili na učinak supstitucije i učinak udaljenosti i izveli dualnu jednadžbu Slutskog u diskretnom obliku. Kada je krivulja ekspanzije cijena pozitivno nagnuta smanjenje količine povećava normaliziranu cijenu pri kojoj je potrošač kupuje. Primarno smo dobra dijelili na normalna i inferiorna. Krivulja ekspanzije cijena dual je krivulje ekspanzije potrošnje i određuje novu klasifikaciju na osnovi utjecaja promjene udaljenosti na normalizirane cijene pri kojima potrošač kupuje normalizirane količine. Mijenjaju li se količine dobara koje potrošač kupuje neprekidno, ne promatramo ukupne promjene cijena nego stope promjena. Pozornost usmjeravamo na razliku između nagiba dualne uobičajene krivulje potražnje i dualne kompenzirane krivulje potražnje. Ta je razlika učinak udaljenosti, i proporcionalnoj promjeni količina koja potrošača vraća na polaznu krivulju indiferencije odgovara razlika između udaljenosti nove i stare košare dobara od polazne krivulje indiferencije. Prema Shepard-Hanochovoj lemi promjena udaljenosti na malu jedinicu povećanja količine jednaka je cijeni u ravnoteži koja opisuje povećanje realnog bogatstva potrošača. Ta tvrdnja intuitivno slijedi iz interpretacije funkcije udaljenosti kao funkcije izdataka za indirektnu funkciju korisnosti. Kako potrošač zapravo prelazi s polazne na završnu krivulju indiferencije stvarna je promjena udaljenosti suprotna cijeni i množimo je s promjenom normalizirane cijene bilo kojeg dobra koja podupire kupovinu normaliziranih količina na malu jedinicu povećanja udaljenosti. Dualna jednadžba Slutskog za jediničnu udaljenost poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial p_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial p_i(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))}{\partial x_j} - p_j(\mathbf{x}) \frac{d}{dd}(p_i(\frac{\mathbf{x}}{d}))\Big|_{d=1}.$$

Ponovno smo ukupni učinak razdijelili na učinak supstitucije i učinak udaljenosti i na sažet način opisali dualni zakon potražnje prema kojem povećanje količine smanjuje normaliziranu cijenu pri kojoj je potrošač kupuje ako proporcionalno povećanje količina smanjuje cijenu. U suprotnom smjer promjene normalizirane cijene ovisi o tome je li dominantan učinak supstitucije ili učinak udaljenosti. Povezujući integral i derivaciju zanimljivo je još primijetiti da površina koju određuje dualna kompenzirana krivulja potražnje opisuje promjenu udaljenosti ili dual Hicksove kompenzacijske varijacije. Pritom su nova mjera promjene blagostanja i njezina aproksimacija svakako putokaz svima koje zanimaju inverzne funkcije potražnje i numerička analiza.

6. ZAKLJUČAK

Iznimke od klasičnog zakona potražnje motivacija su za preispitivanje analize koja zanemaruje učinak dohotka. U analizi inverznih funkcija potražnje umjesto učinka dohotka treba promatrati učinak udaljenosti. Prema funkciji udaljenosti na prirodan način vodi znatno jednostavnije računanje minimalnih izdataka koje polazi od krivulja indiferencije u dualnom prostoru cijena. Pritom smjer indiferencije i proporcionalna promjena cijena opisuju normalizirane cijene na osnovi kojih dualnom interpretacijom funkcije izdataka izvodimo Shepardovu lemu. Originalnim pristupom i zamjenom dualnih varijabli potvrđujemo i sadržaj Shepard-Hanochove leme kojeg povezujemo s novom mjerom promjene blagostanja. Ukupni učinak promjene količine na normalizirane cijene dijelimo na učinak supstitucije i učinak udaljenosti. U prostoru cijena putujemo po indirektnoj krivulji indiferencije i krivulji ekspanzije cijena. Putovanje po krivulji ekspanzije cijena stvara jaz između dualne uobičajene krivulje potražnje i dualne kompenzirane krivulje potražnje. Taj jaz opisuje učinak udaljenosti koje promjenu mjeri površina ispod dualne kompenzirane krivulje potražnje. Promjena udaljenosti odgovara proporcionalnoj promjeni normaliziranih količina, i krivulja ekspanzije cijena određuje novu klasifikaciju dobara koja zauzima središnje mjesto u opisu dualnog zakona potražnje.

LITERATURA:

1. Blackorby, C., Primont, D., i R. R. Russell, (1978): *Duality, separability and functional structure: Theory and economic applications*, New York: American Elsevier.

2. Chipman, J. S., L. Hurwicz, M. K. Richter, i H. F. Sonnenschein (1971). *Preferences, Utility and Demand*. Harcourt Brace Jovanovich, New York.
3. Cornes, R. C., (1992): *Duality and modern economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
4. Diewert, W. E., (1980): "Duality approaches to microeconomic theory", u K. J. Arrow i M. D. Intriligator, *Handbook of mathematical economics*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland, 535-599.
5. Jehle, Geoffrey A.i Reny, Philip J. (2001). *Advanced Microeconomic Theory*, Second Edition, Addison Wesley Longman.
6. Marshall, A., (1966): *Principles of Economics*, Eighth Edition, MacMillan.
7. McFadden, D., (1978): "Cost, Revenue, and Profit Functions". U: Fuss, M., McFadden, D., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland 2-109.
8. Shepard, R. W., (1970): *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press.
9. Uzawa, H., (1962): "Duality principles in the theory of cost and production ", *International Economic Review*, 5: 216-220.
10. Weymark, J. A., (1980): "Duality results in demand theory", *European Economic Review*, 14: 377-395.