Primjena AG-nejednakosti u trigonometriji

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Razmatraju se primjene AG-nejednakosti u trigonometriji, koje su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka prilagođenih učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *AG-nejednakost, trigonometrija*

Applications of AG inequality in trigonometry

Abstract. *Applications of AG-inequality in trigonometry are considered. These applications are illustrated on a number of interesting tasks adapted for high school students.*

Key words: *AG-inequality, trigonometry*

O primjeni AG-nejednakosti u planimetriji bilo je riječi u [5], dok je ovaj članak posvećen primjeni AG-nejednakosti u trigonometriji.

Zadatak 1. *Dokažite nejednakost*

$$\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 8$$

ako je $\sin x \cos x \neq 0$.
Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}} = 2\sqrt{\frac{16}{16\sin^4 x \cos^4 x}} \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{\frac{1}{(2\sin x \cos x)^4}} = 8\sqrt{\frac{1}{\sin^4 2x}} \\ &\geq 8,\end{aligned}$$

jer je $\sin^4 2x \leq 1$. Pri tome jednakost vrijedi onda i onda ako je $\sin^4 x = \cos^4 x = \frac{1}{4}$, tj. za $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 2. *Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu C. Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a α i β kutovi tog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) \geq \sqrt{\sin\alpha \sin\beta},$$

odnosno

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \sqrt{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Kako je $\alpha+\beta = 90°$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$, to gornja nejednakost prelazi u

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}},$$

odakle dobivamo

$$\cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je trokut ABC jednakokračan pravokutan.

Zadatak 3. *Dokažite da za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost*

$$7^7 \sin^4\alpha\cos^{10}\alpha \leq 12500.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned}
7^7 \sin^4\alpha\cos^{10}\alpha &= 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}\right)^5 \\
&\leq 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\left(\frac{\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\cos^2\alpha}{5}+\frac{\cos^2\alpha}{5}+\frac{\cos^2\alpha}{5}+\frac{\cos^2\alpha}{5}+\frac{\cos^2\alpha}{5}}{7}\right)^7 \\
&= 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{7}\right)^7 = 7^7\cdot 2^2\cdot 5^5\cdot\frac{1}{7^7} \\
&= 12500.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{\sin^2\alpha}{2} = \frac{\cos^2\alpha}{5}$ tj. onda i samo onda ako je $\alpha = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{5}} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 4. *Dokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} 2^{\sin x}+2^{\cos x} &\geq 2\sqrt{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x+\cos x}} \\ &= 2\sqrt{2^{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}} \geq 2\sqrt{2^{-\sqrt{2}}} = 2\cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\sin x = \cos x$ i $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$, a to je onda i samo onda ako je $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 5. *Neka su α i β šiljasti kutovi. Dokažite da vrijedi*

$$\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+2} \geq 2.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \geq 2\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = 2,$$

pa je

$$\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+2} \geq \sqrt{2+2} = 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, tj. (obzirom da su kutovi α i β šiljasti) onda i samo onda ako je $\alpha = \beta$.

Zadatak 6. *Odredite minimalnu vrijednost izraza*

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{2}\sin x},$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}]$.

Rješenje. Pribrojnici su pozitivni pa možemo upotrijebiti AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} &= \sin^2 x + \frac{1}{2\sqrt{2}\sin x} + \frac{1}{2\sqrt{2}\sin x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\sin x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}\sin x}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Minimalna vrijednost je $\frac{3}{2}$ i ona se dostiže za $\sin^2 x = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin x}$, tj. $\sin^3 x = \frac{1}{\sqrt{8}}$, odakle slijedi $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $x = \frac{\pi}{4}$.

Zadatak 7. *Riješite jednadžbu*

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Rješenje. Iz

$$-1 \le \cos\frac{x^2+x}{6} \le 1$$

slijedi

$$0 \le \cos^2\frac{x^2+x}{6} \le 1,$$

a onda i

$$0 \le 2\cos^2\frac{x^2+x}{6} \le 2.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $2^x = 2^{-x}$, tj. $x = 0$. Za $x = 0$ je

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2\cos^2\frac{0^2+0}{6} = 2,$$

pa $x = 0$ jest rješenje jednažbe.

Zadatak 8. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Prema poučku o kosinusu je

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) - \frac{a^2}{2bc}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 2,$$

to je

$$\cos\alpha \ge 1 - \frac{a^2}{2bc},$$

tj.

$$1 - \cos\alpha \le \frac{a^2}{2bc}.$$

Odatle dobivamo

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{a^2}{2bc},$$

tj.

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Analogno,

$$\sin\frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Stoga je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{abc}{abc} = \frac{1}{8}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $a = b = c$ tj. onda i samo onda ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 9. *Neka su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{tg}^n\alpha + \operatorname{tg}^n\beta + \operatorname{tg}^n\gamma \geq 3\sqrt{3^n}.$$

Rješenje. Dokažimo najprije da je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Iz $\gamma = \pi-(\alpha+\beta)$ dobivamo

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

odakle je

$$\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta,$$

tj.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},$$

pa je

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},$$

odakle dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \geq \sqrt{3^3}.$$

Dalje, prema AG-nejednakosti je

$$\operatorname{tg}^n\alpha + \operatorname{tg}^n\beta + \operatorname{tg}^n\gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n\alpha \cdot \operatorname{tg}^n\beta \cdot \operatorname{tg}^n\gamma} \geq 3\sqrt[3]{(\sqrt{3^3})^n} = 3\sqrt{3^n}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma$, a to je onda i samo onda ako je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 10. *Neka su $\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ i $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 8$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)^2 + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha)^2 \geq \frac{289}{8}.$$

Rješenje. Kako je $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ i $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, nejednakost je ekvivalentna redom s

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 &\geq \frac{289}{8},\\
\operatorname{tg}^2\alpha + 2\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} + \operatorname{tg}^2\beta + 2\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} &\geq \frac{289}{8},\\
\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 2\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta} &\geq \frac{289}{8},\\
\left(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta\right)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)^2 &\geq \frac{289}{8}.
\end{aligned}$$

Prema KA-nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}{2}} \geq \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2},$$

odakle slijedi

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta \geq 32,$$

a prema AG-nejednakosti je

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \geq \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

a odatle je

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \geq \frac{1}{16}.$$

Stoga je

$$\left(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta\right)\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)^2 \geq 32\cdot\left(1 + \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{289}{8}.$$

Zadatak 11. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC i neka je b aritmetička sredina a i c. Dokažite da je tada $\beta \leq \frac{\pi}{3}$.*
Rješenje. Iz danog uvjeta je $b = \frac{1}{2}(a+c)$. Prema poučku o kosinusu je

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-\left(\frac{1}{2}(a+c)\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{4}.$$

Kako je prema AG-nejednakosti $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$, to je $\cos\beta \geq \frac{3}{8}\cdot 2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, odakle slijedi $\beta \leq \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 12. *Oko kružnice je opisan trapez. Ako su e i f duljine dijagonala trapeza, a r polumjer kružnice, dokažite da vrijedi nejednakost*

$$e^2 + f^2 \geq 16r^2.$$

Rješenje. Neka su a i c duljine osnovica trapeza, b i d duljine krakova, a α kut između dijagonala. Kako je trapez tangencijalan, to vrijedi

$$a + c = b + d > 4r. \tag{1}$$

Kako je $|\sin\alpha| \leq 1$, to je $2ef \geq 2ef\sin\alpha$. Prema AG-nejednakosti je $e^2 + f^2 \geq 2ef$, pa je $e^2 + f^2 \geq 2ef\sin\alpha$, tj.

$$e^2 + f^2 \geq 4P, \tag{2}$$

gdje je P površina trapeza. S druge strane je

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot 2r = (a+c)r, \tag{3}$$

pa iz (2) i (3) slijedi

$$e^2 + f^2 \geq 4r(a+c).$$

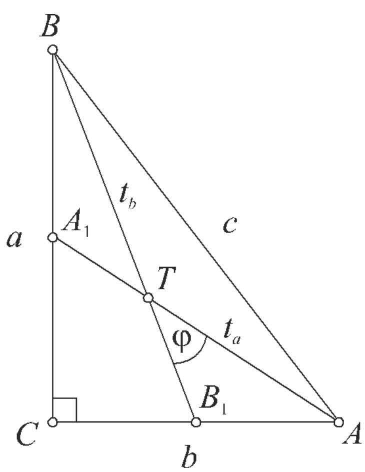
Dalje je, zbog (1),

$$e^2 + f^2 \geq 4r \cdot 4r = 16r^2.$$

Zadatak 13. *Neka su u pravokutnom trokutu ABC, a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a t_a i t_b duljine težišnica povučenih iz vrhova A i B, redom. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sphericalangle(t_a, t_b) \geq \frac{4}{5}.$$

Rješenje.



Slika 1.

Označimo $\sphericalangle(t_a, t_b) = \varphi$. Neka su A_1 i B_1 polovišta kateta $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, redom. Primijenimo Pitagorin poučak na trokute AA_1C i B_1BC:

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Odatle dobivamo

$$a^2 = \frac{16{t_b}^2 - 4{t_a}^2}{15}.$$

Primijenimo poučak o kosinusu na trokut B_1AT :

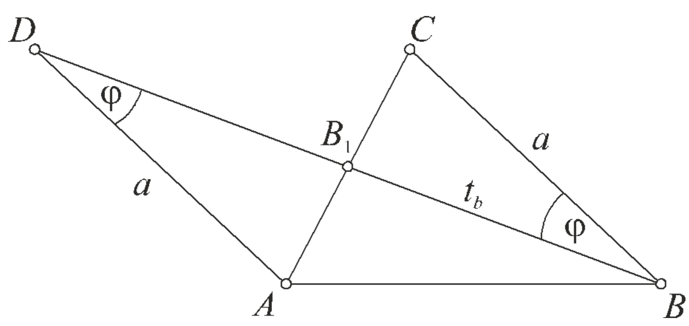
$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\left(\frac{1}{3}t_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{3}t_b\cdot\frac{2}{3}t_a} = \frac{\frac{1}{9}{t_b}^2 + \frac{4}{9}{t_a}^2 - {t_b}^2 + a^2}{\frac{4}{9}t_a t_b} \\ &= \frac{\frac{1}{9}{t_b}^2 + \frac{4}{9}{t_a}^2 - {t_b}^2 + \frac{16{t_b}^2-4{t_a}^2}{15}}{\frac{4}{9}t_a t_b} = \frac{\frac{8}{45}({t_a}^2 + {t_b}^2)}{\frac{4}{9}t_a t_b} \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{{t_a}^2 + {t_b}^2}{2t_a t_b} \geq \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

jer je prema AG-nejednakosti ${t_a}^2 + {t_b}^2 \geq 2t_a t_b$ tj. $\frac{{t_a}^2+{t_b}^2}{2t_a t_b} \geq 1$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $t_a = t_b$, tj. onda i samo onda ako je pravokutni trokut ABC jednakokračan.

Zadatak 14. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC. Težišnica $\overline{BB_1}$ zatvara sa stranicom $\overline{BC}$ kut φ. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\operatorname{ctg}\sphericalangle CAB \geq \frac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Rješenje. Neka je točka B_1 polovište dužine $\overline{AC}$. Konstruirajmo točku D centralno simetričnu točki B obzirom na točku B_1 kao centar simetrije. Tada su trokuti AB_1D i CB_1B sukladni prema S-K-S teoremu, pa je $\sphericalangle ADB_1 = \sphericalangle CBB_1 = \varphi$.



Slika 2.

Neka je $|BC| = a$, $|BB_1| = t_b$. Prema poučku o kosinusu, iz trokuta ABD i AB_1D nalazimo

$$|AB|^2 = a^2 + 4{t_b}^2 - 4at_b\cos\varphi,$$

$$|AB_1|^2 = a^2 + {t_b}^2 - 2at_b \cos\varphi.$$

Iz trokuta ABB_1 je

$$\cos\sphericalangle CAB = \frac{|AB|^2 + |AB_1|^2 - |BB_1|^2}{2\cdot|AB|\cdot|AB_1|}.$$

Dijeljenjem sa $\sin\sphericalangle CAB$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\sphericalangle CAB &= \frac{a^2 + 4{t_b}^2 - 4at_b\cos\varphi + a^2 + {t_b}^2 - 2at_b\cos\varphi - {t_b}^2}{2\cdot|AB|\cdot|AB_1|\cdot\sin\sphericalangle CAB}\\
&= \frac{2a^2 + 4{t_b}^2 - 6at_b\cos\varphi}{2\cdot 2P(ABB_1)} = \frac{2a^2 + 4{t_b}^2 - 6at_b\cos\varphi}{2\cdot 2P(BCB_1)}\\
&= \frac{2a^2 + 4{t_b}^2 - 6at_b\cos\varphi}{2at_b\sin\varphi} = \frac{a^2 + 2{t_b}^2 - 3at_b\cos\varphi}{at_b\sin\varphi}\\
&= \frac{a}{t_b\sin\varphi} + \frac{2t_b}{a\sin\varphi} - 3\operatorname{ctg}\varphi.
\end{aligned}$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{a}{t_b\sin\varphi} + \frac{2t_b}{a\sin\varphi} \geq 2\sqrt{\frac{a}{t_b\sin\varphi}\cdot\frac{2t_b}{a\sin\varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi},$$

pa je

$$\operatorname{ctg}\sphericalangle CAB \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi} - 3\operatorname{ctg}\varphi = \frac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $\frac{a}{t_b\sin\varphi} = \frac{2t_b}{a\sin\varphi}$, tj. onda i samo onda ako je $t_b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Zadatak 15. *Neka su α, β i γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha}} &+ \frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\beta}}\\
&+ \frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma}} \geq 3.
\end{aligned}$$

Rješenje. Označimo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha} &= x,\\
\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\beta} &= y,\\
\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma} &= z.
\end{aligned}$$

Dokažimo najprije da su brojevi x, y, z pozitivni. Kako je

$$\begin{aligned}
(\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma})^2 &> \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\\
&> 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha
\end{aligned}$$

(zbog $|\beta-\gamma|<\beta+\gamma<\pi$), to je $\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}>\sqrt{\sin\alpha}$, tj. $x>0$. Analogno dobivamo da je $y>0$ i $z>0$.

Označimo lijevu stranu nejednakosti koju treba dokazati sa A i primijenimo AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{y+z}{2}}{x}+\frac{\frac{x+z}{2}}{y}+\frac{\frac{x+y}{2}}{z} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2=3. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda kada je $x=y=z$ što se svodi na $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, tj. $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Zadatak 16. *Dokažite da za trokut ABC vrijedi $R>2r$, gdje je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice, a r polumjer tom trokutu upisane kružnice.*

Rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, α, β, γ redom njihovi nasuprotni kutovi, a P površina trokuta ABC. Kako je $2P=r(a+b+c)$ i $2P=ab\sin\gamma$, to je

$$r(a+b+c)=ab\sin\gamma.$$

Obzirom da je $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, dalje imamo redom

$$r(2R\sin\alpha+2R\sin\beta+2R\sin\gamma)=2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot\sin\gamma,$$

$$r=\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\cdot 2R.$$

Kako je $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma>0$, jer su $\alpha,\beta,\gamma\in\langle 0,\pi\rangle$, to možemo rabiti AG-nejednakost:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\left(\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\right)^3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\cdot 2R \\ &\leq \frac{\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\cdot 2R \\ &= \frac{2R}{27}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \\ &= \frac{2R}{3}\cdot\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Kako je funkcija $x\mapsto\sin x$ Jensen-konkavna (vidjeti [4]), vrijedi

$$\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^2\leq\sin^2\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Big),$$

pa je

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{2R}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \\ &= \frac{2R}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{2R}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

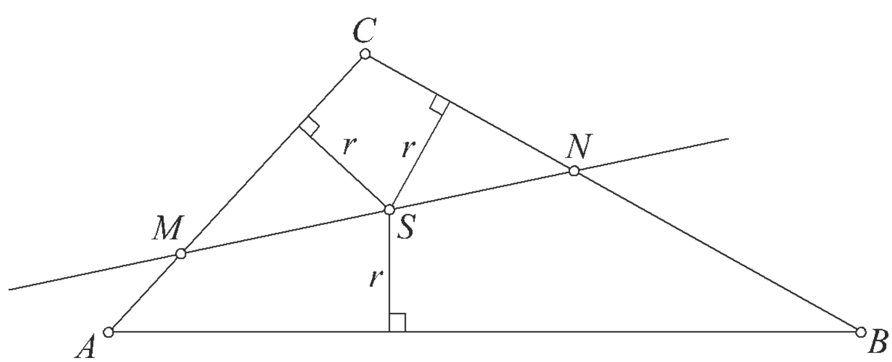
Dakle, $2r \leq R$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Zadatak 17. *Neka je r polumjer, a S središte kružnice upisane trokutu ABC. Neka sekanta kružnice koja prolazi točkom S siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N. Dokažite da vrijedi*

$$P(MNC) \geq 2r^2.$$

Rješenje. Označimo sa P_1 površinu trokuta MNC. Vrijedi

$$\begin{aligned} P_1 &= P(MSC)+P(SNC) \\ &= \frac{1}{2}|CM|\cdot r + \frac{1}{2}|CN|\cdot r \\ &= \frac{1}{2}r(|CM|+|CN|). \end{aligned}$$



Slika 3.

Prema AG-nejednakosti je

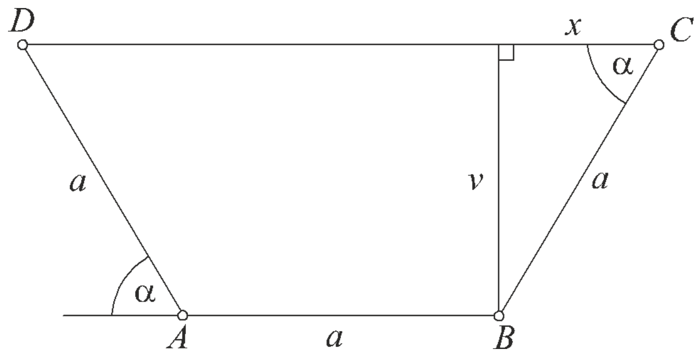
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|CM|+|CN|) &\geq \sqrt{|CM|\cdot|CN|} \\ &\geq \sqrt{|CM|\cdot|CN|\cdot\sin\sphericalangle BCA} = \sqrt{2P_1}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi

$$P_1 = r\cdot\frac{1}{2}(|CM|+|CN|) \geq r\cdot\sqrt{2P_1},$$

tj. $P_1^2 \geq r^2\cdot 2P_1$, pa je $P_1 \geq 2r^2$.

Zadatak 18. *Presjek kanala je jednakokračan trapez kome osnovica i krak imaju duljinu a, a kut pri vrhu kanala je α. Koji presjek ima najmanju površinu?*
Rješenje.



Slika 4.

Neka su oznake kao na slici. Vidimo da je $v = a\sin\alpha$ i $x = a\cos\alpha$. Slijedi $c = a + 2a\cos\alpha$, pa imamo

$$P = \frac{a+c}{2}\cdot v = \frac{a+a+2a\cos\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha = (1+\cos\alpha)a^2\sin\alpha.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} P^2 &= (1+\cos\alpha)^2a^4\sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)^2a^4(1-\cos^2\alpha)\\ &= (1+\cos\alpha)^3a^4(1-\cos\alpha) = \frac{1}{3}a^4(1+\cos\alpha)^3(3-3\cos\alpha)\\ &= \frac{1}{3}a^4(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(3-3\cos\alpha). \end{aligned}$$

Kako je prema AG-nejednakosti

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}a^4(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(3-3\cos\alpha)\\ \leq\ &\frac{1}{3}a^4\cdot\left(\frac{1+\cos\alpha+1+\cos\alpha+1+\cos\alpha+3-3\cos\alpha}{4}\right)^4\\ =\ &\frac{1}{3}a^4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{27}{16}a^4, \end{aligned}$$

to je $P \leq \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $1+\cos\alpha = 3-3\cos\alpha$, tj. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, odnosno $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Zadatak 19. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a P njegova površina. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}P.$$

Rješenje. Iz očigledne nejednakosti $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ dobivamo $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, tj.

$$a^2+b^2+c^2 \geq 2P\Big(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\Big).$$

Prema AG-nejednakosti je

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Dokažimo sada da je $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Prema 8. zadatku,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

a u [4] je dokazano da je

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma &= 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\ &\leq 8\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8},\end{aligned}$$

pa je

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \geq 2\sqrt{3}.$$

Dakle,

$$a^2+b^2+c^2 \geq 2P\cdot 2\sqrt{3}=4P\sqrt{3}.$$

Jednakost vrijedi onda i samo onda kada je $a=b=c$.

Zadaci za vježbu

1. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x\cos x}$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.
Rez. $f_{\min}(x)=2\sqrt{2}+2$ za $x=\frac{\pi}{4}$.

2. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x)=\sin^2 x(2-2\sin x)$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
Rez. $f_{\min}(x) = \frac{8}{27}$ za $x = \arcsin \frac{2}{3}$.

3. Odredite minimalnu vrijednost funkcije

$$f(x) = \cos^2 x(2 - 2\cos x)$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
Rez. $f_{\min}(x) = \frac{8}{27}$ za $x = \arccos \frac{2}{3}$.

4. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, a P njegova površina. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}P.$$

5. Neka su u trokutu ABC, a, b i c duljine stranica, a t_c duljina težišnice povučene iz vrha C i neka vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t_c}.$$

Dokažite da je tada $\sphericalangle BCA \geq \frac{2\pi}{3}$.

6. Riješite jednadžbu

$$2\cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}.$$

Rez. $(x, y) = (0, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Neka su α, β i γ kutovi trokuta, a n prirodni broj. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geq 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

Literatura

[1] G. Bartha, P. Kun, *Válogatott fejézetek a matematikából*, Tankőnyvkiadó, Budapest, 1986.

[2] J. Carstensen, A. Muminagić, *Matematiske juveler*, Frederiksberg Bogtrykkeri, Frederik, 2006.

[3] J. Carstensen, A. Muminagić, *Matematiske miniaturer*, Frederiksberg Bogtrykkeri, Frederik, 2004.

[4] I. Ilišević, *Jensenova nejednakost*, Osječki matematički list **5**(1) (2005), 9–19.

[5] I. Ilišević, *Primjena AG-nejednakosti u planimetriji*, Osječki matematički list **9**(2) (2009), 55–68.

[6] S. Katz, *Matematika feladatsorok*, Mozaik Oktatási Stűdió, Szeged, 1995.

[7] B. Pavković, D. Svrtan, D. Veljan, *Matematika, zbirka zadataka za treći razred srednjeg usmjerenog obrazovanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.