Dr. sc. Dominika Crnjac Milić
Elektrotehnički fakultet u Osijeku

Mr. sc. Martina Crnjac
Agrokor d.d. - PIK Vrbovec

UDK 330.4
Izvorni znanstveni članak

OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE KAO PODLOGA ODLUČIVANJU

Sažetak
U radu je dana interpretacija proizvodnje koja može poslužiti menadžmentu pri odlučivanju. Uz određene pretpostavke riješena je matematička interpretacija optimalne alokacije resursa i maksimizacija dohotka gospodarskog subjekta.

Ključne riječi
proizvodi, resursi, optimizacija, matrica, nejednadžba, vektor

1. Uvod

Često u gospodarstvu gospodarski subjekt ima više tehnoloških procesa koje može primjenjivati s različitim intenzitetom. Tendencija svakoga gospodarskog subjekta je maksimizirati ukupan prihod.

U tržišnoj ekonomiji i slobodnoj konkurenciji uz ograničenja u tehnološkim procesima i resursima nije jednostavno naći optimalno rješenje koje će poslužiti kao podloga pri donošenju odluka.

2. Ekonomska interpretacija proizvodnje kao podloga menadžmentu pri odlučivanju

Neka neki gospodarski subjekt s raspoloživim tehnologijama iz danih resursa proizvodi određene proizvode. Pretpostavimo da gospodarski subjekt raspolaže sa m vrsta resursa $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_m$ i mogućnosti je proizvoditi n različitih proizvoda $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Nadalje, neka je vektor $(a_{1j}, a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$ tehnologija proizvodnje proizvoda p_j, pri čemu je $(a_{1j}, a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$

transponirana matrica[1], $\mathbb{R}^m$ m - dimenzionalan vektorski prostor[2] i a_{ij} utrošak resursa potrebnog za proizvodnju jedinice proizvoda p_j.

U mogućnosti smo postaviti tehnološku matricu[3] koja opisuje mogućnosti proizvodnje

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ . \ . \ . + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ . \ . \ . + & a_{2n}x_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & . \ . \ . & \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & + \ . \ . \ . + & a_{mn}x_n \end{array}$$

Prethodno možemo kraće pisati u matričnom obliku Ax, pri čemu uvjete ograničenosti resursa pišemo $Ax \le b$,gdje je $b = (b_1, b_1, \ldots, b_m)^T$ (vektor resursa).

Ako je zadan vektor resursa $b = (b_1, b_1, \ldots, b_m)^T$ promatranog proizvodnog subjekta, moguće je proizvesti svaku količinu proizvoda x koja zadovoljava uvjete $Ax \le b, x \ge 0$.

Zamijetimo da prethodni vektor nije jedinstven, tj. radi se o skupu (familiji) $D = \left\{ x : Ax \le b, x \ge 0 \right\}$ što vodi u mogućnost izbora najboljeg, tj. optimalnog plana proizvodnje.

Neka su poznate cijene proizvoda $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ koje možemo pisati u obliku vektora $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$.

Cilj nam je odrediti plan proizvodnje, da je ukupna vrijednost proizvedenih roba najveća ili matematičkim jezikom, naći $\max c^T x$ uz uvjete $Ax \le b, x \ge 0$.

Prethodno rečeno omogućava nam nalaženje optimalnog plana proizvodnje, tj. svođenje problema na problem maksimuma koji kraće zapisujemo oznakom M.

Zamijetimo da je $A \ge 0$ i $B \ge 0$, te da je $D \ne 0$, što je lako uočiti, jer je $0 \in D$ .t

Dualni problem prethodnom je $\min y^T b$, pri čemu je $y^T A \ge c^T, y \ge 0$ i bilježimo ga s (m).

Skup $E = \left\{ y : y^T A \ge c^T, y \ge 0 \right\}$, skup svih mogućih rješenja problema (m) nije prazan skup, što je lako uočiti, jer za dovoljno veliki $\eta > 0$ vektor pripada skupu E.

Prema dobro poznatoj tvrdnji dualiteta postoje optimalna rješenja problema (M) i problema (m).

Ako su rješenja vektori $\bar{x}$ i $\bar{y}$ respektivna, tada za ove vektore vrijedi:

$$A\bar{x} \le b,$$

$$\bar{y}^T A \ge c^T,$$

$$c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$$

$$\bar{x} \ge 0, \quad \bar{y} \ge 0.$$

Zamijetimo da iz $\sum_i a_{ij} y_j \ge c$ slijedi da je y_i omjer vrijednosti i količine, pa je zapravo riječ o cijeni i-tog resursa.

U dualnom problemu određuju se cijene resursa koje minimiziraju ukupnu vrijednost resursa, što kazuje da niti jedan tehnološki proces ne može dati više nego je u njega uloženo, pa za optimalna rješenja $\bar{x}$, $\bar{y}$ vrijedi

Iz $\left(A\bar{x}\right) < b_i$ slijedi $\bar{y}_i = 0$,

Iz $\left(\bar{y}^T A\right) > c_j$ slijedi $\bar{x}_j = 0$,

odakle je cijena neiskorištenih resursa jednaka nuli, a proizvodi koji donose gubitak ne proizvode se.

1 Kurepa, S.: Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Sveučilišna naklada „Liber", Zagreb, 1976., str. 124. i 395.

2 Kurepa, S.: idem, str.36.

3 Perić, V.: Algebra, prsteni i moduli, IGKRO, Sarajevo, 1980., str.132

3. Optimalna alokacija resursa

Neka proizvodni subjekt ima nekoliko tehnoloških procesa[4] koje može koristiti s različitim intenzitetom.

Neka je dohodak od tehnološkog procesa zadan i neka proizvodni subjekt nastoji maksimizirati svoj ukupan prihod uz ograničenja na sirovine koje sudjeluju u spomenutom procesu. Proučavanjem ekonomije[5] nećemo pretpostaviti da su nam poznati resursi pojedinoga gospodarskog subjekta.

Predmet izučavanja u ovom radu je alokacija resursa čitave ekonomije na pojedine gospodarske subjekte. U radu ćemo pokazati da se ovaj problem rješava slobodnom konkurencijom. U svrhu rješenja spomenutog problema resurse ćemo podijeliti u dvije kategorije.

U prvu kategoriju pripadaju resursi koji se mogu koristiti u različitim gospodarskim subjektima.

U drugu kategoriju pripadaju proizvodni kapaciteti gospodarskih subjekata, kapitalna oprema.

Matricu tehnologije i vektor resursa također ćemo podijeliti u dva dijela.

Prvo promotrimo slučaj proizvodnih kapaciteta.

Ako je x_k vektor intenzivnosti za $k-ti$ gospodarski subjekt, on je ograničen kapacitetima gospodarskog subjekta nejednadžbama $B_k x_k \leq b_k$ (1), pri čemu je b_k vektor resursa dostupnih $k-tom$ gospodarskom subjektu.

B_k je matrica kojoj element na presjeku $i-tog$ retka i $j-tog$ stupca opisuje količinu $i-tog$ resursa potrebnog za djelovanje $j-tog$ procesa jediničnim intenzitetom.

Ekonomski uvjeti daju da su B_k i b_k nenegativni.

Uvažavajući uvjet (1) k-ti gospodarski subjekt proizvodi i troši resurse proporcionalno.

Matematički gledano, postoji matrica A_k da uz intenzivnost x_k gospodarski subjekt troši, odnosno proizvodi resurse $A_k x_k$. Zamijetimo da matrica A_k ne mora biti nenegativna.

Ovdje ćemo promatrati slučaj kada cijene resursa nisu zadane unaprijed, nego ih određujemo mehanizmom slobodne konkurencije.

Uvažavajući uvjet da svi gospodarski subjekti ne mogu potrošiti resursa više nego što ih ima u čitavom gospodarstvu, pri čemu je $s = (s_i)$ vektor čija $i-ta$ koordinata kazuje kojom količinom tog resursa raspolaže gospodarstvo, pa uvjet prima oblik $\sum_{k=1}^{m} A_k x_k \leq s$ (2)

Koristeći relacije (1) i (2) nije teško naći neki skup vektora x_k. Štoviše, u općem slučaju imamo beskonačno mogućih rješenja spomenutih nejednadžbi. Jedno od tih rješenja možemo dobiti pomoću slobodne konkurencije.

Neka su zadane cijene $v = (v_i)$ resursa promatrane ekonomije. Zanima nas ponašanje $k-tog$ gospodarskog subjekta. U tu svrhu označimo d_j^k dohodak $k-tog$ gospodarskog subjekta kada koristi $j-ti$ tehnološki proces konstantnim (jediničnim) intenzitetom, pa je ukupan dohodak jednak $c_k^T x_k$, pri čemu je $c_k = (d_j^k)$, a troškovi su $vA_k x_k$.

Prema prethodno rečenom, gospodarski subjekt treba maksimizirati čisti dohodak dan izrazom $(c_k^T - v^T A_k)x_k$,

Dakle svaki od m gospodarskih subjekata uz zadane cijene v rješava problem linearnog programiranja $\max(c_k^T - v^T A_k)x_k$ (3) uz uvjet (1).

Zamijetimo da optimalna rješenja $x_k, k \in \{1,2,...,m\}$ neće u općem slučaju zadovoljavati uvjet (2).

Drugim riječima utrošci resursa neće se podudarati s njihovom raspoloživošću, jednih će biti viška, a drugih će nedostajati.

Uvažavajući zakone ponude i potražnje[6] doći ćemo do ravnotežne cijene pri kojoj neće biti viška potražnje ni jednog resursa. Zamijetimo da je alokacija resursa generirana ravnotežnim cijenama rješenje problema alokacije pomoću slobodne konkurencije. Prije svega potrebno je pokazati da ravnotežne cijene egzistiraju.

U tu svrhu koristit ćemo teoriju linearnog programiranja. Ovdje se nameće težak problem na uvjete (2) uz koje će nejednadžba prijeći na jednadžbu.

4 Pod tehnološkim procesom podrazumijevamo proizvodnju roba pomoću roba.

5 Pod ekonomijom podrazumijevamo skup gospodarskih subjekata, pri čemu je k-ti gospodarski subjekt okarakteriziran tehnološkom matricom A_k.

6 Pavlović, I.: Poslovna matematika za ekonomiste, Sveučilište u Mostaru, 1997., str. 81.

Prethodni problem u primjeni ima dosta aplikacija. Može se postaviti pitanje cijena uz koje će se svi resursi proizvoditi u potrebitim količinama. Primjera radi, pri proizvodnji brašna dobivaju se mekinje kao nusproizvod, a koriste se za stočnu ishranu.

Prirodno je da je veća potražnja brašna od potražnje mekinja. Pri podmirenju potrošnje brašna pojavljuje se višak mekinja, pa se događa da se u ravnotežnoj situaciji neki resursi ne koriste u cijelosti. Prihvatit ćemo da je cijena svih neiskorištenih resursa jednaka nuli. Prethodno rečeno matematičkim ćemo jezikom formalizirati.

Definicija: Za vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_m, v) \in \mathbb{R}^{m+1}$ kažemo da daje konkurentnu ravnotežu ako njegove komponente zadovoljavaju uvjete (1), (2), (3) i $(\sum_{k=1}^{m} A_k x_k) < s$ implicira $v_i = 0$ (4)

Vektor v nazivamo vektor ravnotežnih cijena.

Tvrdnja: Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_m, v)$ konkurentna ravnoteža, onda vektori x_k maksimiziraju $\sum_{k=1}^{m} c_k^T x_k$ i zadovoljavaju ograničenja (1) i (2).

Dokaz: Neka su z_k bilo koji vektori koji zadovoljavaju (1) i (2), tada za sve k prema (4) imamo:

$$(c_k^T - v^T A_k)x_k \geq (c_k^T - v^T A_k)z_k$$

Sumiranjem prethodnih jednadžbi po k dobivamo

$$c_k^T x_k - \sum_k c_k^T z_k \geq \sum_k v^T A_k x_k - \sum_k v^T A_k z_k$$

Prema nejednadžbi (2) dobivamo

$\sum_k A_k z_k \leq s$ pa je $v^T A_k z_k \leq v^T s$

Iz (2) i (4) lako zaključujemo da je $v^T A_k x_k = v^T s$, pa je lijeva strana nejednadžbe (5) nenegativna i $\sum_k c_k^T x_k \geq \sum_k c_k^T z_k \geq$ čime je tvrdnja dokazana.

4. Zaključak

U radu je pokazano da postojanje ekonomske ravnoteže motivira gospodarski subjekt da se uključuje u djelatnost kao da su sastavni dio cjeline čiji je cilj maksimizirati proizvodnju.
Ukupan prihod ne može biti po volji velik, što garantira pretpostavka o omeđenosti skupa rješenja nejednadžbe (1).
Gospodarski gledano, prethodnom odgovara pretpostavka da zbog ograničenja proizvodnih kapaciteta, niti jedan tehnološki proces ne može funkcionirati s proizvoljno visokim intenzitetom.
Kao empirijska podloga u radu korišteni su podaci tvrtke PIK-Vrbovec.

Literatura

1. Chang, Alpha C.: Osnovne metode matematičke ekonomije, Mate, Zagreb 1994.
2. Kmenta, J.: Počela ekonometrije, Mate, Zagreb, 1997.
3. Kurepa, S.: Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1976.
4. Galić, R., Crnjac Milić, D., Galić, I., Katić, A.: Matematika 1, Elektrotehnički fakultet u Osijeku, 2008.
5. Pavlović, I.: Poslovna matematika za ekonomiste, Sveučilište u Mostaru,1997.
6. Perić, V.: Algebra, prsteni i moduli, IGRO, Sarajevo, 1980.

Dominika Crnjac Milić, Ph.D.
Faculty of Electrical Engineering in Osijek

Martina Crnjac M.Sc.
Agrokor d.d.

Production Optimisation as a Decision Making Basis

Summary

This paper provides a production analysis which can help management in the decision making process. Given that certain assumptions are correct, the mathematical interpretation of the optimal resource allocation and the income maximisation of a certain economic entity can be solved.

Key words

products, resources, optimisation, matrix, inequation, vector