Heronova formula kao rješenje sustava funkcijskih jednadžbi

ANTUN IVANKOVIĆ*

Sažetak. *U ovome članku se do Heronove formule, za razliku od mnogih dokaza iste, dolazi netipičnim načinom i postupkom. Naime, promatrajući jedan sustav funkcijskih jednadžbi s tri realne varijable dobivamo rješenje čiji kvadratni korijen ima istovjetnu algebarsku strukturu kao i Heronova formula. Analizirajući svaku od četiri jednadžbe sustava dobivamo ne samo informacije koje nam govore da se uistinu radi o Heronovoj formuli, nego i mnogo više.*

Ključne riječi: *funkcijska jednadžba, sustav funkcijskih jednadžbi, trokut, pravokutni trokut, defekt trokuta, paralelogram, trigonometrija*

Heron's formula as the solution system of functional equations

Abstract. *In this article many non-standard methods and procedures are being used to prove Heron's formula. Namely, by observing one system of functional equations with three real variables we reach a solution which square root has the same algebraic structure as the Heron's formula. While analyzing each of the four equations of the system we get not only the information which confirme that the formula in question is indeed the Heron's formula but much more as well.*

Key words: *functional equations, system of functional equations, triangle, rectangular triangle, defect of triangle, paralellogram, trigonometry*

1. Uvod

U literaturi postoje razni dokazi i poopćenja Heronove formule, kako u ravnini, tako i u prostoru, od kojih neki možda datiraju i prije Heronovog vremena. *Heron* iz Aleksandrije je grčki matematičar koji je živio najvjerojatnije u prvom stoljeću prije Krista, pisao djela iz matematike, mehanike i optike. Ova njegova znamenita formula, kojom se u ovom članku bavimo, dokazana je u prvoj knjizi njegovog djela *Metrica*, koju je napisao oko 75. godine poslije Krista. Naime, postoje kontroverze o vremenu u kojem je živio i djelovao Heron. Po prvima je živio u 2. stoljeću prije Krista, a po drugima u 1. stoljeću poslije Krista. No, kako bilo, nama je najvažnije

*Srednja škola Ilok, HR-32236 Ilok, `antun.ivankovic@vk.htnet.hr`

ono što nam je taj genijalni čovjek ostavio. Formulacija Heronove formule, a možda i dokaz, bila je poznata Arhimedu još u 3. stoljeću pr. Krista. Znači, kao što je dobro poznato, površinu $\triangle ABC$ sa stranicama a, b i c, izračunavamo po formuli:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je s poluopseg stranica, tj. $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Postoje i razna poopćenja ove formule, kao za konveksni četverokut, tzv. *Bretschneiderova* formula:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

gdje su a, b, c i d redom duljine susjednih stranica konveksnog četverokuta, s je njihov poluopseg, a kutovi α i γ su kutovi između susjednih stranica četverokuta, te *Brahmaguptina* formula za tetivni četverokut, pa generalizacija u prostoru za tetraedar, višedimenzioni simpleks, itd. Kako u tetivnom četverokutu $ABCD$ sa stranicama a, b, c, d i redom kutovima α, β, γ, δ vrijedi da je $\alpha+\gamma = \pi$, iz prethodne formule slijedi da je površina

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Ova formula zove se *Brahmaguptina* formula i dobija se kao "specijalni" slučaj *Bretschneiderove* formule. U ovome članku nije bilo planirano razmatrati ovakve sadržaje, pa upućujem čitatelja na npr. [2] i drugu srodnu literaturu ili pak mnoštvo uradaka na Internetu.

O različitim dokazima Heronove formule dosta je već rečeno i napisano (vidi [1] i [2]). U izvođenju i dokazivanju ove formule koristimo se elementarnom matematikom (algebra, planimetrija, vektori, itd.) pa je i to razlog što nam je ona tako lijepa i elegantna. Naročito je važno što sve to mogu pratiti i učenici završnih razreda osnovnih i srednjih škola i doživjeti ljepotu matematike kroz ovakve sadržaje. Najbolji dokaz za ovo je lijep, elegantan i elementaran dokaz srednjoškolca Milesa Edwardsa prikazan u radu [4].

U ovome članku pokazat ćemo kako se do Heronove formule dolazi malo drugačijim pristupom, tj. rješavanjem jednog sustava funkcijskih jednadžbi (vidi [3]). Nadalje, analizirajući upotrebljivost tako dobivenog rezultata na jednom jednostavnom zadatku, dobivamo razne trigonometrijske odnose, tj. možemo prirodno izgraditi i samu trigonometriju.

2. "Dokaz" Heronove formule

Neka je $f : {\mathbb{R}^+}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ polinom od tri realna pozitivna argumenta x, y, z, sa sljedećim svojstvima:

1. $f(1,1,\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$
2. $f(x,y,z) = f(x,z,y) = f(y,x,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y) = f(z,y,x)$
3. $f(kx,ky,kz) = k^4 f(x,y,z), \quad$ gdje je $k \in \mathbb{R}^+$

4. $f(x, y, x + y) = 0$.

Svojstvima od (1) do (4) polinoma f zadan je sustav funkcijskih jednadžbi. Analizirajmo što nam ovi uvjeti odnosno jednadžbe govore:

Uvjet (2) kaže da je polinom f simetričan po svim promjenljivim veličinama, a iz uvjeta (3) slijedi da je funkcija odnosno polinom četvrtog stupnja homogen po svim varijablama.

Iz svojstva (4) slijedi da je $z = x + y$ nula polinoma f, a zbog simetričnosti, nule su također $x = y + z$ i $y = x + z$. Pošto polinom $f(x, y, z)$ mora (zbog (3)) biti četvrtog stupnja, i zbog (4), možemo pisati:

$$f(x, y, z) = g(x, y, z)(y + z - x)(x + z - y)(x + y - z),$$

gdje je $g(x, y, z)$ neki polinom prvog stupnja simetričan po svim argumentima. Stoga je:

$$g(x, y, z) = a(x + y + z),$$

gdje je a konstanta, tj. $a \in \mathbb{R}^+$. Iz svojstva (1) dobivamo:

$$\frac{1}{4} = a(1 + 1 + \sqrt{2})(1 + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2} - 1) = 4a,$$

odakle slijedi da je $a = \frac{1}{16}$. Sada možemo pisati

$$f(x, y, z) = \frac{1}{16}(x + y + z)(y + z - x)(x + z - y)(x + y - z) \qquad (i)$$

Ova funkcija predstavlja rješenje sustava (1) do (4) funkcijskih jednadžbi. Promotrimo li dobivenu funkciju lako se uvjeravamo da su svi zadani uvjeti zadovoljeni, tj. da je ona uistinu traženo rješenje sustava. No, nastavimo dalje. Ako stavimo

$$x + y + z = 2s$$

polinom $f(x, y, z)$ dobija kraći oblik

$$f(x, y, z) = s(s - x)(s - y)(s - z)$$

u kojem lako prepoznajemo kvadrat Heronove formule. Dobro je poznato da je s njom zadan postupak za izračunavanje površine trokuta ako su zadane stranice, ovdje x, y i z. Osvrnimo se ponovno na četiri uvjeta zadana funkcijskim jednadžbama, i pokušajmo zaključiti što nam oni govore u svjetlu dobivenog rezultata.

Uvjet (1) kaže nam da kvadrat sa stranicom 1 ima površinu 1, odnosno njegova polovina (trokut sa stranicama 1, 1, $\sqrt{2}$) ima površinu $\frac{1}{2}$. Drugim riječima uvodi se "jedinica mjerenja", tj. jedinični kvadrat. Kako je ovim uvjetom zadan kvadrat te površine, zaključujemo da je površina trokuta sa stranicama x, y, z jednaka $\sqrt{f(x, y, z)}$, odnosno zapisujemo

$$P(x, y, z) = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)} \qquad (ii)$$

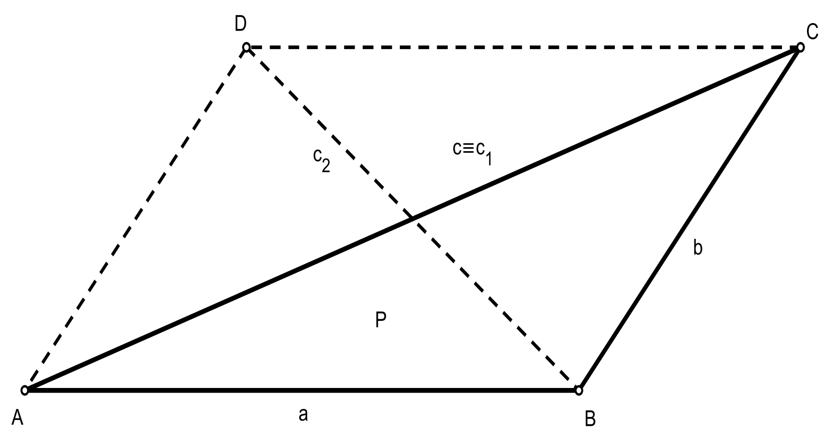
što predstavlja dobro poznati zapis Heronove formule. Uvjet (2) govori nam da površina trokuta ne ovisi o poretku njegovih stranica.

Uvjet (3) kaže da površina sličnog lika nekom liku raste s kvadratom koeficijenta sličnosti k. Koeficijent sličnosti daje nam ujedno i informaciju o promjeni jedinice mjerenja.

Uvjet (4) govori da je površina trokuta jednaka nuli u slučaju da sva tri njegova vrha leže na jednom pravcu, odnosno stranici. Iz svega ovoga možemo zaključiti da sustav funkcijskih jednadžbi (1) do (4) uistinu daje sve potrebne informacije i uvjete da bi se iz rješenja sustava (i) mogla izvesti Heronova formula (ii). Evo, sada kada je naša formula "dokazana" krenimo dalje. Primijenimo Heronovu formulu na rješavanje jednog planimetrijskog zadatka kako bismo proveli jedno zanimljivo razmišljanje.

3. Jedan zadatak i njegove posljedice

Nađimo treću stranicu c trokuta ABC (Slika 1) ako su poznate stranice a, b i njegova površina P. Ovaj zadatak je ekvivalentan nalaženju druge dijagonale c_2 paralelograma $ABCD$ kada su mu poznate stranice a, b i dijagonala c_1. Pošto dvije stranice paralelograma sa dijagonalom čine trokut, po Heronovoj formuli možemo izračunati površinu, a onda se po prvotnoj formulaciji zadatka dobija prva dijagonala, a uz put nalazimo i drugu. Redom provedimo navedeni postupak:



Slika 1. Trokut ABC proširen do paralelograma $ABCD$

Prema ranije izloženom vrijedi:

$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

gdje su a, b, c stranice trokuta, a P njegova površina (Slika 1). Neka je zadano: P, a i b, a traži se stranica c. Nakon množenja, iz prethodnog izraza dobivamo:

$$16P^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2].$$

Uvedimo supstitucije: $(a+b)^2 = u$, $(a-b)^2 = v$, $c^2 = x$, $16P^2 = w$. Nakon uvrštavanja u prethodni izraz i sređivanja dobijamo kvadratnu jednadžbu po x:

$$x^2 - (u+v)x + uv + w = 0.$$

Rješavanjem jednadžbe i vraćanjem supstitucija dobivamo:

$$x_{1,2} = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2} \qquad (iii)$$

gdje jedno rješenje daje jednu dijagonalu, a drugo drugu dijagonalu odgovarajućeg paralelograma.
Ilustrirajmo sve to na jednostavnom primjeru. Uzmimo trokut sa stranicama $a = 3$, $b = 4$ i površine $P = 5$. Stranicu c izračunavamo koristeći izraz (iii). Tako dobivamo

$$x_{1,2} = 9 + 16 \pm 2\sqrt{9 \cdot 16 - 4 \cdot 36} = 25,$$

pa su obje dijagonale odgovarajućeg paralelograma jednake 5 (jer je $c_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}}$) i takav trokut je pravokutan. Ako, na primjer, u tom trokutu uzmemo za $a = 3$, $b = 5$ i $P = 6$, na isti način dobivamo

$$x_{1,2} = 9 + 25 \pm 2\sqrt{9 \cdot 25 - 4 \cdot 36} = 34 \pm 18,$$

odnosno $x_1 = 16$ i $x_2 = 52$, odakle slijede dijagonale $c_1 = 4$ i $c_2 = 2\sqrt{13}$ odgovarajućeg paralelograma. Prvu dijagonalu mogli smo naslutiti odmah, a drugu tek poslije provedenog računa. Izraz (iii) za izračunavanje treće stranice, ako su zadane dvije i površina, možemo opet lako vratiti na oblik za izračunavanje površine iz tri stranice. Ako u (iii) umjesto $x_{1,2}$ stavimo c^2, gdje je $c^2 = x_{1,2}$, dobivamo

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4P^2}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$16P^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2,$$

odakle slijedi

$$P = \sqrt{\left(\frac{ab}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}\right)^2}.$$

U gornjem izrazu, označimo sa $Q = \frac{ab}{2}$ i $D = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$. Izraz Q predstavlja površinu pravokutnog trokuta sa katetama a i b, a izraz D nazovimo “defekt trokuta.”[1] Sada gornja formula dobiva oblik $P = \sqrt{Q^2 - D^2}$ odnosno

$$P^2 + D^2 = Q^2 \qquad (iv)$$

Primjećujemo da se P, Q i D “ponašaju” kao stranice pravokutnog trokuta. Zaključujemo sljedeće: površina Q pravokutnog trokuta sa stranicama a i b, površina

[1] Ako su a, b, c stranice trokuta, a α, β i γ kutovi nasuprot redom zadanih stranica, onda imamo: $D = \frac{ab}{2}\cos\gamma$ i $P = \frac{ab}{2}\sin\gamma$. Nije teško provjeriti da je za ovakve vrijednosti površina jednakost u (iv) identički zadovoljena.

P trokuta sa stranicama a, b, c i defekt D ovog trokuta u odnosu na stranicu c, redom su hipotenuza i kateta pravokutnog trokuta. Ako (iv) napišemo u obliku

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^2 + \left(\frac{D}{Q}\right)^2 = 1$$

vidimo da se $\frac{P}{Q}$ može uzeti kao sinus nekog kuta, a $\frac{D}{Q}$ kao kosinus istog kuta i izvesti dalje niz trigonometrijskih odnosa. Na taj način navedene funkcijske jednadžbe sadrže informacije iz kojih se može izgraditi i sama trigonometrija.

Literatura

[1] D. Jovičić, J. Beban-Brkić, *Različiti dokazi Heronove formule*, Miš **45**(2008), 210–214.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1 i 2*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] M. Stojaković, *Stazama matematike*, Radnički univerzitet "Radivoj Ćirpanov", Novi Sad, 1977.

[4] N. Truhar, *Dva dokaza Heronove formule*, OML **2**(2008), 65–69.